MINISTERUL ÎNVĂȚĂMÎNTULUI ȘI ȘTIINȚEI

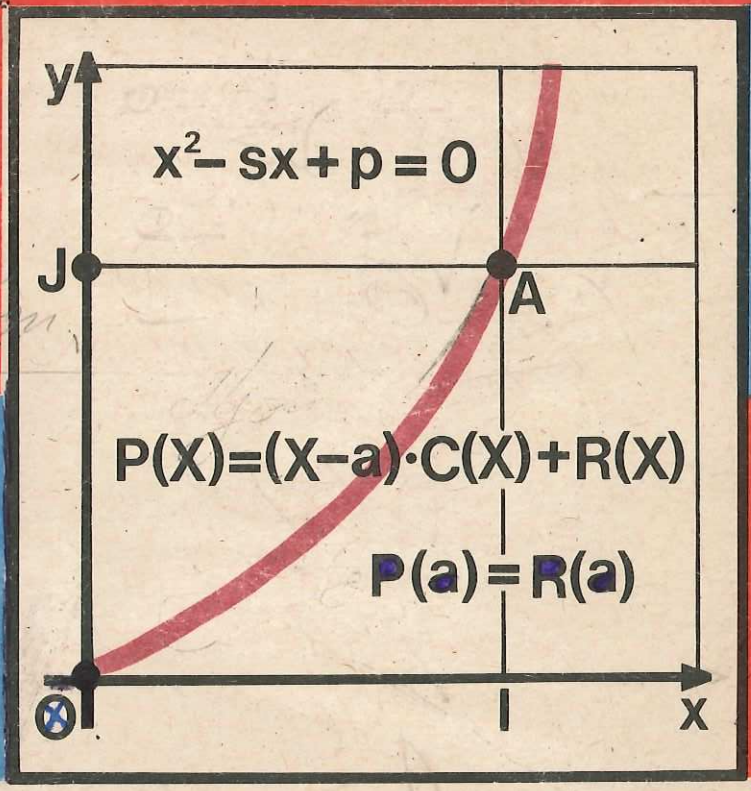
VIII

Matematică

Algebră

Manual pentru clasa a VIII-a

IOAN CRĂCIUNEL
MIRCEA FIANU
LAURENȚIU GAIU
LILIANA NICULESCU
PETRE SIMION
TIBERIU SPIRCU



EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ, BUCUREȘTI — 1990

Prodi Leonu
ovidiu

MINISTERUL ÎNVĂȚĂMÎNTULUI ȘI ȘTIINȚEI

IOAN CRACIUNEL
MIRCEA FIANU
LAURENȚIU GAIU
LILIANA NICULESCU
PETRE SIMION
ȚIBERIU SPIRCU

Matematică

Algebră

Manual pentru clasa a VIII-a

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ — BUCUREȘTI

Manualul a fost elaborat pe baza programei şcolare aprobate cu nr. 39197/1983

Referenţi: Prof. univ. dr. **Octavian Stănăşilă**
Conf. univ. dr. **Ion D. Ion**
Conf. univ. dr. **Constantin Năstăsescu**
Lector univ. dr. **Horia Georgescu**
Prof. **Ioan Mitrache**
Prof. **Elena Matrosenco**
Prof. **Constantin Cărbunaru**
Prof. **Alexandru Setelecan**
Prof. **Eugen Radu**

La definitivarea manualului s-a ţinut seamă şi de propunerile unor cadre didactice din judeţele Giurgiu, Hunedoara şi Vrancea.

ISBN 973-30-0654-8

Redactor: Prof. **Cătălin-Petru Nicolescu**
Tehnoredactor: **Luminiţa Rodica Popescu**
Coperta: **Nicolae Sîrbu**

Capitolul I

1. RECAPITULARE
clasa a VII-a

1.1. MULȚIMI DE NUMERE REALE

1) (Oral). Care este valoarea de adevăr a propozițiilor: $0 \in \mathbf{N}$; $-\frac{2}{1} \in \mathbf{Z}$; $1,(5) \notin \mathbf{Q}$; $\sqrt{2} \in \mathbf{R}$; $-\sqrt{2} \in \mathbf{Q}$; $\sqrt{3}-1 \notin \mathbf{R}-\mathbf{Q}$; $\frac{\sqrt{3}}{1} \in \mathbf{R}-\mathbf{Q}$; $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \notin \mathbf{R}$; $0 \in \mathbf{Q}^*$; $\sqrt{-2} \in \mathbf{R}$; $+2 \in \mathbf{Z}$; $3,14 \in \mathbf{R}-\mathbf{Q}$; $1,41 \notin \mathbf{R}-\mathbf{Q}$; $1,73 \in \mathbf{R}$; $-\pi \in \mathbf{R}-\mathbf{Q}$.

2) (Oral). Fie $A=\{2n \mid n \in \mathbf{N}\}$; $B=\{2n+1 \mid n \in \mathbf{N}\}$; $C=\{2k \mid k \in \mathbf{Z}\}$; $D=\{2k+1 \mid k \in \mathbf{Z}\}$; $F=\{3k \mid k \in \mathbf{Z}\}$; $F=\{3k-1 \mid k \in \mathbf{Z}\}$; $G=\{3k+1 \mid k \in \mathbf{Z}\}$. Se cer valorile de adevăr ale propozițiilor: $4 \in A$; $4 \in C$; $0 \in C$; $-4 \in C$; $-11 \notin G$; $-5 \in G$; $-3 \in D$; $5 \in D$; $5 \in B$; $6 \notin E$; $-7 \in F$; $7 \in G$; $5 \in F$; $4 \in G$; $0 \notin A$; $\pi 6 \in A$; $12 \in A$; $-6 \notin C$; $7 \in B$; $9 \in B$; $11 \notin B$, $7 \in D$; $-7 \notin D$; $0 \in E$; $12 \in E$; $-9 \notin E$; $-4 \in F$; $-13 \notin F$.

3) Stabiliți care dintre următoarele afirmații sînt adevărate: a) $\{1\}=\{1; 2\}$; b) $\{-1; 0; 1\} \subset \{-2; -1; 0; 1; 2\}$; c) $\{0; 3; 6\} \supset \{3; 6\}$; d) $\{-4; 1; 4\} \supset \{1; 3\}$; e) $\{0; 1\} \subset \mathbf{N}$; f) $\{0; 1; 2\} \subset \mathbf{N}^*$; g) $\{-2; -1\} \subset \mathbf{Z}$; h) $\{-3; -2; -1\} \subset \mathbf{Z}^*$; i) $\left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}\right\} \subset \mathbf{Q}^*$; j) $\{\sqrt{3}; \sqrt{2}; \pi\} \in \mathbf{R}$; k) $\{x \in \mathbf{N} \mid 0 < x < 100\} \supset \{x \in \mathbf{N} \mid 0 \leqslant x < 100\}$; l) $\{-3; -2; 0; 1\} \not\subset \mathbf{Z}$; m) $\left\{-\frac{2}{1}; -\frac{3}{2}; -1; 0,5; 1,(3)\right\} \not\subset \mathbf{Q}$; n) $\{-\sqrt{11}; -\pi; -\sqrt{3}; +\sqrt{3}\} \subset \mathbf{R}-\mathbf{Q}$; o) $\left\{0,01; \frac{1}{3}; -\frac{2}{5}; 1+\sqrt{2}; \sqrt{3}+\sqrt{2}\right\} \subset \mathbf{R}$; p) $\{0\} \subset \mathbf{R}^*$.

4) A, B, C, D, E, F, G fiind mulțimile de la exercițiul (2) cercetați dacă: a) $\{0; 2; 4; 6; 8\} \subset A$; b) $\{1; 3; 5; 7; 9\} \subset B$; c) $\{-6; -4; -2; 0; 2; 4\} \subset C$; d) $\{-5; -3; -1; 1; 3; 5\} \subset D$; e) $\{-9; -6; -3; 0; 3; 6\} \subset E$; f) $\{-10; -7; -4; -1; 2; 5\} \not\subset F$; g) $\{-8; -5; -2; 1; 7\} \not\subset G$; h) $\mathbf{Q} \supset C \supset A$; i) $\mathbf{Z} \supset D \supset B$.

5) a) Se dau mulțimile: $A=\{-3; -2; 0\}$; $B=\{-2\}$; $C=\{0; 1; 2\}$. Determinați: 1) $A \cup B$; 2) $A \cap B$; 3) $A-B$; 4) $B-A$; 5) $B \cup C$; 6) $B \cap C$; 7) $B-C$; 8) $C-B$.

b) Aceleași întrebări dacă $A=\{-3; 0; 1\}$; $B=\{0; 1\}$; $C=\{1; 2; 3\}$;

c) Fie $A=\left\{-2; \frac{5}{3}; 0; \sqrt{3}; -1,73; -\sqrt{2}; 1,0(4); \sqrt{-1}\right\}$.

Determinați: 1) $A \cup \mathbf{R}$; 2) $A \cup \mathbf{Q}$; 3) $A \cup \mathbf{Z}$; 4) $A \cup \mathbf{Z}^*$; 5) $A \cup \mathbf{N}$; 6) $A \cup \mathbf{N}^*$; 7) $A \cap \mathbf{R}$; 8) $A \cap \mathbf{Q}$; 9) $A \cap (\mathbf{R} - \mathbf{Q})$; 10) $A \cap \mathbf{Z}$; 11) $A \cap \mathbf{Z}^*$; 12) $A \cap \mathbf{N}$; 13) $A \cap N^*$. 14) $A - \mathbf{R}$; 15) $A - (\mathbf{R} - \mathbf{Q})$; 16) $A - \mathbf{Z}$; 17) $A - \mathbf{Z}^*$; 18) $A - N$; 19) $A - N^*$;

6) Se dau propozițiile: i) Dacă $a \in \mathbf{N}$, atunci $a \in \mathbf{Z}$; ii) Dacă $a \in \mathbf{Z}$, atunci $a \in \mathbf{Q}$; iii) Dacă $a \in \mathbf{R}$, atunci $a \in \mathbf{Q}$; iv) Dacă $a \in \mathbf{Q}$, atunci $a \in \mathbf{Z}$.

a) Stabiliți valoarea de adevăr a fiecărei propoziții.

b) Stabiliți relațiile de incluziune pentru $\mathbf{N}$; $\mathbf{Z}$; $\mathbf{Q}$; $\mathbf{R}$.

7) Determinați: a) $\mathbf{N} \cap \mathbf{Z}$; b) $\mathbf{N} \cup \mathbf{Z}$; c) $\mathbf{N} \cup \mathbf{Q}$; d) $\mathbf{N} \cup \mathbf{R}$; e) $\mathbf{N} \cap \mathbf{Z}^*$; f) $\mathbf{N} \cap \mathbf{R}$; g) $\mathbf{Z}^* \cup \mathbf{Q}$; h) $\mathbf{Q} \cup \mathbf{R}$; i) $\mathbf{Q} \cap \mathbf{Z}$; j) $\mathbf{Q} \cap \mathbf{R}$; k) $\mathbf{N} - \mathbf{Z}$; l) $\mathbf{Z} - \mathbf{Q}$; m) $\mathbf{Q} - \mathbf{R}$; n) $\mathbf{Z} - \mathbf{N}$.

8) Se dă mulțimea $B = \left\{-3;\ \sqrt{5};\ 1\frac{1}{2};\ -2,(16);\ 1,41;\ \pi\right\}$.

a) Este adevărat că $B \subset \mathbf{R}$? (justificați).

b) Determinați elementele mulțimilor:

1) $C = \{x \in \mathbf{Q} \mid x \in E\}$; 2) $D = \{x \in \mathbf{Z} \mid x \in C\}$; 3) $E = \{x \in \mathbf{N} \mid x \in D\}$; 4) $F = \{x \in \mathbf{R} - \mathbf{Q} \mid x \in B\}$.

9) A; B; C; D; E; F; G fiind mulțimile de la exercițiul 2), determinați mulțimile: a) $A \cup B$; b) $A \cap B$; c) $C \cup D$; d) $C \cap D$; e) $E \cup F \cup G$; f) $A \cup C$; g) $B \cup D$; h) $E \cap F \cap G$; i) $A \cap C$; j) $B \cap D$.

10) Reprezentați pe axă punctele cu abscisele: (a) -2; 7; $\frac{13}{2}$; $-1,5$; $\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}$; 2; (b) -3; -4; $-\sqrt{3}$; 0; $\sqrt{3}$; $1,73$; 1.

11) Reprezentați pe axa numerelor punctele cu abscisa în mulțimea: $\left\{-\frac{3}{1};\ 1,3;\ 5;\ \frac{0}{2};\ \frac{6}{2}\right\} \cap \mathbf{Z}$.

12) Prin cîte puncte distincte se reprezintă pe axă următoarele numere: $\{-5; 2; -\frac{9}{3}; 3; -\frac{5}{1}; +\frac{4}{2}$?

13) Aflați a 7-a, a 14-a și a 174-a zecimală a numerelor: a) $0,(14357)$; b) $\frac{2}{5}$; c) $\frac{1}{7}$.

14) Specificați care dintre următoarele fracții sînt reprezentate în scrierea zecimală prin fracții periodice (simple sau mixte): $\frac{3}{5}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{5}{4}$; $\frac{3}{7}$; $\frac{21}{14}$; $\frac{5}{14}$.

1.2. OPERAȚII CU NUMERE REALE

1) Calculați: a) $125 + 387 + 75$; b) $1\,205 \cdot 103$; c) $416 : (24 : 6)$; d) 501^2; e) $199 \cdot 201$; f) $5 \cdot 1\,990 \cdot 20$; g) $348 \cdot 105 \cdot 0$; h) $458 \cdot 45 + 55 \cdot 458$; i) $999 \cdot 998 - 898 \cdot 999$; j) $1 \cdot 25 \cdot 5 \cdot 125 - 125 \cdot 5 \cdot 25$; k) $1\,990 \cdot 1\,989 - 1\,989^2$; e) $(1\,990 + 1\,990^2) : (1\,900^0 + 1\,990^1)$.

2) Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $(2^3)^5 = 2^{15}$; b) $3^5 \cdot 3^{17} = 9^{22}$; c) $2 \cdot 2^2 \cdot 2^4 \cdot 2^8 = 2^{14}$; d) $(3^2 \cdot 5)^7 = 9^7 \cdot 5^7$; e) $2^{19} : 2^{18} = 2^0$; f) $7^1 + 7^2 = 7^3$; g) $5^5 - 5^4 = 5$; h) $2^0 - 1 = 0$; i) $2^{1989} + 2^{1989} = 2^{1990}$; j) $3 \cdot 5^{19} + 2 \cdot 5^{19} = 5^{20}$; k) $1^{100} + 1^{101} = 2^{201}$; l) $0^{100} + 100^0 = 1$.

3) Determinați numărul „a" știind că:

a) $27 \cdot (147 + 3\,025) = 27 \cdot 147 + 3\,025 \cdot a$; b) $15 \cdot (2\,007 - 2\,000) = 15 \cdot 2\,007 - 15 \cdot a$; c) $1\,989^2 - 1\,988 \cdot 1\,989 = a \cdot 1$; d) $101 \cdot 99 + 101^2 = a \cdot 200$; e) $2^7 \cdot 2^{19} \cdot 2^{11} : (2^3 \cdot 2^5) = 2^{26+11-a}$; f) $(3^7)^a = 1$; g) $(3^0)^7 = 3^a$; h) $(3^4 \cdot 3^5 : 3^a)^8 = 3^0$.

4) Determinați elementele mulțimilor $A = \{n \in \mathbf{N} \mid n + 5 = 12\}$; $B = \{n \in \mathbf{N} \mid n + 12 = 5\}$.

5) Calculați: a) $-2 + 3$; b) $7 + (-9)$; c) $-3 - (-5)$; d) $(-4) \cdot (-7) \cdot 25$; e) $(-108) : (+9) : (-2)$; f) $-4 + 4 \cdot 5$; g) $1\,001 - 101 \cdot 1\,001$; k) $(-2)^3$; i) -2^2; j) $(-1)^{100} + (-1)^{101} - (-1)^{102}$; k) $[(-3)^0 + (-3)^1] : (-2)$.

6) Care din următoarele egalități sînt adevărate:

a) $(-2) \cdot (-2)^{99} = 2^{100}$; b) $(-3)^2 \cdot (-3)^{198} : 3^{200} = 1$; c) $[(-5)^3]^4 - 5^{12} = 0$; d) $[2 \cdot (-3)^3]^5 = (-6)^{15}$?

7) Determinați numărul „a" știind că:

a) $124 + (-157) = -157 + a$; b) $-271 \cdot (+375) = 375 \cdot a$; c) $-25 \cdot (-34 + 52) = 25 \cdot 34 + a \cdot 52$.

8) Determinați elementele mulțimilor $A = \{n \in \mathbf{Z} \mid n + 12 = 5\}$; $B = \{n \in \mathbf{Z} \mid 12 \cdot n = 5\}$.

9) Calculați: a) $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} - \frac{5}{4}$; b) $-\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$; c) $\frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{6}\right)$; d) $1{,}5 - 1\frac{3}{4}$; e) $2{,}1(6) + 1{,}(35)$; f) $2 - \frac{1}{5} - 0{,}9$; g) $\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{-2}{5}\right)$; h) $\left(-1\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{8}{9}$; i) $2{,}5 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)$; j) $\left(-3\frac{1}{2}\right) : \frac{5}{6}$; k) $15{,}2 : 10 : \left(-\frac{2}{5}\right)$; l) $\left(-\frac{3}{4}\right)^3$.

10) Calculați: a) $2^{-2} \cdot 4$; b) $3^{-3} \cdot 3^7 : 3^5$; c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}, \left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$; d) $\left(1\frac{2}{3}\right)^{-2} : \left(4\frac{1}{2}\right)^{-1}$; e) $0{,}1^{-1} \cdot 0 \cdot 1^{-3} \cdot 1000^{-1}$.

11) Determinați numărul „a" astfel încît: a) $(-3)^4 \cdot (-3)^2 \cdot (-3)^{-6} = (-3)^{6+a}$; b) $[(-1)^a]^3 = -1^{-3}$; c) $(-2)^{-a} = -\frac{1}{8}$.

12) Determinați elementele mulțimilor $A = \{n \in \mathbf{Q} \mid 12 \cdot n = 5\}$; $B = \{n \in \mathbf{Q} \mid n^2 = 5\}$.

13) Efectuați: a) $\sqrt{2} - 2 \cdot \sqrt{2}$; b) $3 \cdot \sqrt{5} + \sqrt{20} - \sqrt{125}$; c) $\sqrt{2} \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{2})$; d) $(2\sqrt{3} - 1) \cdot (\sqrt{3} - 2)$; e) $(\sqrt{3} - 2 \cdot \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3} + 2 \cdot \sqrt{2})$; f) $(\sqrt{2} - 3)^2$; g) $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2}$; h) $\frac{2}{3\sqrt{6}} - \frac{4}{9}$; i) $(3\sqrt{6} - 9 \cdot \sqrt{2}) : (-3 \cdot \sqrt{2})$; j) $(-6\sqrt{3})^{-1}$; k) $\sqrt{81} - \sqrt{121^2}$; l) $\sqrt{(-16)^2}$; m) $2^{-2} : 2\sqrt{2} \cdot 2 : (2\sqrt{2})^{-2}$.

14) Determinați numărul „a" astfel încît:

a) $(\sqrt{2} - \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3}) = -a$; b) $\sqrt{3} \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{6}) = a \cdot (1 + \sqrt{2})$; c) $\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}} = a - \frac{\sqrt{3}}{3}$; d) $(\sqrt{3} - \sqrt{5})^2 = a \cdot (1 + \sqrt{15})$; e) $\frac{1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{a}{2}$; f) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7} - 1} = \frac{\sqrt{5}}{6} \cdot a$; g) $\sqrt{100} = -a$; h) $\sqrt{(-25)^2} = a^2$; i) $\sqrt{a^2} = 10$.

15) Determinați elementele mulțimilor $A = \{n \in \mathbf{R} \mid n^2 = 5\}$; $B = \{n \in \mathbf{R} \mid n^2 = -4\}$.

16) a) Stabiliți dacă $\sqrt{2}+3$ și $3\cdot\sqrt{2}$ sînt raționale.

b) Dacă $a \in \mathbf{Q}^*$ și $b \notin \mathbf{Q}$, atunci $a+b \notin \mathbf{Q}$ și $a\cdot b \notin \mathbf{Q}$.

c) Dați două exemple de numere a și $b \in \mathbf{R}-\mathbf{Q}$ astfel ca $a+b$ și $a\cdot b$ să fie numere raționale.

d) Dacă $\sqrt{3}\cdot a \in \mathbf{Q}$ și $\sqrt{5}\cdot a \in \mathbf{Q}$, atunci $a=0$.

1.3. MODULUL. RELAȚIA DE ORDINE PE R

1) Calculați: a) $|-5|$; b) $|+7|-|-7|$; c) $|-3|\cdot|-4|-|(-3)\cdot(-4)|$; d) $|5-3\cdot|2-5||$; e) $\frac{|-8|}{|+2|}$; f) $|-10|:|+5|:|-4|$; g) $|-2|^2-|+3|^3$.

2) Determinați elementele mulțimilor:
$A=\{x\in\mathbf{Q} \mid |x|=3\}$; $B=\{x\in\mathbf{R} \mid |x|=0\}$; $C=\{x\in\mathbf{R} \mid |x|=-1\}$.

3) Reprezentați pe o dreaptă punctele $A(a)$ unde $|a|\in\{0;4;5\}$.

4) Ordonați crescător numerele: a) -5; -3; 3; -2; $|-2|$; $-|-6|$; 0; b) $|-4|$; $|0|$; $|-1|$; 3; -5; -1; c) $0{,}1(6)$; $0{,}(161)$; $0{,}0(161)$; d) $-\pi$; 2, $\sqrt{2}$; $-3{,}14$; $1{,}41$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$; e) $-\frac{1}{2}$; $-\frac{3}{2}$; -2^{-2}; $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$.

5) Care din afirmațiile de mai jos sînt adevărate: a) $|-2|<2$; b) $|-3|\geqslant 0$; c) $-|+2|\leqslant 0$; d) $\left|-\frac{2}{3}\right|\cdot\left|\frac{9}{16}\right|=\left|\left(-\frac{6}{8}\right)\cdot\left(-\frac{3}{6}\right)\right|$; e) $|(-2)+(-5)|\leqslant|-2|+|-5|$; f) $\left|-\frac{7}{3}+\frac{1}{2}\right|\leqslant\left|-\frac{7}{3}\right|+\left|\frac{1}{2}\right|$; g) $\sqrt{8}\cdot|-2|\cdot(-2^2)\cdot\frac{1}{4\sqrt{2}}=-4$.

6) Stabiliți $x\in\mathbf{R}$ astfel încît relațiile de mai jos să fie adevărate: a) $-x=|x|$; b) $-|-x|=x$; c) $\sqrt{|1-x|}\geqslant 0$; d) $\sqrt{-x}\geqslant 0$; e) $-x=\sqrt{x^2}$; f) $\sqrt{x^2}-x=0$.

7) Comparați $3\cdot\sqrt{2}$ cu $2\cdot\sqrt{5}$ și $-3\cdot\sqrt{2}$ cu $-2\cdot\sqrt{5}$.

8) Calculați: a) $|3\cdot\sqrt{2}-2\cdot\sqrt{5}|-2\cdot(\sqrt{5}+\sqrt{2})$;

b) $|1{,}42-\sqrt{2}|-|1{,}73-\sqrt{3}|+|\sqrt{2}+\sqrt{3}|$;

c) $\left|\frac{7}{5}-\frac{7}{3}\right|+\left|\frac{3}{10}-\frac{3}{5}\right|$;

d) $\sqrt{(-177)^2}-\sqrt{208^2}$.

9) Scrieți elementele mulțimilor: $A=\{x\in\mathbf{N}^* \mid |x|<2\}$; $B=\{x\in\mathbf{N} \mid |x|\leqslant 6\}$; $C=\{x\in\mathbf{Z}^* \mid -|x|\leqslant 1\}$; $D=\{x\in\mathbf{Z} \mid |x|\leqslant 3$.

10) Puneți în evidență pe axa numerelor mulțimile: $A=\{x\in\mathbf{N} \mid -3\leqslant x\leqslant 2\}$; $B=\{x\in\mathbf{Z} \mid -3\leqslant x\leqslant 2\}$; $C=\{x\in\mathbf{R} \mid -3\leqslant x\leqslant 2\}$.

11) Pentru $a, b\in\mathbf{R}$ definim $\max(a;b)=\begin{cases} a \text{ dacă } a\geqslant b \\ b \text{ dacă } a<b\end{cases}$

Determinați:

a) $\max(-3;-2)$; b) $\max\left(-\frac{3}{5};-\frac{2}{3}\right)$; c) $\max(|-5|;5)$; d) $\max(|\sqrt{3}-2|;0)$; e) dacă $x\in\mathbf{R}$, $\max(0;|x|)$; f) $\max(|x|;x)$, unde $x\in\mathbf{R}$; g) Există $x\in\mathbf{R}$ astfel încît $\max(|x|;-x)=-x$?

12) Sînt adevărate propozițiile: i) „dacă $a < 0$, atunci $-a > 0$; ii) „dacă $a \in \mathbf{R}$, atunci $a^2 > 0$"; iii) dacă $a \in \mathbf{R}^*$, atunci $a^2 > 0$"?

13) Se dă $x \in \mathbf{R}$, $x < 0$. Efectuați: a) $|x| + x$; b) $|1 - x| - \sqrt{x^2}$; c) $|-x^2 - 1| - \sqrt{x^4}$.

14) Dacă $a, b \in \mathbf{R}$, stabiliți dacă a) $\frac{a+b}{2} \leqslant \max(a; b)$; b) $\sqrt{ab} \leqslant \max(a; b)$.

15) Fie a, b, c numere reale $a < b < 0 < c$. Comparați numerele: a) $a \cdot c$ și $b \cdot c$; b) $a \cdot b$ și $b \cdot c$; c) $b \cdot a$ și $c \cdot a$; d) $a + b$ și c; e) a și $b + c$; f) b și $c - a$; g) b și $a - c$; h) $|b|$ și $|a|$; i) $a - b$ și c.

16) Scrieți cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu x unde $x \in \left\{3{,}7;\ -2;\ -2{,}3;\ -\frac{5}{7};\ \frac{1}{2}\right\}$.

2. INTERVALE

1. Să reprezentăm mulțimea numerelor reale printr-o axă (vezi figura I.1). Fiecărui număr real îi corespunde un punct pe axă, de exemplu, numă-

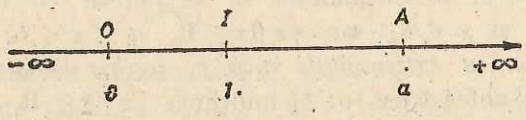


Fig. I.1

rului 1 îi corespunde punctul I, lui O îi corespunde 0, numărului a îi corespunde punctul A.

1) Fie a și b numere reale (cu $a \leqslant b$). Notăm cu $[a; b]$ mulțimea $\{x \in \mathbf{R} \mid a \leqslant x \text{ și } x \leqslant b\}$ sau $\{x \in \mathbf{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$. Această mulțime se numește *interval închis de extremități* a, b.

Dacă extremităților a și b le corespund pe axă punctele A, respectiv B, atunci intervalului închis $[a; b]$ îi corespunde mulțimea punctelor situate pe segmentul AB (vezi figura I.2).

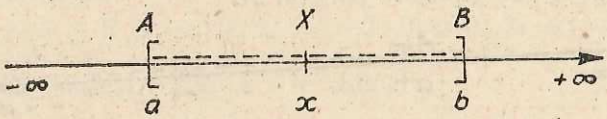


Fig. I.2

2) Fie a și b numere reale cu $a < b$. Se obișnuiește să se noteze cu $(a; b)$

$$\{x \mid x \in \mathbf{R},\ a < x \text{ și } x < b\} \text{ sau } \{x \mid x \in \mathbf{R};\ a < x < b\}$$

numită *interval deschis de extremități* a, b. Deoarece nu este adevărat că $a < a$, rezultă că $a \notin (a; b)$; la fel, $b \notin (a; b)$, adică *intervalele deschise nu-și conțin extremitățile.*

Dacă $a < b$, atunci intervalului deschis $(a; b)$ îi corespunde pe axă mulțimea punctelor interioare segmentului AB (vezi figura 1.3).

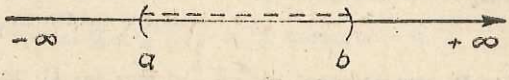


Fig. 1.3

3) Ce obținem dacă intersectăm intervalul închis $[-1; 1]$ cu intervalul deschis $(0; 2)$, reprezentate în figura 1.4. Observăm că intersecția lor este formată din toate numerele reale care sînt mai mari decît 0 și mai mici decît 1,

Fig. 1.4

inclusiv numărul 1. Însă numărul 0 nu aparține intersecției. Această mulțime de numere se notează $(0; 1]$ și se numește *interval semideschis* cu extremitățile 0 și 1, deschis la stînga și închis la dreapta. Deci, $(0; 1] = \{x \mid x \in \mathbf{R}, 0 < x$ și $x \leqslant 1\}$ sau $\{x \mid x \in \mathbf{R}, 0 < x \leqslant 1\}$ și $[-1; 1] \cap (0, 2) = (0; 1]$. În general, dacă $a < b$, se obișnuiește să se noteze cu $(a, b]$ mulțimea $\{x \mid x \in \mathbf{R}, a < x$ și $x \leqslant b\}$ sau $\{x \mid x \in \mathbf{R}, a < x \leqslant b\}$ ea se numește *interval semideschis cu extremitățile a și b, deschis la stînga și închis la dreapta.* La fel, se notează cu $[a; b)$ mulțimea $\{x \mid x \in \mathbf{R}, a \leqslant x$ și $x < b\}$ sau $\{x \mid x \in \mathbf{R}, a \leqslant x < b\}$.

4) Intervalele de forma $[a; b]$, $(a; b)$, $[a; b)$ și $(a; b]$ au extremitățile a și b; ele se numesc *intervale mărginite.* Vom mai folosi și *intervale nemărginite.* Anume, vom nota cu $[a; +\infty)$ mulțimea $\{x \mid x \in \mathbf{R}, x \geqslant a\}$ și cu $(a; +\infty)$ mulțimea $\{x \mid x \in \mathbf{R}, x > a\}$. Acestea sînt *intervale cu extremitatea a, nemărginite la dreapta.*

Dacă extremității a îi corespunde pe o axă punctul A (vezi figurile 1.5, a și 1.5, b) atunci intervalului nemărginit $[a; +\infty)$ sau $(a; +\infty)$ îi corespunde semidreapta marcată, formată din punctele situate „la dreapta" lui A inclusiv punctul A sau exclusiv punctul A.

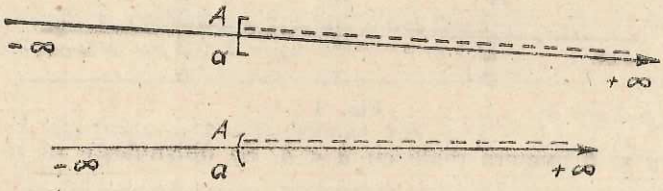


Fig. 1.5 a și b

5) Vom nota cu $(-\infty; a]$ mulțimea $\{x \mid x \in \mathbf{R}, x \leqslant a\}$ și cu $(-\infty; a)$ mulțimea $\{x \mid x \in \mathbf{R}, x < a\}$. Acestea sînt *intervale cu extremitatea a, nemărginite la stînga.*

Intervalului nemărginit $(-\infty; a]$ sau $(-\infty; a)$ îi corespunde pe axă o semidreaptă (cea marcată în figurile I.6a, 6b), formată din punctele situate „la stînga" lui A inclusiv punctul A sau exclusiv punctul A.

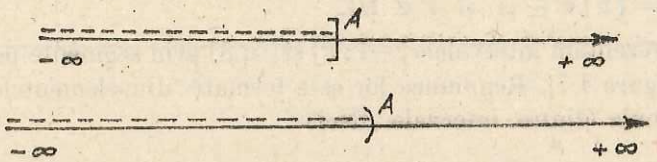


Fig. I.6 a și b

Observație. Simbolurile $+\infty$ și $-\infty$ nu reprezintă numere reale. Se obișnuiește să se citească simbolul $+\infty$ astfel: *„plus infinit"*, iar simbolul $-\infty$ astfel: *„minus infinit"*.

Se obișnuiește să se noteze cu $(-\infty; +\infty)$ mulțimea numerelor reale, prin urmare $\mathbf{R} = (-\infty; +\infty)$.

6) Să ne reamintim că am notat cu $|x|$ pe acela dintre numerele reale x și $-x$ care este pozitiv, numindu-l *valoarea absolută a lui* x (sau *modulul lui* x). Mai precis,

$$|x| = \begin{cases} x \text{ dacă } x \geqslant 0; \\ -x \text{ dacă } x < 0 \end{cases}$$

și care se mai numește și *„explicitarea modulului"*.

De exemplu: $|0{,}75| = 0{,}75$, $|-0{,}75| = 0{,}75$, $|-1| = 1$, $|1{,}25| = 1{,}25$, $|-1{,}25| = 1{,}25$. Să observăm că mulțimea:

$$M = \{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ și } |x| \leqslant 1\}$$

este de fapt intervalul închis $[-1; 1]$, deoarece explicitînd modulul obținem:

Pentru $x \geqslant 0$, $x \leqslant 1$, deci $x \in [0; 1]$, iar pentru $x < 0$, $-x \leqslant 1$ care devine $x \geqslant -1$ adică $x \in [-1; 0)$.

Prin urmare mulțimea: $M = \{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ și } |x| \leqslant 1\}$ este reuniunea intervalelor $[-1; 0)$ și $[0; 1]$ adică

$$M = [-1; 0) \cup [0; 1] = [-1; +1].$$

Asemănător, mulțimea

$$N = \{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ și } |x| < 2\} = (-2; 0) \cup [0; 2) = (-2; 2).$$

În general, dacă $a > 0$, atunci $\{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ și } |x| \leqslant a\} = [-a; a]$ și $\{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ și } |x| < a\} = (-a; a)$

EXERCIȚII REZOLVATE

Intervalele sînt mulțimi de numere; deci toate operațiile ce se pot efectua cu mulțimi (reuniunea, intersecția, diferența) se pot efectua și cu intervale.

Exemplul 1. Să scriem într-o formă mai simplă mulțimile:

$$[-7; 3] \cup [0; 8],\ [-7; 3] \cap [0; 8] \text{ și } [-7; 3] - [0; 8].$$

Reamintim că dacă A și B sînt mulțimi, atunci:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\},\ A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$$

iar $A - B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}$.

Să reprezentăm intervalele $[-7; 3]$ și $[0; 8]$ prin segmente pe axa numerelor (vezi figura I.7). Reuniunea lor este formată din elementele ce aparțin cel puțin unuia dintre intervale, deci:

$$[-7; 3] \cup [0; 8] = [-7; 8].$$

Intersecția lor este formată din elementele ce aparțin ambelor intervale. Deci:

$$[-7; 3] \cap [0; 8] = [0; 3] \text{ (vezi fig. I.7)}$$

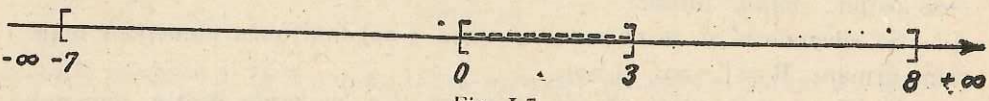


Fig. I.7

Diferența lor este formată din elementele ce aparțin intervalului A, mai puțin intervalului B. Deci $[-7; 3] - [0; 8] = [-7; 0)$.

Exemplul 2. Să scriem într-o formă mai simplă mulțimile:

$$(-2; 3) \cup (0; 4),\ (-2; 3) \cap (0; 4) \text{ și } (-2; 3) \setminus (0; 4).$$

Să reprezentăm intervalele $(-2; 3)$ și $(0; 4)$ prin părți ale unei axe (vezi figura I.8). Numărul 3 aparține intervalului deschis $(0; 4)$, la fel, 0 aparține lui $(-2; 3)$. Observăm că reuniunea celor 2 intervale este $(-2; 4)$, intersecția celor două intervale este intervalul deschis $(0; 3)$, iar diferența celor două intervale este intervalul deschis $(-2; 0)$.

Fig. I.8

Prin urmare putem scrie:

$$(-2; 3) \cup (0; 4) = (-2; 4);\ (-2; 3) \cap (0; 4) = (0; 3) \text{ și } (-2; 3) \setminus (0; 4) = (-2; 0).$$

Exemplul 3. Să observăm că mulțimea $S = \{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ și } |x| \geqslant 1\}$ se poate scrie ca o reuniune de intervale deoarece explicitînd modulul obținem:

Pentru $x \geqslant 0$, $x \geqslant 1$, adică $x \in [1; \infty)$ și pentru $x < 0$, $-x \geqslant 1$ care devine $x \leqslant -1$, adică $x \in (-\infty; -1]$.

Prin urmare mulțimea $S = \{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ și } |x| \geqslant 1\}$ este reuniunea intervalelor $(-\infty; -1]$ și $[1; +\infty)$ adică

$$S = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty) = \mathbf{R} - (-1; 1).$$

> În general dacă $a > 0$, atunci:
>
> $\{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ și } |x| \geqslant a\} = (-\infty; -a] \cup [+a; +\infty) = \mathbf{R} - (-a; +a)$
> și $\{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ și } |x| > a\} = (-\infty; a) \cup (a; +\infty) = \mathbf{R} - [-a; a]$.

Exemplul 4. Tot o reuniune de intervale este şi rezultatul următoarelor diferenţe de intervale:

a) $(-5;\ 8]-[-2;\ 5)=(-5;\ -2)\cup[5;\ 8]$ (fig. I.9)

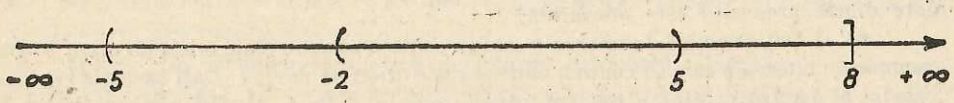


Fig. I.9

b) $(-5;\ 8]-(-2;\ 8)=(-5;\ 2]\cup\{8\}$ (fig. I.10).

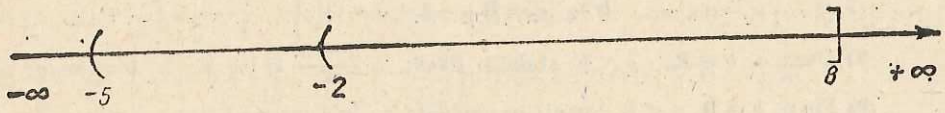


Fig. I.10

Observaţi că $(-5;\ 8]\supset[-2;\ 8)$ şi $(-5;\ 8]\supset(-2;\ 8)$.

EXERCIŢII

INTERVALE DE NUMERE REALE

1) (Oral). Verificaţi dacă afirmaţiile următoare sînt adevărate: a) $0\in[0;\ 3]$; b) $2\in(2;\ 3]$; c) $-1\in[-1;\ 0)$; d) $8\in(-3;\ 8)$; e) $-5\in[-7;\ -5]$; f) $1\in[-4;\ 3)$; g) $-7\in(-8;\ 0]$; h) $4\in[-4;\ +4]$; i) $-2\in(-1;\ 2]$; j) $5\in(-3;\ 4]$; k) $3\in(-3;\ 2{,}999]$; l) $-\frac{2}{3}\in\left[-1;\ 0\right)$; m) $1{,}1(6)\in\left(1;\ \frac{5}{3}\right]$; n) $-\sqrt{5}\in(-3;\sqrt{5})$; o) $17{,}2\in(17;\ +\infty)$; p) $-16{,}9\in(-\infty;\ 16{,}9)$; r) $\frac{\sqrt{3}}{2}\in(-\infty;\ 1]$.

2) (Oral). Care dintre următoarele mulţimi reprezintă intervale de numere reale: a) $\{x\in\mathbf{R}\mid -5\leqslant x\leqslant 2\}$; b) $\{x\in\mathbf{Q}\mid 0\leqslant x<1\}$; c) $\{x\in\mathbf{Z}\mid x\leqslant -2\}$; d) $\{x\in\mathbf{R}\mid x\geqslant\pi\}$; e) $\{x\in\mathbf{N}\mid 0\leqslant x<7\}$.

3) (Oral). a) Există un cel mai mare număr real în fiecare din intervalele: $[-5;\ 2]$; $(-3;\ 2.(5)]$; $[-2\sqrt{2};\ 4)$?

b) Există un cel mai mic număr real în fiecare din intervalele: $[-3{,}2;\ -1{,}8)$; $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\left[-1{,}0(3);\ \frac{7}{5}\right]$?

4) Scrieţi ca intervale mulţimile: $A=\{x\mid x\in\mathbf{R}$ şi $-1\leqslant x\leqslant 4\}$; $B=\{x\mid x\in\mathbf{R}$ şi $3<x\leqslant 7\}$; $C=\{x\mid x\in\mathbf{R}$ şi $-3\leqslant x<0\}$; $D=\{x\mid x\in\mathbf{R}$ şi $-3<x<3\}$; $E=\{x\mid x\in\mathbf{R}$ şi $x\geqslant 0\}$; $F=\{x\mid x\in\mathbf{R}$ şi $x>2\}$; $G=\{x\mid x\in\mathbf{R}$ şi $x\leqslant 0\}$; $H=\{x\mid x\in\mathbf{R}$ şi $x<-3\}$; $I=\{x\mid x\in\mathbf{R}$ şi $-x\geqslant 2\}$; $J=\{x\mid x\in\mathbf{R}$ şi $-x\leqslant +3\}$; $K=\{x\mid x\in\mathbf{R}$ şi $-x\geqslant -1\}$; $L=\{x\mid x\in\mathbf{R}$ şi $-x\leqslant -5\}$; $M=\{x\mid x\in\mathbf{R}$ şi $0{,}5\leqslant x<2{,}5\}$; $N=\{x\mid x\in\mathbf{R}$ şi $-\sqrt{2}<x\leqslant\sqrt{2}\}$; $O=\left\{x\mid x\in\mathbf{R}\text{ şi }-\frac{3}{2}<x\leqslant\frac{3}{2}\right\}$; $P=\{x\mid x\in\mathbf{R}$ şi $-1.(6)<x\leqslant -1.(5)\}$.

5) Fie I un interval de numere reale și propozițiile:

i) „dacă I este nemărginit, atunci I conține o infinitate de numere reale";

ii) „dacă I este mărginit, atunci I conține un număr finit de numere reale";

iii) „dacă I este mărginit atunci I conține un număr finit de numere întregi". Care dintre propoziții este adevărată?

6) a) Dați exemple de intervale care să conțină numere reale oricît de mari; b) Dați exemple de intervale care să conțină numere reale oricît de mici; c) Dați exemple de intervale $[a, b]$ care să conțină n numere întregi, unde $n \in \{0, 1, 2\}$. Calculați în fiecare caz $b - a$.

7) Puneți în evidență pe o axă mulțimile:

$$A = \{-1; 2\};\ B = \{x \in \mathbf{N} \mid -1 \leqslant x \leqslant 2\};\ C = \{x \in \mathbf{Z} \mid -1 \leqslant x \leqslant 2\};$$
$$D = \{x \in \mathbf{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 2\}.$$

8) Dacă $a, b \in \mathbf{R}_+$, $a < b$ stabiliți dacă: a) $\frac{a+b}{2} \in (a; b)$; b) $\sqrt{ab} \in (a; b)$.

9) Fie $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$. Puneți în evidență pe axă intervalele $(-\infty; a]$ și $[b; \infty)$ în fiecare din situațiile: a) $a > 0$; b) $b < 0$; c) $a \leqslant 0 < b$.

În care dintre situații $0 \in (-\infty; a]$?

10) Dacă $0 < x < 1$ stabiliți dacă $a \cdot x \in (a; \infty)$ în situațiile 1) $a > 0$; 2) $a < 0$.

11) Considerăm intervalele $I_1 = [-9; 20]$; $I_2 = (-2; 4)$; $I_3 = (0; 3]$; $I_4 = [0; 1)$; $I_5 = (4; 20]$; $I_6 = (-\infty; 20)$; $I_7 = (3; +\infty)$.

Stabiliți care din următoarele propoziții sînt adevărate:

a) $I_1 \supset I_2$; b) $I_4 \subset I_2$; c) $I_1 \subset I_6$; d) $I_5 \subset I_7$; e) $I_5 \subset I_1$; f) $I_4 \subset I_3$; g) $I_3 \subset I_2 \subset I_1 \subset \mathbf{R}$; h) $I_5 \supset I_4$; i) $I_6 \supset I_2$; j) $I_7 \supset I_3$.

12) Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $(-\infty; -1] \subset (-\infty; 1)$; b) $(-\infty; -1) \subset (-\infty; 2)$; c) $\left(-\infty; -\frac{7}{5}\right] \supset \left(-\infty; -\frac{11}{8}\right)$;

d) $\left(-\infty; -\frac{44}{71}\right) \subset \left(-\infty; -\frac{31}{50}\right)$; e) $[-1; +\infty) \supset (-1; 0]$;

f) $(0; +\infty) \supset [0; 1]$; g) $(3; +\infty) \supset (3; 5)$.

13) Fie a, b, c, d numere reale astfel încît $a < b$ și $c < d$. Notăm $I_1 = [a; b]$; $I_2 = [c; d]$.

Cercetați dacă $I_1 \subset I_2$ în următoarele cazuri:

a) $c \in (a; b)$ și $d < b$; b) $a = c$ și $d \leqslant b$; c) $c = \frac{a+b}{2}$ și $d = \sqrt{ab}$; d) $d < b$ și $a < c$; e) $a < b < c$.

14) Se dau intervalele $I_1 = [-3; 5)$; $I_2 = (-4; 5]$. Este adevărat că dacă $x \in I_1$, atunci $x \in I_2$? Dar reciproc? Ce relație se stabilește între I_1 și I_2?

15) Fie $a < b$ și $I_1 = (a; \infty)$; $I_2 = [b; \infty)$. Este adevărat că dacă $y \in I_1$ atunci $y \in I_2$? Dar reciproc? Ce relație se stabilește între I_1 și I_2? Este posibil ca $I_1 = I_2$?

16) Dacă $a < b < -c < -d$, atunci $[b; c] \subset (a; d)$.

OPERAȚII CU INTERVALE

1) Scrieți cu ajutorul intervalelor: a) $[-2; 7) \cup \{7\}$; b) $(-5; 3) \cup \{-5; 3\}$; c) $[-2; 7] \cup [7; 9]$; d) $(-2; 7) \cup [7; 9)$; e) $[-2,5; 6] \cup [-3; 8]$; f) $[-3,4; 5] \cup \left[-3,5; \frac{9}{2}\right]$; g) $[-2,(16); \sqrt{2}) \cup (-2,1(6); 1,41]$; h) $[-\pi; -\sqrt{5}] \cup [-\sqrt{10}; -2,23)$; i) $\left(\frac{-11}{113}; \frac{13}{111}\right] \cup \left(-\frac{13}{117}; \frac{11}{113}\right)$.

2) Dacă $a \in \mathbf{R}$ scrieţi ca intervale mulţimile:

a) $(-\infty; a) \cup [a; a+1)$; b) $[a-1; a] \cup [a; a+1]$; c) $[a-2; a] \cup [a-1; a+1]$; d) $(-\infty; a] \cup (a; \infty)$.

3) Determinaţi $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ ştiind că: a) $[a; b] \cup [-7; 5] = [-9; 6]$; b) $[a; b] \cup [-3; 2] = [-5; -2]$ şi $b \leqslant -3$.

4) Care din următoarele mulţimi de numere reprezintă intervale: a) $(-\infty; 3] \cup [2; 5)$; b) $(-3; 7] \cup (-2; +\infty)$; c) $(-2; -1) \cup [-1; 2)$; d) $(-1; 0] \cup [1; 2)$; e) $\{-2\} \cup (-2; 1] \cup \{2\}$; f) $(-\infty; 1) \cup [1; +\infty)$?

5) Efectuaţi: a) $(0; \infty) \cup \mathbf{N}$; b) $(-1; \infty) \cup \mathbf{N}^*$; c) $(-\infty; 0] \cup \mathbf{R}^*$.

6) Efectuaţi: a) $[-5; 3) \cap [2; 7]$; b) $[-3; -1) \cap [-2; 3]$; c) $(-4; 0) \cap (-5; -2)$; d) $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{2}{3}\right) \cap \left[-\frac{5}{6}; 0\right)$; e) $(-2,(3); -1] \cap [-\sqrt{5}; -0,(89)]$; f) $[2; 7) \cap [-3; 2]$; g) $(-5; 4) \cap (4; 5)$; h) $\left(\frac{112}{113}; 1\right) \cap \left(0; \frac{111}{112}\right]$; i) $(-5; 7) \cap (3; 8) \cap (-2; 6)$.

7) Efectuaţi: a) $(-2; 7) \cap \{-2; 7\}$; b) $(-3; 5) \cap \{-2; 6\}$; c) $(-3,1; 4,2) \cap \mathbf{N}^*$; d) $\left(-\frac{7}{3}; \frac{1}{5}\right) \cap \mathbf{Z}$; e) $\{-\sqrt{5}; \sqrt{2}) \cap \mathbf{R}$; f) $\left[0; 2\frac{1}{3}\right) \cap \mathbf{R}^*$.

8) Fie $a \in \mathbf{R}_+^*$. Efectuaţi: a) $(-a; a) \cap [0; a)$; b) $[-a-1; 1] \cap [0; a+1)$; c) $(-2a; 3a) \cap (2a; 5a)$; d) $\left(-\frac{2}{a}; 0\right) \cap \left[-\frac{3}{a}; 1\right]$; e) $(-a; a) \cap (-1, 1)$; f) $(-a, a) \cap [-a^2, a^2]$.

9) Aflaţi a şi b ştiind că: a) $[a; b] \cap (5; 7) = \left[6; \frac{13}{2}\right)$; b) $[a; 7) \cap (3; b] = [4; 6]$.

10) Efectuaţi: a) $(-3; 2) \cup [1; 3)$; b) $(-3; 2] \cap [1; 3)$; c) $(-2; 2) \cup (-3; 3)$; d) $(-2; 2) \cap (-3; 3)$; e) $(-7; 2) \cup [2; 7)$; f) $(-7; 2) \cap [2; 7)$; g) $(-3; -1) \cup \{-1\} \cup (-1; 2)$; h) $(-3; -1) \cup \{-1\} \cap [-1; 2]$.

11) Ordonaţi crescător numerele a, b, c, d în următoarele situaţii: i) $(a; b] \cap (c; d] = (c; d]$; ii) $(a; b] \cap (c; d] = (a; d]$; iii) $[a; b) \cap (c; d] = (c; b)$.

12) Precizaţi care din următoarele mulţimi pot fi scrise: 1) ca intervale; 2) ca reuniuni de intervale.

a) $[-2; 8] - \{8\}$; b) $[-2; 6] - \{-2; 6; 7\}$; c) $[-3; 4] - (2; 5)$; d) $(-4; 6] - (3; 6)$; e) $(-5; 6] - [6; 7]$; f) $[3; 8) - (4; 5)$; g) $(1; 2) - \left[0; \frac{1}{5}\right)$; h) $[-2; 4) - (-3; -2]$.

13) Se pot scrie ca reuniuni de intervale mulţimile următoare:
a) $\{x \mid x \in \mathbf{R}$ şi $|x| \geqslant 3\}$; b) $\{x \mid x \in \mathbf{R}$ şi $|x-1| \geqslant 2\}$; c) $\{x \mid x \in \mathbf{R}$ şi $|x| > 5\}$; d) $\{x \mid x \in \mathbf{R}$ şi $|x+1| > 4\}$; e) $\{x \mid x \in \mathbf{R}$ şi $|x| < 1\}$; f) $\{x \mid x \in \mathbf{R}$ şi $|x| \leqslant 3\}$; g) $\{x \mid x \in \mathbf{R}$ şi $|x| \leqslant 1,3\}$; h) $\{x \mid x \in \mathbf{R}$ şi $|x| < \pi\}$; i) $\{x \mid x \in \mathbf{R}$ şi $|x| < 0\}$; j) $\{x \mid x \in \mathbf{R}$ şi $|x| \leqslant 0\}$; k) $\{x \mid x \in \mathbf{R}$ şi $|x| < -2\}$; l) $\{x \mid x \in \mathbf{R}$ şi $|x| \leqslant -3\}$?

LUCRĂRI DE VERIFICARE

LUCRAREA I

1) Stabiliţi care din următoarele relaţii sînt adevărate:
a) $3 \in \mathbf{N}$; b) $\frac{1}{2} \in \mathbf{Q}$; c) $\frac{2}{1} \notin \mathbf{Z}$; d) $-\sqrt{3} \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$; e) $\frac{0}{3} \in \mathbf{N}^*$; f) $\frac{0}{-5} \in \mathbf{N}$; g) $-1 \in \mathbf{Z}^*$; h) $\frac{\sqrt{2}}{3} \in \mathbf{R}$.

2) Efectuați: a) $A \cup B$; b) $A \cap B$; c) $B - A$; d) $C - A$; e) $C - B$ unde $A = \{-3; -2; 0\}$; $B = \{0\}$; $C = \{0; 1; 3\}$.

3) Reprezentați pe axă punctele ale căror abscise sînt elementele mulțimii $M = \left\{-3; -2; 0{,}1; \frac{3}{2}; \sqrt{9}\right\}$.

4) Efectuați: a) $\frac{2}{3} + \frac{3}{2}$; b) $-\frac{2}{5} + \frac{5}{4}$; c) $\frac{1}{24} - \frac{5}{2}$; d) $-\frac{3}{21} \cdot \left(\frac{14}{-9}\right)$; e) $\frac{\sqrt{3}}{5} \cdot \frac{-5^2}{\sqrt{21}}$; f) $\frac{\sqrt{15}}{-3^3} : \frac{\sqrt{7}}{3^4}$.

5) a) Scrieți crescător elementele mulțimii $N = \left\{-3; |-2|; |-3|; |0|; 1; \left|-\frac{8}{2}\right|\right\}$.

b) Calculați: 1) $|+2| + |-7|$; 2) $|-1| - |-8|$; 3) $|0| \cdot |+5|$; 4) $|-1| \cdot |-1|$; 5) $|-3| \cdot |-5|$; 6) $|6| \cdot 5 - |-3|$; 7) $|-5|^2$; 8) $-|-2|^3$.

LUCRAREA II

1) Stabiliți care din următoarele apartenențe sînt adevărate:

a) $\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{-1}\right) \in \mathbf{Z}$; b) $\left(\frac{-2}{1} + \frac{6}{3}\right) \in \mathbf{Z}^*$; c) $(5^3 \cdot 5^2 - 1) : 2^2 \in \mathbf{N}$; d) $\left(3 - \frac{1}{4} + \frac{5}{3}\right) \in \mathbf{Q}$; e) $(\sqrt{3} - 2\sqrt{3}) \cdot (-\sqrt{3}) \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$; f) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}\right) \cdot \sqrt{3} \in \mathbf{N}$; g) $(1 + \sqrt{3}) \cdot (1 - \sqrt{3}) \in \mathbf{Q}$; h) $(1 + \sqrt{3}) \cdot \sqrt{3} \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.

2) a) Reprezentați în sistemul de axe rectangulare xOy punctele: $O(0; 0)$; $B(1; 0)$; $C(1; 1)$; $D(0; 1)$; b) calculați lungimea segmentului OC; c) Reprezentați pe dreapta OB punctele care au abscisele egale cu: $-\sqrt{3}$; $+\sqrt{3}$; $-\sqrt{2}$; $+2$.

3) Scrieți crescător elementele mulțimii: $T = \{|-\sqrt{2}|; |\sqrt{2} - 1|; |1 - \sqrt{2}|; |-1 - \sqrt{2}|; |\sqrt{3} - \sqrt{2}|; |\sqrt{2} - \sqrt{3}|; |-\sqrt{3}|\}$.

4) Calculați $a \in \mathbf{R}$ din egalitățile: a) $a \cdot |\sqrt{3} - 2| = +2 - \sqrt{3}$; b) $a + |5 - \sqrt{7}| = |\sqrt{7} - 5|$; c) $|a - \sqrt{2}| = \sqrt{2}$; d) $|a \cdot \sqrt{2} - \sqrt{3}| = \sqrt{2} - \sqrt{3}$.

LUCRAREA III

1) Stabiliți care dintre următoarele relații sînt adevărate: a) $-1 \in [-1; 3)$; b) $0 \in (-2; 4]$; c) $2 \in (1; 4]$; d) $-3 \in (-\infty; 1]$; e) $3 \in [0; +\infty)$; f) $[-1; 1] \subset (-2; 2)$; g) $(0; 3) \subset [0; 3]$; h) $[-1; 1) \subset (-1; 1]$; i) $(-2; +4) \subset (-\infty; 4)$; j) $[+3; +\infty) \supset (3, 4)$; k) $(-2; +\infty) \supset [-2; 0)$; l) $\{2\} \supset [2; 3)$; m) $\{-1\} \subset (-1; 0)$; n) $\{1; 2\} \subset [1; 2]$.

2) Efectuați:

$I_1 \cup I_2$; $I_1 \cap I_2$; $I_1 - I_2$; $I_2 - I_1$ unde a) $I_1 = (-2; 3)$ și $I_2 = [2; 4)$; b) $I_1 = (-3; 0)$ și $I_2 = [0; 1)$.

1) Scrieţi trei numere din intervalul (0; 1).

2) Fie $A = [-2; 3]$; $B = [1; 5)$. Scrieţi ca intervale mulţimile: a) $A \cup B$; b) $A \cap B$; c) $A - B$; d) $B - A$.

3) Aflaţi elementele mulţimii:

a) $[-2; 5) \cap \left\{-1{,}5;\ \sqrt{2};\ -\frac{5}{2};\ -\pi\right\}$; b) $(-1; 4] \cap \mathbf{Z}^*$; c) $[-5; 1] \setminus \mathbf{Z}^*$; d) $(-6; 1) \setminus \mathbf{N}^*$.

4) Fie $0 \in (a; +\infty)$. a) Justificaţi dacă $a^2 \in (a; +\infty)$; b) în ce condiţii $-a \in (a^2; +\infty)$; c) în ce condiţii $a^3 \in (-\infty; a)$.

3. ECUAŢIA DE GRADUL I CU O NECUNOSCUTĂ. ECUAŢII REDUCTIBILE LA ECUAŢII DE GRADUL ÎNTÎI CU O NECUNOSCUTĂ. PROBLEME CARE SE REZOLVĂ CU AJUTORUL ECUAŢIILOR DE GRADUL ÎNTÎI CU O NECUNOSCUTĂ

Să ne amintim că o ecuaţie este o propoziţie cu variabilă *(propoziţiile cu variabilă* se mai numesc *predicate)* în care apare, o singură dată, semnul „=".

De exemplu, să considerăm propoziţiile cu variabilă (predicatele):

1) Elevul cu numele x este în clasa a VIII-a A, $x \in$ {Ionescu, Popescu, Constantinescu};

2) $2x - 5 = 2$, $x \in \{0, 1, 2, 3\}$;

3) Litera x este în alfabetul latin, $x \in \{a, b, p, x\}$;

4) $2x + y = 7$, $x, y \in \mathbf{N}$;

5) $\dfrac{2x + 3}{3x^2 + 1} = 2$, $x \in \mathbf{R}$;

6) $4x - 1 = 1 = x + 2$, $x \in \{1, 2\}$.

Prima, a treia şi a şasea nu sînt ecuaţii. A doua şi a cincea sînt ecuaţii cu o necunoscută, iar a patra este o ecuaţie cu două necunoscute.

Mulţimea în care ia valori necunoscuta se precizează în dreptul ecuaţiei; în cazul în care nu este scrisă, vom considera că este mulţimea numerelor reale.

O ecuaţie cu o necunoscută are forma generală:

$$S(x) = D(x), \quad x \in M;$$

necunoscuta x apare efectiv în enunţul ecuaţiei, în membrul stîng S sau în membrul drept D.

Necunoscuta poate fi înlocuită (sau substituită), în enunţul ecuaţiei, cu orice element din mulţimea M; ca rezultat enunţul poate exprima sau

nu un adevăr. Acele elemente ale lui M care înlocuite în enunț, în locul necunoscutei, fac ca enunțul să exprime un adevăr, vor fi numite *soluții ale ecuației*. Rezolvarea unei ecuații înseamnă aflarea (determinarea) tuturor soluțiilor sale.

De exemplu, prin înlocuire directă, constatăm că ecuația

$$2x - 5 = 2, \quad x \in \{0, 1, 2, 3\}$$

nu are nici o soluție, în mulțimea $\{0; 1; 2; 3\}$. Aceeași ecuație $2x - 5 = 2$, $x \in \mathbf{R}$ are o singură soluție în $\mathbf{R}$ și anume $x = 3{,}5$.

Despre ecuația:

$$-3 \cdot x + 4 = -2 \cdot (x - 1) - x + 2, \quad x \in \mathbf{R};$$

vom spune că are „mai mult de două soluții" în $\mathbf{R}$, deoarece după efectuarea tuturor calculelor obținem $0 = 0$, oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$. Să ne amintim că o astfel de ecuație se mai numește și *„identitate"* (sau o *ecuație nedeterminată*). Prin urmare „mulțimea de soluții este $\mathbf{R}$, adică $S = \mathbf{R}$".

În schimb, oricare ar fi mulțimea în care ia valori necunoscuta x, propoziția

$$3 \cdot (x + 1) = 3 \cdot x - 2$$

ne conduce, după efectuarea calculelor, la egalitatea $3 = -2$ evident absurdă. Despre o astfel de ecuație obișnuim să spunem că *nu are soluție în nici o mulțime* (sau că este o *ecuație imposibilă*).

În următorul exercițiu ni se cere să rezolvăm ecuația:

$$3x - 1 = x + 6, \tag{1}$$

în mulțimile: a) $\mathbf{N}$; b) $\mathbf{Z}$; c) $\mathbf{Q}^*$; d) $\mathbf{Q}$; e) $\mathbf{R}$.

Separînd termenii cunoscuți de termenii liberi obținem ecuația echivalentă: $2x = 7$ (2) și apoi $x = \frac{7}{2}$ (3).

Deoarece $\frac{7}{2} \notin \mathbf{N}$ și $\frac{7}{2} \notin \mathbf{Z}$ spunem: în mulțimile $\mathbf{N}$ sau $\mathbf{Z}$ ecuația (1) nu are soluție. În schimb, deoarece $\frac{7}{2} \in \mathbf{Q}^* \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ putem spune: ecuația (1) se poate rezolva (are soluție) în oricare dintre mulțimile $\mathbf{Q}^*$, $\mathbf{Q}$ sau $\mathbf{R}$, soluția fiind numărul $\frac{7}{2}$.

Să ne amintim că *două ecuații sînt numite echivalente dacă au aceeași mulțime de soluții.*

În rezolvarea ecuațiilor se folosesc următoarele două proprietăți ale egalității (valabile pentru numere reale):

Proprietatea 1. Adunînd la (sau scăzînd din) ambii membri ai unei ecuații același număr real, obținem o altă ecuație, echivalentă cu prima.

Conform acestei proprietăți, putem trece termenii dintr-un membru într-altul, schimbîndu-le semnul.

Proprietatea 2. Înmulțind (sau împărțind) ambii membri ai unei ecuații cu același număr real, diferit de 0, obținem o altă ecuație, echivalentă cu prima.

De exemplu, să rezolvăm ecuația: $3x - 1 = 9$, $x \in \mathbf{R}$.

Adunînd la ambii membri numărul 1, obținem ecuația $3x = 9 + 1$, $x \in \mathbf{R}$, echivalentă cu prima. Împărțim acum ambii membri cu 3: obținem ecuația $x = \frac{10}{3}$, $x \in \mathbf{R}$, care este echivalentă cu prima. Această ultimă ecuație are evident o singură soluție, numărul $\frac{10}{3}$. Deci și ecuația $3x - 1 = 9$, $x \in \mathbf{R}$ are o singură soluție, numărul $\frac{10}{3}$.

O ecuație de forma

$$ax + b = 0, \quad x \in \mathbf{R}$$

în care $a \neq 0$, a și b sînt numere reale, este numită *ecuație de gradul I cu o necunoscută*. Am învățat în clasa a VII-a că orice ecuație de gradul I cu o necunoscută are o singură soluție, numărul $-\frac{b}{a}$.

EXERCIȚII REZOLVATE

Exercițiul 1. Să se rezolve ecuația

(1) $a \cdot x = 5$ în care necunoscuta este x, unde a este un număr real, oarecare, numit *parametru* ($a \in \mathbf{R}$).

Distingem două cazuri:

1. $a \neq 0$. Conform proprietății 2, împărțim ambii membri ai ecuației (1) prin a. Ecuația (1) devine:

(2) $x = \frac{5}{a}$. Ecuația echivalentă (2) are aceeași soluție, $\frac{5}{a}$, ca și ecuația (1).

2. $a = 0$. Atunci ecuația (1) devine:

$0 \cdot x = 5$ adică $0 = 5$, evident un rezultat absurd. În acest caz spunem că ecuația (1) este „*ecuație imposibilă*".

În rezumat: pentru $a \in \mathbf{R} - \{0\}$, ecuația (1) are o singură soluție, $x = \frac{5}{a}$. Pentru $a = 0$ ecuația (1) este imposibilă.

Exercițiul 2. Rezolvați ecuația (1) $a \cdot x = 0$, în care a este un parametru real.

Apar următoarele cazuri:

1. $a \neq 0$. Împărțind ambii membri ai ecuației (1) prin a, obținem ecuația echivalentă

(2) $x = \frac{0}{a}$ adică $x = 0$, care reprezintă și soluția ecuației (1).

2. $a = 0$. Atunci (1) devine $0 \cdot x = 0$, egalitate adevărată oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$. Prin urmare *ecuația este „nedeterminată"*, are o infinitate de soluții, adică $S = \mathbf{R}$.

În concluzie:

Pentru $a \in \{\mathbf{R}\} - \{0\}$ ecuația (1) are o singură soluție, $x = 0$.

Pentru $a = 0$ ecuația (1) este o nedeterminare (identitate), ecuația are o infinitate de soluții, adică $S = \mathbf{R}$ (mulțimea de soluții este $\mathbf{R}$).

Exercițiul 3. Să rezolvăm ecuația $ax + 3 = 4x - 2a$, $x \in \mathbf{R}$, (1) în care a este un parametru real.

Trecem în membrul sting toți termenii în care apare necunoscuta, iar în membrul drept ceilalți termeni; ecuația este înlocuită cu ecuația echivalentă:

$$-4x + ax = -2a - 3, \quad x \in \mathbf{R} \qquad (2)$$

sau

$$(a - 4)x = -2a - 3, \quad x \in \mathbf{R} \qquad (3)$$

Distingem două cazuri:

1) $a \neq 4$. În acest caz împărțim ambii membri ai ecuației (3) cu numărul $a - 4$ (care este $\neq 0$); obținem astfel ecuația echivalentă

$$x = \frac{-2a - 3}{a - 4}, \quad x \in \mathbf{R} \qquad (4)$$

care are evident o singură soluție: numărul $\frac{-2a - 3}{a - 4}$.

2) $a = 4$. În acest caz ecuația se scrie:

$$0 \cdot x = -2 \cdot 4 - 3, \quad x \in \mathbf{R} \qquad (5)$$

adică $0 = -11$, rezultat absurd; această ecuație nu are nici o soluție. În rezumat, ecuația (1) are: 1) Pentru $a \in \mathbf{R} - \{4\}$ o singură soluție; $\frac{-2a - 3}{a - 4}$; 2) pentru $a = 4$ nu are nici o soluție.

Exercițiul 4. Fie de rezolvat ecuația: $m^2 x + 2 = 4 \cdot x + m$, $x \in \mathbf{R}$ (1) în care m este un parametru real. „Separînd" termenii care conțin necunoscuta x de termenii care nu conțin necunoscuta x (termenii liberi), obținem ecuația echivalentă:

$$m^2 x - 4 \cdot x = m - 2, \quad x \in \mathbf{R} \qquad (2)$$

sau

$$x \cdot (m - 2) \cdot (m + 2) = m - 2, \quad x \in \mathbf{R} \qquad (3)$$

Distingem următoarele cazuri:

1) $m \neq +2$. În acest caz putem împărți prin $m - 2$ cei doi membri ai ecuației (3); obținem ecuația echivalentă:

$$x \cdot (m + 2) = 1, \quad x \in \mathbf{R} \qquad (4)$$

Să observăm că ecuația (4) este de forma ecuației de la exercițiul precedent. Prin urmare apar următoarele alte două cazuri:

a) $m \neq -2$: obținem din (4) ecuația echivalentă

$$x = \frac{1}{m + 2}, \quad x \in \mathbf{R} \qquad (5)$$

și care are o singură soluție: numărul $\frac{1}{m + 2}$.

b) $m = -2$. Ecuația (4) devine

$$0 \cdot x = 1, \text{ adică } 0 = 1, \text{ absurd.}$$

În acest caz ecuația (1) nu are nici o soluție.

2) $m = 2$. În acest caz ecuația (3) devine

$$x \cdot 0 \cdot 4 = 0, \ x \in \mathbf{R} \ (6), \text{ adică } 0 = 0.$$

Spunem, în acest caz, că ecuația (1) este o „*nedeterminare*" și vom înțelege că ecuația (1) are o infinitate de soluții reale, (este o identitate), deci mulțimea de soluții este $S = \mathbf{R}$.

În rezumat, ecuația $m^2x + 2 = 4x + m$, $x \in \mathbf{R}$ are:

Pentru $m \in \mathbf{R} - \{-2; 2\}$ o singură soluție reală și anume numărul $\frac{1}{m+2}$;

pentru $m = -2$, nu are nici o soluție;

pentru $m = 2$; are o infinitate de soluții reale (este o nedeterminare), adică mulțimea de soluții este $\mathbf{R}$, $S = \mathbf{R}$.

EXERCIȚII

ECUAȚII DE GRADUL I CU O NECUNOSCUTĂ

1) Care dintre următoarele propoziții cu variabilă sînt ecuații de gradul I cu o necunoscută:

a) $5x + 1 = 2$; $x \in \mathbf{N}$; b) $x^2 - 2 = 0$; $x \in \mathbf{R}$; c) $3x - 1 = x + 2 = x$; $x \in \mathbf{Z}$; d) $x + y - 1 = x$; $x, y \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$; e) $\frac{x}{y} = \frac{y}{x} = z = x + y$; $x, y, z \in \mathbf{Q}$.

2) Aceleași întrebări pentru propozițiile:

a) $-x - 1 = 0$; $x \in \mathbf{N}$; b) $2x - 1 = x$; $x \in \mathbf{Z}$; c) $3(x + 1) = 5x - 2$; $x \in \mathbf{Q}$; d) $x = y = x + 1$; $x, y \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$; e) $-2(x - 3) = -4(2x - y)$; $x \in \mathbf{Q}$.

3) Verificați dacă 1 este soluție pentru ecuațiile:

a) $x - 4 = -3$; $x \in \mathbf{N}$; b) $3x - 2 = 0$; $x \in \mathbf{Z}$; c) $x^2 = 1$; $x \in \mathbf{R}$; d) $x - 1 = 0$; $x \in \mathbf{Q}$; e) $\frac{x}{3} = \frac{1}{3}$; $x \in \mathbf{N}^*$.

4) Verificați dacă 0 este soluție pentru ecuațiile: a) $x(x - 1) = 0$; $x \in \mathbf{R}$; b) $x + 1 = 1$; $x \in \mathbf{Q}$; c) $x^2 = 0$; $x \in \mathbf{R}^*$; d) $x(x - 3) = x$; $x \in \mathbf{Z}^*$.

5) Verificați dacă 2 este soluție pentru ecuațiile:

a) $\frac{x+1}{3} - \frac{x}{2} + 1 = \frac{5x - 6}{4}$; $x \in \mathbf{R}$; b) $(x - 5)^2 + (x + 6)(x - 6) = 2$; $(x+3)^2$; $x \in \mathbf{R}$.

6) Aceleași întrebări ca la exercițiul 5 pentru ecuațiile: a) $\frac{x+1}{3} - 1 = 0$; $x \in \mathbf{R}$; b) $x^2 - 1 = 1 - x$; $x \in \mathbf{N}$; c) $(x - 1)^2 = 1$; $x \in \mathbf{Q}$.

7) Verificați dacă numerele 1; $-\sqrt{3}$; $\frac{1}{\sqrt{2}}$ sînt, respectiv, soluțiile ecuațiilor a) $(x - 1) \cdot \sqrt{2} = (\sqrt{3} - 1) \cdot x + 1 - \sqrt{3}$; $x \in \mathbf{R}$; b) $5 \cdot (x + \sqrt{3}) + \frac{1}{2} = 0{,}5$; $x \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$; c) $(\sqrt{3} - 1) \cdot (\sqrt{3} + 1) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - x\right) \cdot (5^3 - 7^3) + 2$; $x \in \mathbf{R}$.

8) Verificați dacă ecuația $\frac{x+1}{2} + x = \frac{x+1}{6} + \frac{1}{3}$ are soluția din mulțimea: $\left\{-1;\ \frac{1}{2};\ 0;\ 2{,}5;\ \sqrt{2}\right\}$.

9) Aceleași întrebări ca la exercițiul 8, dacă mulțimea este: $\left\{-\frac{1}{2};\ 1\frac{1}{2};\ 3\right\}$.

10) Scrieți sub formă zecimală, soluțiile următoarelor ecuații: a) $\frac{2x}{3} - \frac{1}{5} = 0$; $x \in R$; b) $0{,}25x - 1{,}8 = 0$; $x \in R$; c) $9{,}45x - (0{,}945 + 9{,}45x) \cdot 0{,}945 = 0{,}945x - (9{,}45 - 0{,}945x) \cdot 9{,}45$; $x \in R$.

11) Rezolvați ecuațiile următoare în R:

a) $-\sqrt{2}x = \sqrt{2} - 2$; b) $2x = \sqrt{2}x$; c) $\frac{x+1}{4} = \frac{5}{2}$;

d) $\frac{2x-1}{6} = \frac{x}{5}$, e) $\frac{5x}{2} + \frac{9-x}{7} = \frac{5x-3}{7} - \frac{19}{6}(x-4)$; f) $8x - 6 = 5x - \frac{1}{2}(11x - 5)$;

g) $\frac{1}{2}(2x-1) + \frac{1}{4} \cdot (4x-2) + \frac{1}{8}(8x-1) + \frac{1}{8} = 2x$.

12) Aflați soluțiile pentru fiecare dintre ecuațiile următoare: a) $2x + 3 = -x + 4$; $x \in Q$; b) $3x - 2 = 5 \cdot (x-4)$; $x \in N$; c) $2\sqrt{2}x = 5 \cdot \sqrt{2}x - 3$; $x \in R$; d) $4x - 1 = x + 8 \cdot x$; $x \in N$.

13) Știind că $x \in R$, rezolvați ecuațiile:

a) $\frac{1}{9} \cdot \left\{\frac{1}{7} \cdot \left[\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot (x+2) + 4\right) + 6\right] + 8\right\} = 1$;

b) $\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot x - 1\right) - 1\right] - 1 = 0$.

14) Care dintre următoarele ecuații au cel puțin o soluție reală:

a) $x + 3 - \frac{2}{3} \cdot (x-1) = \frac{1}{3}(x+5) + 2$;

b) $4 \cdot x - 2 - (x-3) = \frac{3}{4} \cdot (2x-1) + \frac{1}{4} \cdot (6x+7)$;

c) $\frac{3}{4} \cdot x - \frac{5}{12} \cdot x = \frac{5}{9} \cdot x + 6 - \frac{2}{9} \cdot x$;

d) $\frac{3}{5} \cdot (3x-2) + \frac{1}{3}(x-1) = \frac{1}{5} \cdot (14 - x - 3) - \frac{1}{3} \cdot (2x+1)$;

e) $\sqrt{3} \cdot x + 3 = 5 \cdot \sqrt{3} \cdot (x-1)$.

15) Care dintre următoarele ecuații au cel mult o soluție reală:

a) $13 \cdot x - 7 = 2(x-1) + 3$;
b) $7 \cdot (x-3) = 6(x+1) + x$;
c) $-3x - 2 \cdot (x-4) = -6x$;
d) $3 \cdot (x+1) + 2 \cdot (x-2) = 5 \cdot (x+2) - 11$;
e) $(x+1) + (x+2) + (x+3) + (x+4) = 4 \cdot (x+2) + 2$.

16) Determinați parametrul real „a" astfel ca numărul -2 să fie soluție pentru fiecare din ecuațiile în x ($x \in R$):

a) $ax + 4 = 7 - a$; b) $\frac{3}{2} \cdot x + a = 5$; c) $3a - 2x = 3 \cdot (a + 1) + 1$; d) $3x + 5a = 3a + x - 5$.

17) Determinați $a \in \mathbf{R}$ astfel ca 6 să fie soluție a ecuației în x; $ax + 2 = 2x + a$. Pentru a determinați rezolvați ecuația dată.

18) Știind că ecuația $m \cdot x + n = 0$, $x \in \mathbf{R}$, admite două soluții diferite, determinați numerele reale m și n.

19) Sînt echivalente ecuațiile: $2x + \frac{1}{2} = 3x - 2 \cdot \left(x - \frac{1}{4}\right)$, $x \in \mathbf{R}$ și

$$3(x - 5) = 5 - 2x + 5 \cdot (x - 4);\ x \in \mathbf{Z}?$$

20) Considerăm următoarele propoziții:

a) $mx - 3 = 0$; b) $3x - m = x$; c) $m \cdot (m + 1) \cdot x - 1 = m$; d) $|m| \cdot x = m$; e) $|m| \cdot x + x = 1 + m$; f) $(m - 2) \cdot (m + 2) \cdot x + 4 = 2m$; g) $\sqrt{m^2} \cdot x - x = 1 - m$; h) $m^2 \cdot x = m \cdot (m + 1)$; i) $m(x + 1) = m \cdot x - 1$. Determinați pentru fiecare propoziție în parte valoarea numerică a parametrului real m astfel încît: 1) Propozițiile să reprezinte ecuații de gradul întîi cu necunoscuta x; 2) Ecuațiile cu necunoscuta x să aibă o singură soluție reală; 3) Ecuațiile cu necunoscuta x să aibă cel puțin o soluție reală; 4) Ecuațiile cu necunoscuta x să aibă cel mult o soluție reală.

21) Considerăm următoarele ecuații cu necunoscuta m ($m \in \mathbf{R}$): a) $m \cdot x - m - 1 = 0$; b) $mx = 2 - x$; c) $|m| \cdot x + x = m + 1$. Determinați valorile parametrului real x astfel încît ecuațiile de mai sus să aibă o singură soluție.

22) Aflați valoarea parametrului real „p" astfel ca ecuațiile: $2px + 5 = 5x + 2p$; $px + 2 = 3x + p$ ($x \in \mathbf{R}$) să fie echivalente cu ecuația $px + 5 = p(x + 2)$ ($x \in \mathbf{R}$).

23) Fie ecuațiile: a) $(m+1) \cdot x + a = x$; b) $a \cdot m - ax = mx - a \cdot m$; c) $1 - (x - m) \cdot a = (a - x) \cdot m$; d) $a \cdot (x - a) = m \cdot (x - m)$, unde $x \in \mathbf{R}$. Rezolvați-le, analizînd toate cazurile ce pot apărea (a și m sînt parametri reali).

24) Rezolvați următoarele ecuații reductibile la ecuații de gradul întîi cu o necunoscută.

i) $(x + 2) \cdot (x - 2) + 5 \cdot (3x - 1) = (x + 5) \cdot (x - 1) + 8x - 22$;

ii) $(x - 1) \cdot (x - 1) + (x + 3) \cdot (x - 3) = (x - 1) \cdot (x + 2) + (x + 3)^2$;

iii) $(x - 3) \cdot (x - 4) - 2 \cdot (3x - 2) = (x - 4)^2$;

iv) $12 - 2 \cdot (x - 1)^2 = 4 \cdot (x - 2) - (x - 3) \cdot (2x - 5)$;

v) $5 \cdot (x - 1)^2 - 2 \cdot (x + 3)^2 = 3 \cdot (x + 2)^2 - 7 \cdot (6x - 1)$;

vi) $5 \cdot x - (4x + 3)^2 = -3x \cdot (5x + 3) - x^2 + 20$.

25) Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuației de gradul întîi cu o necunoscută.

i) Suma a două numere naturale este egală cu 180. Care sînt cele două numere dacă unul dintre numere este mai mare de: a) două ori; b) trei ori c) patru ori; d) cinci ori; e) șase ori; f) n ori, decît celălalt număr.

ii) Diferența a două numere naturale este egală cu 180. Care sînt cele două numere dacă numărul cel mai mare este de: a) două ori; b) trei ori; c) patru ori; d) cinci ori; e) șase ori; f) n ori, mai mare decît celălalt număr.

iii) Suma a trei numere naturale consecutive este 42. Care sînt aceste numere.

iv) Suma a patru numere naturale consecutive este egală cu 30. Aflați cele patru numere.

v) Să se găsească două numere naturale consecutive, astfel ca suma lor să fie egală cu de trei ori numărul mai mare, mai puțin $\frac{5}{4}$ din numărul mai mic.

vi) Să se împartă numărul 140 în două părți, astfel că o parte mărită cu 10 să fie egală cu a cincea parte din cea de-a doua parte.

vii) Dacă scădem 8 dintr-un număr natural și înmulțim diferența cu 12, iar la produsul obținut adăugăm dublul numărului necunoscut, obținem 44. Care este numărul natural necunoscut.

viii) Dacă scădem dintr-un număr 3; 10 și 11, obținem trei diferențe care adunate dau numărul respectiv. Să se afle acest număr.

ix) Determinați un număr știind că adunînd o pătrime, o treime din acest număr și 12 se obține un număr de trei ori mai mare decît numărul căutat. Să se afle acest număr.

x) O sumă de bani este împărțită la trei persoane astfel: prima persoană ia cu două treimi mai puțin 600 lei; a doua persoană ia un sfert, iar a treia persoană ia jumătate mai puțin 4 000 lei. Care este suma de bani și cît primește fiecare persoană?

xi) Un ogar urmărește o vulpe, care are 60 sărituri înaintea lui. Peste cîte sărituri ogarul va ajunge vulpea, știind că, pe cînd ogarul face 6 sărituri, vulpea face 9, dar că 3 sărituri de-ale ogarului fac cît 7 de-ale vulpii.

xii) Într-un triunghi oarecare, al doilea unghi este egal cu $\frac{3}{4}$ din primul unghi, iar al treilea unghi este cu 15° mai mare decît primul unghi. Să se afle mărimea fiecărui unghi.

xiii) Perimetrul unui triunghi isoscel este egal cu 18 dm, iar una dintre laturile egale este cu 3 dm mai mică decît baza sa. Dintr-un punct care aparține bazei triunghiului se duc paralele la laturile egale ale triunghiului isoscel. Care este perimetrul paralelogramului astfel format?

xiv) Un trapez are baza mare de 5 m; baza mică de 3 m și înălțimea de 4 m. Se prelungesc laturile neparalele ale trapezului pînă se intersectează. Se cere să se calculeze înălțimile celor două triunghiuri astfel obținute.

VERIFICAREA CUNOȘTINȚELOR

A. 1) Verificați dacă -1 este soluție pentru ecuațiile: a) $\frac{x+1}{3} - \frac{x}{2} = 0{,}5$; $x \in \mathbf{R}$; b) $-3 \cdot (x-4) + \frac{1}{2} = 0{,}5\,x - \frac{3}{2}x$; $x \in \mathbf{R}$.

2) Rezolvați: a) $5x - 7 = 8$; $x \in \mathbf{R}$; b) $3 \cdot (x+1) = -4x$; $x \in \mathbf{Q}$; c) $5x - 7 = 8$; $x \in \mathbf{Z}$; d) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 1$; $x \in \mathbf{Q}^*$; e) $\frac{3x}{2} - \frac{5x}{3} = 0$; $x \in \mathbf{N}$; f) $2 \cdot (x+1) = 3(x-1) - x$; $x \in \mathbf{R}$.

3) Determinați $a \in \mathbf{R}$ astfel încît ecuația $2a \cdot x + 3 = x + a$, $x \in \mathbf{R}$ să aibă soluția $x = -2$.

4) Rezolvați ecuația cu necunoscuta $x \in \mathbf{R}$, $mx + 3 = x + m$, unde m este un parametru real.

B. 1) Verificați dacă 9 este soluție pentru ecuațiile:

a) $\frac{25}{3} - x + \frac{x-3}{4} = \frac{x-3}{4} = \frac{1}{18} \cdot x + \frac{2x-9}{27}$;

b) $(2x+3)(x-5) + 13{,}5 = (2x-5) \cdot (x-1{,}5)$.

2) Rezolvați ecuațiile: a) $2 \cdot \{2 \cdot [2 \cdot (2x-2) - 2] - 2\} = 15 \cdot x$; $x \in \mathbf{R}$.

b) $(13x+3)^2 - (5x+1)^2 = (12x-3)^2$; $x \in \mathbf{N}$.

3) Rezolvați ecuația $m^2 \cdot (x-2) - 3m = x + 1$, unde m este un parametru real.

4) Care sînt măsurile unghiurilor triunghiului ABC dacă măsura lui A este $\frac{4}{9}$ din măsura lui B și măsura lui C este $\frac{2}{3}$ din suma măsurilor unghiurilor A și B.

4. INECUAȚII

4.1. INECUAȚIA DE GRADUL I CU O NECUNOSCUTĂ

Să ne amintim că o propoziție cu variabilă de tipul $x + 3 > 2 - x$ (1) sau $2x - 1 < x - 3$ (2) sau $3(x - 1) \geqslant 5x - 4$ (3) este o *„inecuație"*. Litera x se numește, ca și la ecuație, *necunoscută*.

Dînd literei x diverse valori (numerice), obținem fie propoziții false, fie propoziții adevărate.

De exemplu, în inecuația (1) dînd lui x valoarea 0, obținem $3 > 2$ și deci propoziția este adevărată. Numărul zero este o soluție a inecuației (1). Pentru $x = -2$, inecuația (1) devine $1 > 4$ adică o propoziție falsă. Numărul -2 nu este o soluție a inecuației (1). Pentru $x = 3$ sau $x = 4$, inecuația (1) se verifică și prin urmare 0, 3 sau 4 sînt soluții ale inecuației (1).

A rezolva o inecuație înseamnă a afla „toate" soluțiile sale. În general se spune că *două inecuații sînt „echivalente" dacă au aceeași mulțime de soluții.*

Următoarele proprietăți ale inegalităților (între numere) sînt valabile și în cazul inecuațiilor:

1) dacă $a < b$ atunci $a + c < b + c$ și $a - c < b - c$;
2) dacă $a < b$ și $c > 0$, atunci $a \cdot c < b \cdot c$ și $a : c < b : c$;
3) dacă $a < b$ și $c < 0$ atunci $a \cdot c > b \cdot c$ și $a : c > b : c$;
4) În loc de $b < a$ se poate scrie și $a > b$.

Observații. 1) Aceleași proprietăți sînt valabile și dacă înlocuim semnul $<$ (mai mic) cu semnul $>$ (mai mare).

2) În rezolvarea unei inecuații, folosind convenabil unele din aceste proprietăți, obținem „inecuații" echivalente cu cea inițială.

Exemplu: Să se rezolve în $\mathbf{R}$ inecuația $3x - 1 \geqslant 2 \cdot (x + 3)$ (1). Efectuînd înmulțirea din membrul drept al inecuației (1) obținem:

$3x - 1 \geqslant 2x + 6$ (2) sau separînd termenii care conțin necunoscuta de termenii cunoscuți obținem $3x - 2x \geqslant 6 + 1$ (3) sau încă:

$x \geqslant 7$ (4). Deoarece $x \in \mathbf{R}$, rezultă că mulțimea de soluții a inecuației (1) este un interval de numere reale și anume: $x \in [7; +\infty)$.

Observație. Inecuațiile (1), (2), (3), (4) sînt inecuații echivalente, avînd drept mulțime de soluții intervalul $[7; +\infty)$.

4.2. SISTEME DE INECUAȚII

Să presupunem că avem de rezolvat „simultan" două sau mai multe inecuații de gradul I cu o necunoscută. Prin aceasta vom înțelege să găsim toate mulțimile de soluții (intervale) care să „verifice" deodată (simultan) toate inecuațiile date. Avînd în vedere că fiecare inecuație are drept mulțime de soluții un interval, rezultă că „mulțimea soluțiilor" tuturor inecuațiilor date va fi intersecția mulțimilor de soluții ale inecuațiilor date.

Exemple: i) Să se rezolve sistemul:

(1) $\begin{cases} x + 3 \leqslant 2x + 4 \\ 2(x - 1) \leqslant 5x - 1 \end{cases}$. După efectuarea calculelor și separarea termenilor care conțin necunoscuta de termenii „liberi" obținem sistemul echivalent

(2) $\begin{cases} x - 2x \leqslant 4 - 3 \\ 2x - 5x \leqslant 2 - 1 \end{cases}$ sau încă (3) $\begin{cases} -x \leqslant 1 \\ -3x \leqslant 1 \end{cases}$ și conform unei proprietăți relative la inegalități înmulțind cele două inecuații cu (-1) obținem sistemul echivalent (4) $\begin{cases} x \geqslant -1 \\ x \geqslant -\frac{1}{3} \end{cases}$ adică (5) $\begin{cases} x \in [-1; +\infty) \\ x \in \left[-\frac{1}{3}; +\infty\right) \end{cases}$. Prin urmare soluția sistemului va fi $S = [-1; +\infty) \cap \left[-\frac{1}{3}; +\infty\right) = \left[-\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

ii) Să se rezolve sistemul de inecuații:

(1) $\begin{cases} 2(x - 1) \geqslant 3(x + 2) \\ x + 5 \leqslant 2x - 3. \end{cases}$

Efectuînd calculele și separînd termenii cunoscuți de cei necunoscuți, obținem:

(2) $\begin{cases} 2x - 3x \geqslant 2 + 6 \\ x - 2x \leqslant -3 - 5 \end{cases}$ adică (3) $\begin{cases} -x \geqslant 8 \\ -x \leqslant -8 \end{cases}$ sau

(4) $\begin{cases} x \leqslant -8 \\ x \geqslant 8 \end{cases}$ deci (5) $\begin{cases} x \in (-\infty; -8] \\ x \in [8; +\infty) \end{cases}$

Prin urmare,

$$S = (-\infty; -8] \cap [8; +\infty) = \emptyset.$$

Observație. Dacă sistemul conține, de exemplu, trei inecuații, mulțimea soluțiilor sistemului va fi intersecția mulțimilor soluțiilor (intervalelor) celor trei inecuații.

4.3. INECUAȚII DE TIPUL $(ax + b) \cdot (cx + d) \geqslant 0$ (SAU $\leqslant 0$)

De exemplu, avem de rezolvat inecuația:

(1) $(2x - 1) \cdot (-x + 3) \geqslant 0$.

Deoarece trebuie să fie găsite „numerele" $x \in \mathbf{R}$, astfel încît produsul „numerelor" $2x - 1$ și $-x + 3$ să fie pozitiv sau egal cu zero, formăm următoarele două sisteme de inecuații:

$$\text{I} \begin{cases} 2x - 1 \geqslant 0 \\ -x + 3 \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \text{II} \begin{cases} 2x - 1 \leqslant 0 \\ -x + 3 \leqslant 0. \end{cases}$$

Mulțimea soluțiilor inecuației (1) va fi reuniunea mulțimilor soluțiilor (intervalelor) celor două sisteme I și II. Rezolvînd cele două sisteme de inecuații obținem:

$$\text{I} \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x \leq 3 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \text{II} \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ x \geq 3 \end{cases}; \text{ adică}$$

$$\text{I} \begin{cases} x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right) \\ x \in (-\infty; 3] \end{cases} \quad \text{sau} \quad \text{II} \begin{cases} x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \\ x \in [3; +\infty) \end{cases} \text{ și deci}$$

$$\text{I: } S_1 = (-\infty; 3] \cap \left[\frac{1}{2}; +\infty\right) = \left[\frac{1}{2}; 3\right] \text{ sau}$$

$$\text{II: } S_2 = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cap [3; +\infty) = \emptyset.$$

Atunci mulțimea soluțiilor inecuației (1) va fi

$$S = S_1 \cup S_2 = \emptyset \cup \left[\frac{1}{2}; 3\right] = \left[\frac{1}{2}; 3\right]$$

Alt exemplu: să se afle $x \in \mathbf{R}$ astfel încît (1) $(x + 1) \cdot (3 - x) \leq 0$.

Deoarece produsul „numerelor" $(x + 1)$ și $(3 - x)$ este negativ sau cel mult egal cu zero, formăm sistemele astfel:

$$\text{I} \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ 3 - x \leq 0 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \text{II} \begin{cases} x + 1 \leq 0 \\ 3 - x \geq 0 \end{cases} \quad \text{deci}$$

$$\text{I} \begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq 3 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \text{II} \begin{cases} x \leq -1 \\ x \leq 3 \end{cases} \quad \text{adică}$$

$$\text{I} \begin{cases} x \in [-1; \infty) \\ x \in [3; \infty) \end{cases} \quad \text{sau} \quad \text{II} \begin{cases} x \in (-\infty; -1] \\ x \in (-\infty; 3] \end{cases} \quad \text{și}$$

deci $S_1 = [-1; \infty) \cap [3; \infty) = [3; \infty)$ sau

$S_2 = (-\infty; -1] \cap [-\infty; 3] = (-\infty; -1]$.

Atunci $S = S_1 \cup S_2 = (-\infty; -1] \cup [3; \infty) = \mathbf{R} \setminus (-1; 3)$.

4.4. INECUAȚII DE TIPUL $\frac{ax + b}{cx + d} \geq 0$ (SAU ≤ 0)

De exemplu, avem de „rezolvat" inecuația:

$$\frac{1 - 3x}{x + 2} \geq 0.$$

Deoarece trebuie determinate numerele $x \in \mathbf{R}$ astfel încît raportul „numerelor" $1 - 3x$ și $x + 2$ să fie pozitiv sau zero, formăm sistemele de inecuații

$$\text{I} \begin{cases} 1 - 3x \geq 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \text{II} \begin{cases} 1 - 3x \leq 0 \\ x + 2 < 0. \end{cases}$$

Observați că numărul $x + 2$ trebuie să fie *diferit* de zero, deoarece împărțirea prin *zero nu are sens*. Deci:

$$\text{I} \begin{cases} x \leqslant \dfrac{1}{3} \\ x > -2 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \text{II} \begin{cases} x \geqslant \dfrac{1}{3} \\ x < -2 \end{cases}, \text{ adică}$$

$$\text{I} \begin{cases} x \in \left(-\infty;\ \dfrac{1}{3}\right] \\ x \in (-2;\ \infty) \end{cases} \quad \text{sau} \quad \text{II} \begin{cases} x \in \left[\dfrac{1}{3};\ \infty\right) \\ x \in (-\infty;\ -2) \end{cases}. \text{ Atunci}$$

$$S_1 = \left(-\infty;\ \frac{1}{3}\right] \cap (-2;\ \infty) = \left(-2;\ \frac{1}{3}\right] \text{ sau}$$

$$S_2 = (-\infty;\ -2) \cap \left[\frac{1}{3};\ \infty\right) = \emptyset.$$

Deci $S = S_1 \cup S_2 = \left(-2;\ \dfrac{1}{3}\right] \cup \emptyset = \left(-2;\ \dfrac{1}{3}\right]$.

Alt exemplu

$\dfrac{-2+x}{-x-3} \leqslant 0$. Rezultă sistemele de inecuații:

$$\text{I} \begin{cases} -2 + x \geqslant 0 \\ -x - 3 < 0 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \text{II} \begin{cases} -2 + x \leqslant 0 \\ -x - 3 > 0 \end{cases} \quad \text{adică}$$

$$\text{I} \begin{cases} x \geqslant 2 \\ x > -3 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \text{II} \begin{cases} x \leqslant 2 \\ x < -3. \end{cases}$$

Prin urmare: $\text{I} \begin{cases} x \in [2;\ \infty) \\ x \in (-3;\ \infty) \end{cases}$ sau $\text{II} \begin{cases} x \in (-\infty;\ 2] \\ x \in (-\infty;\ -3) \end{cases}$. Deci

$S_1 = (-3;\ \infty) \cap [2;\ \infty) = [2;\ \infty)$ sau $S_2 = (-\infty;\ -3) \cap (-\infty;\ 2] = (-\infty;\ -3)$.
Urmează că $S = S_1 \cup S_2 = (-\infty;\ -3) \cup [2;\ +\infty) = \mathbf{R} - [-3;\ 2)$.

EXERCIȚII

INEGALITĂȚI (Recapitulare)

Să se demonstreze următoarele inegalități:

1) $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$ oricare ar fi $a,\ b \in \mathbf{R}$;
2) $(a+b)^2 < 2(a^2 + b^2)$ oricare ar fi $a,\ b \in \mathbf{R}$;
3) $(a-b)^2 < 2(a^2 + b^2)$ oricare ar fi $a,\ b \in \mathbf{R}$;
4) $\dfrac{x^2 + y^2}{2} \geqslant \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2$ oricare ar fi $x,\ y \in \mathbf{R}$;
5) $\dfrac{x^2 + y^2}{2} \geqslant \left(\dfrac{x-y}{2}\right)^2$ oricare ar fi $x,\ y \in \mathbf{R}$;
6) $\dfrac{2a}{1+a^2} - 1 \leqslant 0$ oricare ar fi $a \in \mathbf{R}$;
7) $a + \dfrac{1}{a} - 2 \geqslant 0;\ a > 0$.

8) $\frac{a+b}{2b} \geqslant \frac{2a}{a+b}$, $a, b > 0$.

9) $1 + \frac{(a-b)^2}{4ab} > 0$; $a, b > 0$.

10) $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \geqslant 0$, $a, b, c \in R$. Cînd are loc egalitatea?

11) Arătați că media aritmetică a două numere date este mai mare decît media lor geometrică, iar diferența lor, este mai mică decît pătratul diferenței celor două numere, împărțite cu de opt ori numărul cel mai mic.

12) Dacă trei numere reale pozitive a, b, c sînt astfel încît unul din ele este mai mic decît suma celorlalte două, avem:

$$a^2 + b^2 + c^2 - 2 \cdot (ab + bc + ca) < 0.$$

13) Dacă $ab + bc + ca = 1$, atunci $a^2 + b^2 + c^2 > 0$. Indicație: $(a - 2b)^2 \geqslant 0$; $(b - 2c)^2 > 0$; $(c - 2a)^2 > 0$.

14) Dacă $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1$ și $a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 1$ atunci

$$(a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2)^2 < 1.$$

(indicație: verificați că $(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) \cdot (a_2^2 + b_2^2 + c_2^2) - (a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2) > 0$; *inegalitatea lui Lagrange*).

INECUAȚII

1) Fie:

a) $A_1 = \left\{-\frac{1}{2};\ 0;\ 1;\ \sqrt{3}\right\}$ și $2x + 1 \geqslant 0$;

b) $A_2 = \{-5;\ -4;\ -3{,}1;\ \sqrt{-3}\}$ și $-x - 3 \geqslant 0$;

c) $A_3 = \left\{-7;\ -1;\ \frac{1}{5}\right\}$ și $5x - 1 \leqslant 0$;

d) $A_4 = \left\{0;\ \frac{1}{4};\ 1\right\}$ și $1 - 4x \leqslant 0$;

e) $A_5 = \{-1;\ 0;\ 2\}$ și $-2 \cdot (x - 1) > 0$;

f) $A_6 = \{0;\ 1;\ \sqrt{2}\}$ și $3 \cdot (1 - x) < 0$.

Verificați pentru fiecare exercițiu în parte dacă „toate" elementele mulțimilor date sînt soluții pentru inecuațiile specificate în dreptul lor.

2) Verificați, pentru fiecare exercițiu în parte, dacă numărul $a \in R$ este o soluție a inecuației respective:

a) $a > 0$ și $x + 1 > 0$
b) $a = 0$ și $-x + 2 \leqslant 0$
c) $a \geqslant 0$ și $-3x - 1 \leqslant 0$
d) $a < 0$ și $x - 5 \geqslant -1$
e) $a = 0$ și $3x - 4 \geqslant -4$
f) $a \leqslant 0$ și $5x - 1 < -3$.

Să se rezolve în R următoarele inecuații:

3) a) $x + 3 \geqslant 0$; b) $x - 3 \geqslant 0$; c) $-x + 1 \geqslant 0$; d) $-2x - 4 \geqslant 0$;
e) $3x + 1 \leqslant 0$; f) $2x - 2 \leqslant 0$; g) $4x + 5 \leqslant 0$; h) $-7x - 14 \leqslant 0$.
4) a) $2x - 5 > 0$; b) $-6x - 0{,}5 > 0$; c) $7x - 4 > 0$; d) $-10x - 3 > 0$;
e) $6x - 4 < 0$; f) $-8x - 3 < 0$; g) $13x - 1{,}5 < 0$; h) $-20x - 1{,}4 < 0$.
5) a) $1 - 5x \geqslant 0$; b) $-4 - 9x \geqslant 0$; c) $13 - 9x \leqslant 0$; d) $-25 - 50x \leqslant 0$.

6) a) $3x + 4 \geqslant 2$; b) $-8x + 9 \geqslant 3$; c) $-25x - 120 \geqslant 105$;
d) $8x + 17 \leqslant 20$; e) $-10x + 1 \leqslant 11$; f) $-35x - 5 \leqslant 30$.

7) a) $5x + 1 \geqslant 2x + 2$; b) $21x + 4 \geqslant 10x + 1$;
c) $14x + 5 \geqslant 20x + 15$; d) $17x - 1 \geqslant 20x + 1$; e) $x + 3 \geqslant 5x - 1$; f) $4x - 3 \geqslant 7x - 9$;
g) $4x - 1 < x + 3$; h) $3x + 3 < x + 8$; i) $5x + 4 < 6x - 16$; j) $10x - 1 < 12x - 2$.

8) a) $\frac{x+1}{2} - \frac{x}{5} \geqslant 2$; b) $\frac{3x-1}{3} + \frac{x-1}{6} \leqslant 0$; c) $\frac{1-3x}{4} + \frac{x}{8} \geqslant -1$;
d) $\frac{1+x}{5} - \frac{2+x}{2} \leqslant 0$; e) $\frac{4x-1}{4} - \frac{x}{2} \leqslant 1$; f) $\frac{x}{2} + \frac{3x}{5} \geqslant -3$.

9) a) $\frac{3(x+1)}{4} \leqslant \frac{x}{3}$; b) $\frac{-2(x-1)}{5} \geqslant \frac{-3x}{2}$; c) $\frac{7(1-2x)}{3} \leqslant \frac{-x-1}{2}$;
d) $\frac{-3(x-4)}{2} \geqslant -4x$.

10) Să se determine valorile reale ale lui x pentru care expresiile de mai jos sînt nenegative:

a) x; b) $-x$; c) $x + 1$; d) $-x - 1$; e) $\frac{x-1}{2}$; f) $\frac{-x-1}{3}$.

11) Să se determine valorile reale ale lui x pentru care expresiile de mai jos nu sînt pozitive:

a) x; b) $-x$; c) $-x - 1$; d) $2x + 3$; e) $\frac{1-2x}{3}$; f) $\frac{-4+14x}{2}$.

12) Este adevărat că: a) $x - 5 > 0$ oricare ar fi $x > 5$; b) $4 - 3x < 0$ oricare ar fi $x > \frac{4}{3}$; c) $(x - 5)(3x - 4) > 0$ oricare ar fi $x > 5$. (Justificați).

13) Să se determine elementele mulțimilor:
$A = \{x \in N \mid 2x - 1 \geqslant 2\}$; $B = \{x \in N^* \mid 3x + 2 \geqslant 4\}$
$C = \{x \in N \mid x + 1 < 3\}$; $D = \{x \in N^* \mid x + 3 \leqslant 4\}$.
$E = \{x \in N \mid -3x + 1 \geqslant 5\}$.

14) Să se determine valorile lui $x \in Z$ cu proprietatea:
a) $-2 \leqslant x + 1 \leqslant 3$; b) $4 \leqslant 2x + 1 \leqslant 7$; c) $0 \leqslant -x + 2 < 5$; d) $0 \leqslant x + 4 < 1$.

15) Aflați elementele mulțimilor:
$A = \left\{y \in R \mid -3{,}5 < 2y - 5 < \frac{5}{2}\right\}$; $B = \left\{a \in R \mid -\frac{1}{2} \leqslant 3a + 1 \leqslant 0\right\}$;
$C = \{b \in R \mid -2 \leqslant 0{,}1 \cdot b + 1 < 3\}$; $D = \left\{x \in R \mid -1 \leqslant \frac{x+1}{2} \leqslant 0\right\}$.

16) Să se determine mulțimile:
$A = \{x \in Z \mid |x + 1| \leqslant 7\}$; $B = \{x \in R \mid |x - 1| < 2\}$;
$C = \{x \in Q \mid |3x - 1| \leqslant 0\}$; $D = \{x \in N \mid |x + 1| < 1\}$;
$E = \left\{x \in R \mid \left|\frac{x}{2} - 3{,}5\right| < -2{,}7\right\}$; $F = \{x \in R \mid |x - \sqrt{2}| < 0{,}1\}$;
$G = \{x \in R \mid |x - \sqrt{2}| < 0{,}01\}$.

17) Să se determine mulțimea valorilor reale ale parametrului a, pentru care soluțiile ecuației în x:

$2 \cdot ax = x - 2$ sînt pozitive.

18) Să se determine mulțimea valorilor reale ale parametrului a, pentru care soluțiile ecuației în x:

$-3 \cdot ax = 3 - x$ sînt negative.

19) Să se determine $x \in \mathbf{R}$ care verifică simultan inecuațiile:

a) $x - 2 \leq 3$ și $x + 1 \geq -2$; b) $2x - 3 < 5x + 1$ și $4x > \frac{5}{2}x - 1$;

c) $3x - 1 \geq x + \frac{1}{2}$ și $3x - 4 \leq 0$; d) $1{,}4 \cdot x - 2 > 0$ și $\sqrt{2}\,x \leq 2$.

20) Să se rezolve următoarele sisteme de inecuații:

a) $\begin{cases} x + 5 > 14 - 3x \\ 6 - 7x \geq -3x - 5 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x + 5 \geq 6x - 11 \\ 3 - x < 3x - 1 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 3x - 10 < 2x - 11 \\ x + 14 \leq 15 + 2x \end{cases}$;

d) $\begin{cases} 5x + 3 \leq 4x \\ 3 \cdot (x - 4) \geq 2x - 5 \end{cases}$; e) $\begin{cases} 7x + 6 \geq 5x + 12 \\ 3x - 18 < 4 \cdot x - 20 \end{cases}$; f) $\begin{cases} 3x + 2 > x - 2 \\ x + 15 > 6 - 2x \\ x - 14 < 5 \cdot x + 14 \end{cases}$;

g) $\begin{cases} 3x - 1 > x - 6 \\ x + 2 > -3x + 4 \\ -x + 4 \geq 5x - 3 \end{cases}$.

21) Rezolvați sistemele de inecuații:

a) $\begin{cases} 9 + \frac{4 \cdot x - 11}{7} < \frac{x - 3}{5} \\ 1 - \frac{1 - x}{-1} \geq \frac{-x - 1}{-1} \end{cases}$; b) $\begin{cases} 8 \cdot (3x + 2) + 7x + 5 \cdot (12 - 3x) > 13x \\ 20 < \frac{2}{3} \cdot (7x - 10) - \frac{1}{2} \cdot (50 - x). \end{cases}$

22) Determinați elementele mulțimii:

$$X = \left\{ x \in \mathbf{Z} \mid x - 2 \leq \frac{2x - 3}{3} < x \right\}.$$

23) a) Să se determine $x \in \mathbf{R}$ astfel ca numerele $5 - x$; $2x + 3$ și $x + 9$ să reprezinte lungimile laturilor unui triunghi.

b) Poate fi triunghiul echilateral?

INECUAȚII DE TIPUL $(ax \pm b) \cdot (cx \pm d) \geq 0$ (sau ≤ 0) și $\frac{ax + b}{cx + d} \geq 0$ (sau ≤ 0)

1) Fie:

$A_1 = \{-2;\ 0;\ \sqrt{3}\}$ și $x^2 \geq 0$;

$A_2 = \{-2;\ -1;\ 0;\ \sqrt{2}\}$ și $x \cdot (x + 1) \geq 0$;

$A_3 = \{-3;\ 0;\ 1;\ 1{,}41\}$ și $-x \cdot (x - 1) \leq 0$;

$A_4 = \{-3;\ -2;\ -1;\ \sqrt{3}\}$ și $(-x + 1) \cdot (x + 2) \geq 0$;

$A_5 = \{0;\ -3;\ -4\}$ și $x^2 \cdot (-x - 3) > 0$;

$A_6 = \{-2;\ 1;\ 4\}$ și $\frac{2}{x + 1} > 0$;

$A_7 = \left\{-1;\ \frac{1}{2};\ 2;\ 3\right\}$ și $\frac{-3}{-x + 2} \geq 0$;

$A_8 = \{-1;\ 0;\ 1;\ \sqrt{2}\}$ și $\frac{x + 1}{x - 1} \geq 0$;

$A_9 = \{-3;\ -2;\ 0;\ \sqrt{3}\}$ și $\frac{-x - 2}{-x} \leq 0$;

$A_{10} = \left\{-\sqrt{3};\ -\frac{1}{3};\ 0;\ \sqrt{3}\right\}$ și $\frac{2x}{3x + 1} \leq 0$.

Verificați, pentru fiecare exercițiu în parte, dacă „toate" elementele mulțimilor date sînt soluții pentru inecuațiile specificate în dreptul lor.

2) Rezolvați în $\mathbf{R}$ inecuațiile: a) $x \cdot (x - 2) \geq 0$; b) $(x + 1) \cdot (3 - x) > 0$; c) $(x - 2) \cdot (x - 4) < 0$; d) $(2x - 1) \cdot (2 - 3x) \leq 0$; e) $-(4 + x) \cdot (2x + 3) \geq 0$.

3) Aflați $x \in \mathbf{R}$ astfel ca: a) $8x^2 - 4x \geq 0$; b) $4x^2 - 1 < 0$; c) $x^2 - 4x + 4 \leq 0$; d) $x^2 + 9 > 6x$; e) $25x^2 + 1 < 10x$.

4) Rezolvați în $\mathbf{R}$ inecuațiile: a) $\frac{1}{2 - x} > 0$; b) $-\frac{3}{x + 5} \geq 0$; c) $\frac{5}{2x - 1} < 0$; d) $\frac{-1}{x + 2} \leq 0$.

5) Rezolvați următoarele inecuații: a) $\frac{x}{x + 1} \geq 0$; b) $\frac{-x}{x + 1} > 0$; c) $\frac{x - 1}{-x} \leq 0$; d) $\frac{x - 1}{x} \leq 0$; e) $\frac{2x - 3}{3x + 1} \geq 0$; f) $\frac{x - 3}{2x - 1} > 0$; g) $\frac{1 - 3x}{3 + x} > 0$; h) $\frac{x^2}{x + 1} \leq 0$; i) $\frac{x + 2}{|x|} > 0$; j) $\frac{-x}{x^2} > 0$; k) $\frac{|x - 1|}{|x + 2|} < 0$; l) $\frac{|x|}{x^2} > 0$.

6) Pentru care valori ale parametrului $m \in \mathbf{R}$ soluția ecuației $m \cdot x - 2 = 2 \cdot m - 3 \cdot mx$ este negativă?

7) a) Să se arate că dacă $(2x + 1) \cdot (3x - 1) \leq 0$ atunci $(3x + 1) \cdot (2x - 1) \leq 0$;

b) Aflați o valoare $x \in \mathbf{R}$ astfel ca $(3x + 1) \cdot (2x - 1) \leq 0$ dar $(2x + 1) \cdot (3x - 1) > 0$.

VERIFICAREA CUNOȘTINȚELOR

I. 1) Rezolvați în $\mathbf{R}$ următoarele inecuații:

a) $x + 2 \geq 3x$; b) $\frac{x}{3} - \frac{x}{2} < 1$.

2) Rezolvați sistemele de inecuații:

a) $\begin{cases} 2x - 4 \geq 0 \\ 5 - x > 0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x - 1 < 2x + 5 \\ 3(x - 1) \leq x. \end{cases}$

3) Rezolvați următoarele inecuații:

a) $(x - 2) \cdot (x - 4) \geq 0$

b) $(1 - x) \cdot (3 - x) < 0$.

4) a) Pentru ce valori ale lui $x \in \mathbf{R}$ fracția $\frac{x + 1}{x + 3}$ este pozitivă sau egală cu zero.

b) Pentru ce valori ale lui $x \in \mathbf{R}$ fracția $\frac{1 - x}{3 + x}$ este negativă sau egală cu zero?

II. 1) Demonstrați inegalitatea: $abc > (a + b - c) \cdot (a - b + c) \cdot (-a + b + c)$, $a, b, c > 0$.

2) Să se găsească valorile lui x care satisfac inegalitățile simultane:

$3 - \frac{3 - 7x}{10} + \frac{x + 1}{2} > 4 - \frac{7 - 3x}{5}$ și $7 \cdot (3x - 6) + 4(17 - x) > 11 - 5 \cdot (x - 3)$.

3) Dacă a și b sînt două numere pozitive, $a > b$ și m un număr natural, verificați dacă dubla inegalitate $m \cdot b^{m-1} < \frac{a^m - b^m}{a - b} < m \cdot a^{m-1}$ *(inegalitatea lui Cauchy)* este adevărată, pentru $m = 2$.

4) Fie $f(x) = \frac{-x}{x + 3}$. Pentru ce valori $x \in \mathbf{R}$

a) $f(x) \geq 0$; b) $f(x) \leq 0$; c) $f(x)$ nu are sens.

5. SISTEME ALGEBRICE DE ECUAȚII DE GRADUL ÎNTÎI

Un *sistem de ecuații* este format din două sau mai multe ecuații, cu aceleași necunoscute. De exemplu

$$\begin{cases} x^2 + y = 2 \\ 1 + x = y - 1 \end{cases} \quad (x,\ y \in \mathbf{R})$$

este un sistem de ecuații cu două necunoscute. La fel,

$$\begin{cases} x - 5 = 0 \\ x^2 + y^2 = 3 \end{cases} \text{ și chiar } \begin{cases} x - 5 = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

sînt sisteme de două ecuații cu două necunoscute.

Să luăm sistemul de două ecuații cu două necunoscute

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3y = 3 \end{cases} \quad (x,\ y \in \mathbf{R})$$

Perechea (2; 1) este soluție a acestui sistem, deoarece înlocuind necunoscuta x cu 2, iar necunoscuta y cu 1, amîndouă propozițiile

$$2 \cdot 2 + 1 = 5$$

și

$$3 \cdot 1 = 3$$

sînt adevărate. Putem identifica perechea (2; 1) cu un punct din plan, anume cu punctul S ce are abscisa 2 și ordonata 1 (vezi figura I.11).

În general, soluțiile sistemelor de ecuații cu două necunoscute x și y sînt perechi de numere reale și pot fi identificate ca puncte din planul xOy.

Două sisteme de ecuații, ce au aceleași soluții, sînt numite echivalente.

Sistemele de două ecuații de gradul I cu două necunoscute x și y au forma:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases} \quad (x,\ y \in \mathbf{R})$$

Am învățat în clasa a VII-a mai multe metode de rezolvare a unor astfel de sisteme.

De exemplu, să rezolvăm sistemul $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ -4x + 7y = 2 \end{cases}$ prin metoda reducerii.

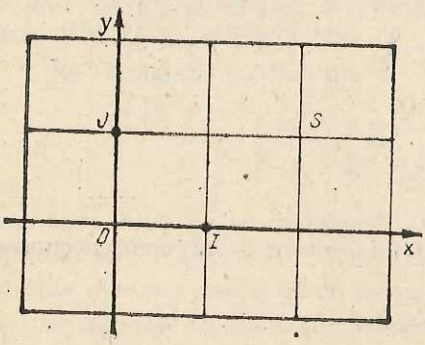


Fig. I.11

Înmulțim ambii membri ai primei ecuații cu 4, iar ambii membri ai celei de-a doua cu 3; obținem sistemul:

$$\begin{cases} 12x - 8y = 20 \\ -12x + 21y = 6. \end{cases}$$

Adunăm acum membru cu membru cele două ecuații; obținem:

$$13y = 26,$$

de unde $y = 2$.

Din prima ecuație obținem $3x = 5 + 2y$, adică $3x = 5 + 2 \cdot 2$, deci $x = 3$. Soluția sistemului este deci perechea $(3; 2)$.

Să rezolvăm sistemul $\begin{cases} x - 4y = 3 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$ prin metoda substituției. Din prima ecuație obținem $x = 3 + 4y$; înlocuim în a doua:

$$3(3 + 4y) + 2y = 5.$$

Aceasta este o ecuație doar în necunoscuta y, pe care o rezolvăm:

$$9 + 12y + 2y = 5,$$

$$14y = -4,$$

$$y = -\frac{2}{7}.$$

Așadar $x = 3 + 4 \cdot \left(-\frac{2}{7}\right) = \frac{21 - 8}{7} = \frac{13}{7}$. Soluția sistemului este deci perechea $\left(\frac{13}{7}; -\frac{2}{7}\right)$.

EXERCIȚII

1) Rezolvați prin metoda reducerii sistemele:

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ 4x - 3y = 9 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 8x - 3y = 2 \\ 2x - 5y + 1 = 0 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 4x - 5y = 1 \\ 2x + 10y = 3 \end{cases}$.

2) Rezolvați prin metoda substituției sistemele:

a) $\begin{cases} -2x + y - 1 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + 2y - 4 = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 3x + 2y - 6 = 0 \\ -x + y + 1 = 0 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} 4x - 6y + 10 = 0 \\ 2x + y + 1 = 0 \end{cases}$; e) $\begin{cases} x + 3y + 4 = 0 \\ 5x + 4y = 13 \end{cases}$; f) $\begin{cases} 3x + 5y + 1 = 0 \\ x - 3y = 6 \end{cases}$.

3) Rezolvați sistemele (alegeți-vă singuri metoda de rezolvare):

a) $\begin{cases} 3x - 5y = 8 \\ 2x + 4y - 3 = 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 4x - 5y = 0 \\ 4x + 10y = 3 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ 4x - 10y = 3 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - 6y = 9 \end{cases}$; e) $\begin{cases} \frac{1}{5}x + \frac{1}{6}y = 18 \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y = 21 \end{cases}$.

Să considerăm sistemul de două ecuații de gradul I, cu două necunoscute:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0. \end{cases}$$

Știm că mulțimea soluțiilor primei ecuații se identifică cu o dreaptă (d) din planul xOy; soluțiile celei de-a doua ecuații se identifică cu punctele dreptei (d') (vezi figura I.12). Soluția sistemului se identifică cu puncul P de intersecție a celor două drepte. În acest caz sistemul este compatibil determinat.

Dar se poate întîmpla ca cele două drepte (d) și (d') să fie paralele, ca în figura I.13. În acest caz sistemul de ecuații nu are nici o soluție; se spune că sistemul este, în acest caz, **incompatibil.**

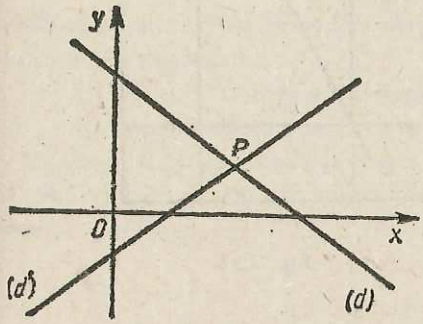


Fig. I.12

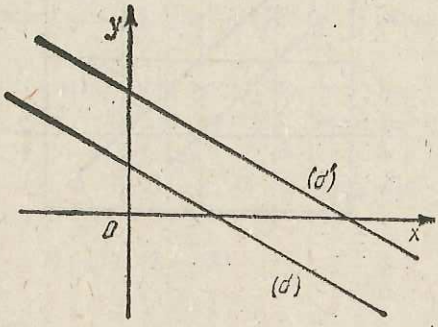


Fig. I.13

De exemplu, să considerăm sistemul:

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \quad (x,\ y \in \mathbf{R}).$$

Dacă reprezentăm într-un sistem de coordonate xOy dreptele soluțiilor celor două ecuații ce formează sistemul (vezi figura I.14), constatăm că ele sînt paralele. Dacă sistemul ar avea ca soluție perechea $(x;\ y)$, atunci am avea $x + y = 1$ și $x + y = 2$; ceea ce este absurd. Sistemul este deci incompatibil.

Se mai poate întîmpla ca dreapta (d') să fie aceeași cu dreapta (d). În acest caz sistemul de ecuații are mai multe soluții; fiecărui punct al dreptei (d) îi corespunde o soluție a sistemului. Se spune că sistemul este, în acest caz, compatibil, însă nedeterminat.

Să considerăm sistemul:

$$\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ 4x - 2y - 2 = 0 \end{cases} \quad (x,\ y \in \mathbf{R}).$$

Amîndouă ecuațiile ce formează sistemul au aceeași dreaptă a soluțiilor, reprezentată în figura I.15. Deci sistemul are mai multe soluții: mai precis, soluțiile sale sînt perechile de forma $(x;\ 2x - 1)$, unde $x \in \mathbf{R}$. Putem spune că sistemul este compatibil nedeterminat.

Observăm că a doua ecuație se obține din prima prin înmulțire cu 2.

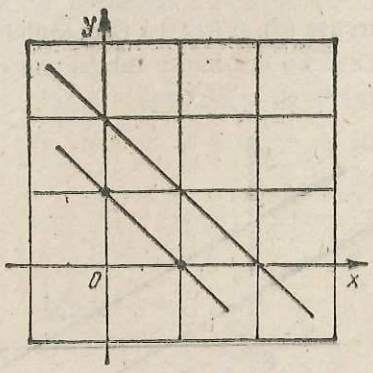


Fig. 1.14

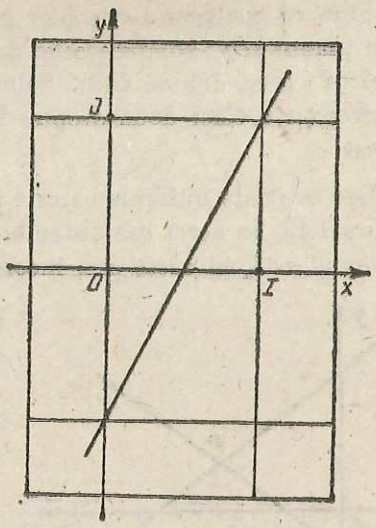


Fig. 1.15

EXERCIȚII

1) Rezolvați sistemele de ecuații:

a) $\begin{cases} 90x + 100y + 3 = 0 \\ 100x + 110y = 1{,}5 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + \frac{1}{2}y = 4 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$; c) $\begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y = 12 \\ \frac{5}{6}x - \frac{1}{4}y = 4 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} 0{,}1x + 1{,}7y = 30 \\ 1{,}1x - 0{,}1y = 10{,}4 \end{cases}$; e) $\begin{cases} 10x + 7y = 14{,}7 \\ 11x - 10y = 5{,}1 \end{cases}$.

2) Rezolvați sistemele de ecuații:

a) $\begin{cases} \frac{4x + 31}{10y - 17} = 6 \\ 4x - 20y + 55 = 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} \frac{1}{x + y} = \frac{2}{x - y} \\ \frac{2}{3x + 7y} = \frac{3}{2x - 9} \end{cases}$;

c) $\begin{cases} \frac{9x + 2y - 1}{3} = \frac{12x - 3y - 1}{10} \\ \frac{6x - 3y + 1}{4} - \frac{3x - 2y + 2}{6} = 1 \end{cases}$; d) $\begin{cases} \frac{13}{x + 2y + 3} = -\frac{13}{4x - 5y + 6} \\ \frac{3}{6x - 3y + 4} = \frac{19}{3x + 2y + 1} \end{cases}$.

3) Rezolvați sistemele de ecuații:

a) $\begin{cases} (x + 1)(y + 2) = (x - 1)(y + 1) + 13 \\ (2x + 1)(y - 4) = (x + 2)(2y - 3) - 31 \end{cases}$; b) $\begin{cases} \frac{x + 1}{y + 1} = \frac{x - 2}{y - 3} \\ \frac{x - 2}{y - 1} = \frac{x + 5}{y + 3} \end{cases}$;

c) $\begin{cases} (x + 1)y = (x + 5)(y - 4) \\ (x + 2)(y + 4) = (x + 4)y \end{cases}$.

Fie sistemul: $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + 5y + 7z = 24 \\ -3y + 8z = -1 \end{cases}$ $(x, y, z \in R)$.

Acesta este un sistem de trei ecuații cu trei necunoscute: x, y și z. Toate cele trei ecuații sînt de gradul I.

O soluție a sa este un triplet de numere reale $(x; y; z)$, astfel încît dacă înlocuim necunoscuta x cu x, pe y cu y iar pe z cu z, toate cele trei propoziții:

$$x + y + z = 6, \quad x + 5y + 7z = 24 \text{ și } -3y + 8z = -1$$

sînt adevărate. Prin înlocuire directă, constatăm că tripletul (2; 3; 1) este soluție a sistemului.

Fie $(x; y; z)$ o soluție a sistemului. Din faptul că propoziția $x + y + z = 6$ este adevărată, deducem că $x = 6 - y - z$. Din faptul că propoziția $x + 5y + 7z = 24$ este adevărată, înlocuind pe x, obținem $(6 - y - z) + 5y + 7z = 24$. Mai știm că propoziția $-3y + 8z = -1$ este adevărată; așadar perechea $(y; z)$ este o soluție a sistemului

$$\begin{cases} (6 - y - z) + 5y + 7z = 24 \\ -3y + 8z = -1 \end{cases}$$

Rezolvînd acest sistem, obținem $y = 3$, $z = 1$. Acum $x = 6 - 3 - 1 = 2$. Ajungem la concluzia că tripletul (2; 3; 1) este singura soluție a sistemului de trei ecuații cu trei necunoscute.

Să observăm că în rezolvarea sa am folosit metoda substituției: din prima ecuație a sistemului am „scos" necunoscuta x în funcție de celelalte apoi am înlocuit-o în celelalte ecuații ale sistemului (mai precis, doar într-a doua). Am obținut astfel un sistem de două ecuații, în necunoscutele y și z.

Să aplicăm metoda substituției și pentru rezolvarea sistemului:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 13 \\ 3x + 2y - 2z = 13 \\ 5x - 4y - 2z = 11 \end{cases}$$

Observăm că cel mai comod este să „scoatem" din prima ecuație pe z: $z = 2x + 3y - 13$. Să înlocuim în celelalte:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 2(2x + 3y - 13) = 13 \\ 5x - 4y - 2(2x + 3y - 13) = 11. \end{cases}$$

Efectuînd calculele, acest sistem de ecuații se transformă în:

$$\begin{cases} -x - 4y = -13 \\ x - 10y = -15 \end{cases}$$

rezolvîndu-l, obținem $x = 5$ și $y = 2$. Apoi $z = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 2 - 13 = 3$. Deci soluția sistemului este tripletul (5; 2; 3).

Alt exemplu: sistemul $\begin{cases} 2x + y + z = 9 \\ x - y = 1 \\ x + 2z = 5. \end{cases}$

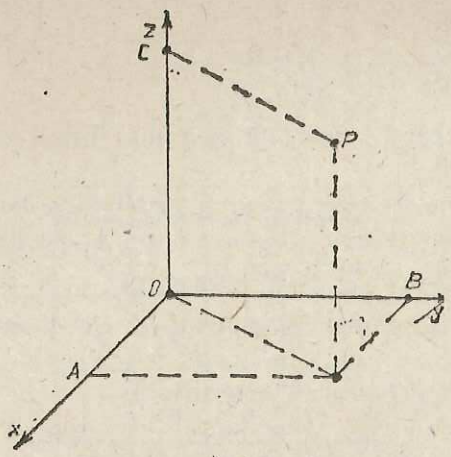


Fig.I.16

Vom scoate, de exemplu, din a doua ecuație $y = x - 1$, și vom înlocui în prima (în a treia nu este nevoie). Obținem sistemul în x și z:

$$\begin{cases} 2x + (x - 1) + z = 9 \\ x + 2z = 5. \end{cases}$$

Rezolvîndu-l, obținem $x=3$, $z=1$; sistemul are ca soluție tripletul (3; 2; 1).

Tripletele $(x; y; z)$ pot fi identificate cu puncte ale spațiului, înzestrat cu un sistem de coordonate $Oxyz$ (vezi figura I.16). Mai precis, tripletul $(x; y; z)$ se identifică cu punctul P ce are abscisa x, ordonata y și cota z. (În figura I.16 abscisa lui P este lungimea segmentului OA, ordonata lui P este lungimea segmentului OB iar cota lui P este lungimea segmentului OC.)

EXERCIȚII

1) Rezolvați sistemele de ecuații:

a) $\begin{cases} x + y = 16 \\ y + z = 28; \\ x + z = 22 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z = 40 \\ 2x - 3y = 0 \\ 5y - 6z = 0 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 3x + 4z = 47 \\ 2y - 5z = -34 \\ 2x + y - z = 5 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} x + 2y - 3z = -4 \\ x - y + 2z = 18 \\ x - 2y - 2z = -30 \end{cases}$; e) $\begin{cases} -x + z = 6 \\ -3x + 2y + z = 1 \\ -x - 3y - 2z = 5 \end{cases}$.

2*) Rezolvați sistemele de ecuații:

a) $\begin{cases} 2x - 5y + 4z = 42 \\ \frac{1}{4}x = \frac{1}{3}y = \frac{1}{6}z \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + 3y + z = 42 \\ \frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{5} = \frac{z}{3} \end{cases}$.

PROBLEME

Multe probleme ridicate de practică pot fi rezolvate cu ajutorul unui model matematic. De obicei, un model matematic asociat unei probleme este format din ecuații și inecuații, ce reflectă problema concretă.

Problema 1. Pentru construcția a două blocuri de locuințe de același tip au fost pregătite 212 panouri prefabricate. Un tractor cu remorcă transportă, la fiecare drum, cîte trei panouri la blocul mai apropiat. Pentru transportul spre blocul mai depărtat a fost alocat un alt tractor, ce poate transporta în remorcă, la fiecare drum, 4 panouri.

După o săptămînă, al doilea tractor, a făcut cu 14 drumuri mai puțin decît primul și au mai rămas să fie transportate 30 panouri.

Aflați cîte panouri mai trebuie transportate spre blocul mai apropiat și cîte drumuri mai are de făcut primul tractor.

Rezolvare. Să notăm cu x numărul de drumuri efectuate de primul tractor (cel care transportă panouri spre blocul mai apropiat), iar cu y numărul de drumuri efectuate de cel de-al doilea, în acea săptămînă. Din textul problemei rezultă că $y = x - 14$.

În total primul tractor a transportat $3x$ panouri, iar al doilea $4y$ panouri. Rămînînd de transportat încă 30 panouri, avem $3x + 4y + 30 = 212$. Astfel x și y formează soluția sistemului de ecuații:

$$\begin{cases} y = x - 14 \\ 3x + 4y + 30 = 212 \end{cases}.$$

Acest sistem de ecuații, împreună cu condițiile $x \in N$ și $y \in N$, formează modelul matematic al problemei. Rezolvînd sistemul, obținem $x = 34$ și $y = 20$.

Deci primul tractor a transportat $3 \cdot 34 = 102$ panouri. Pînă la epuizarea celor 106 panouri ce trebuie transportate spre blocul mai apropiat, ar mai trebui transportate 4 panouri, deci 2(!) transporturi cu primul tractor. Pentru blocul mai depărtat mai sînt de transportat 26 de panouri, adică 7(!) transporturi cu al doilea tractor. Puteți găsi o organizare mai bună a transporturilor?

Problema 2. În port, două conducte ce descărcau țiței dintr-un petrolier de 21 000 t trebuiau să-l descarce în 12 ore. După 5 ore, la conducta principală apare o defecțiune; ea este imediat înlocuită cu conducta de rezervă, care are însă un debit de două ori mai mic. În consecință, descărcarea durează 15 ore. Puteți afla debitele celor trei conducte?

Rezolvare. Fie x debitul (în tone pe oră) al primei conducte, y debitul celei de-a doua, iar z debitul conductei de rezervă. Dacă descărcarea ar fi decurs normal, atunci în 12 ore conductele 1 și 2 ar fi descărcat $12(x + y)$ tone țiței. În cele 5 ore de funcționare normală ele descarcă $5(x + y)$ tone; apoi, în cele $15 - 5 = 10$ ore rămase, conductele 2 și de rezervă descarcă, $10(y + z)$tone.

În plus, știm că $z = \frac{x}{2}$.

Așadar, x, y și z formează soluția sistemului de ecuații

$$\begin{cases} 12(x + y) = 21\,000 \\ 5(x + y) + 10(y + z) = 21\,000 \\ z = \frac{x}{2}. \end{cases}$$

Acesta este *modelul matematic* al problemei. Rezolvîndu-l, obținem $x = 1\,150$, $y = 600$, $z = 575$.

Problema 3. Din A pînă în C, trecînd prin B, sînt 104 km. Din A pînă în B, trecînd prin C, sînt 128 km, iar din B pînă în C, trecînd prin A, sînt 96 km. Aflați distanțele între A și B, B și C, A și C.

Rezolvare. Să notăm cu x distanța între A și B, cu y distanța între B și C și cu z distanța între A și C, măsurate în km. Astfel, distanța între A și C, trecînd prin B, este de $(x + y)$ km și așa mai departe. Numerele x, y și z formează soluția sistemului de ecuații:

$$\begin{cases} x + y = 104 \\ y + z = 128 \\ x + z = 96. \end{cases}$$

Rezolvîndu-l, obținem $x = 36$, $y = 68$, $z = 60$.

Problema 4. Tatăl lui Ionică a depus la CEC suma de 4 000 lei pe două carnete: unul cu dobîndă de 3,5%, celălalt cu dobîndă de 2,5%. După un an a primit pentru suma depusă dobînzi în valoare de 120 lei. Cît a depus pe carnetul cu dobîndă de 2,5%?

Rezolvare. Notăm cu x suma depusă de tatăl lui Ionică pe carnetul cu dobîndă de 3,5% și cu y suma depusă pe carnetul cu dobîndă de 2,5%. Textul problemei se transpune în condițiile:

$$\begin{cases} x + y = 4\,000 \\ \frac{3,5}{100}x + \frac{2,5}{100}y = 120. \end{cases}$$

Obținem $y = 2\,000$. Deci a depus 2 000 lei pe carnetul cu dobînda de 2,5%.

Problema 5. Studiindu-se în laborator dependența rezistenței unui termistor de temperatură, au fost obținute următoarele date:

temperatura T (în °C)	20	40	80
rezistența R (în kΩ)	1	0,3	0,1

Se bănuiește că legătura între temperatura T și rezistența R este descrisă de o lege de forma:

$$R = \frac{T + a}{bT + c}.$$

Determinați valorile lui a, b și c. Care va fi rezistența termistorului la temperatura de 60°C? (Se presupune că formula găsită este corectă.)

Rezolvare. Datele obținute ne arată că a, b, c satisfac relațiile:

$$1 = \frac{20 + a}{b \cdot 20 + c}; \quad 0,3 = \frac{40 + a}{b \cdot 40 + c}; \quad 0,1 = \frac{80 + a}{b \cdot 80 + c}.$$

„Coeficienții" a, b, și c formează astfel soluția sistemului de ecuații:

$$\begin{cases} -a + 20b + c = 20. \\ -a + 12b + 0{,}3c = 40. \\ -a + 8b + 0{,}1c = 80. \end{cases}$$

Rezolvîndu-l, obținem $a = -220$, $b = -20$, $c = 200$. Formula este deci următoarea: $R = \dfrac{T - 220}{-20T + 200}$.

Folosind această formulă, obținem pentru temperatura de 60°C valoarea rezistenței egală cu 0,16 kΩ.

PROBLEME

1) Aflați laturile unui triunghi, știind că adunînd lungimile a cîte două laturi se obține, pe rînd, valorile 45 m, 52 m, 48 m.

2) Două triunghiuri sînt asemenea; primul are laturile, respectiv, de lungime 7 cm, 10 cm, și 11 cm, iar al doilea are perimetrul de 70 cm. Aflați lungimile laturilor celui de-al doilea triunghi.

3) Un triunghi ABC are laturile de lungime a, b, c. Notînd cu M, N, P punctele de tangență ale cercului înscris cu laturile triunghiului (M se află pe latura BC, N pe latura AC) aflați lungimile segmentelor BM, MC, AN, NC, BP și PA. Caz particular: $a = 14$ cm, $b = 16$ cm, $c = 20$ cm.

4) Un container conține 30 de televizoare și 28 aparate de radio și cîntărește 729 kg; alt container de același tip conține doar 10 televizoare și 40 de aparate de radio, cîntărind 473 kg; un al treilea container la fel cu primele două conține 16 televizoare și 62 aparate de radio, cîntărind 601 kg. Aflați masa unui container gol, precum și masa unui televizor. Toate televizoarele sînt de același tip. De asemenea, aparatele de radio.

5) Suma a trei numere naturale este 100. Dacă împărțim primul număr la al doilea obținem cîtul 5 și restul 1; dacă împărțim al doilea număr la al treilea, obținem din nou cîtul 5 și restul 1. Care sînt numerele?

6) Un bazin cu volumul de 1 500 l poate fi umplut prin trei conducte prevăzute cu robinete. Lăsînd deschise doar robinetele primelor două conducte, bazinul se umple în 30 minute. Dacă deschidem robinetele conductelor 1 și 3, bazinul se umple în 25 minute. Debitul celei de-a treia conducte este de 3 ori mai mare decît debitul celei de-a doua. Aflați debitele celor trei conducte. În cît timp s-ar umple bazinul, dacă ar fi lăsat deschis numai un robinet?

EXERCIȚII RECAPITULATIVE

I. SISTEME ALGEBRICE DE DOUĂ ECUAȚII CU DOUĂ NECUNOSCUTE

1) Verificați dacă perechile de numere reale $(-1; 6)$; $(2; -2)$; $(-1; 9)$; $(6; -4)$; $(0; -2)$; $(-2; 0)$ sînt, respectiv, soluție pentru sistemele:

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ y = 6 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x - y = 4 \\ x = 2 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x + y = 8 \\ -x = 1 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x - y = 10 \\ -y = 4 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ -y = 2 \end{cases}$; f) $\begin{cases} -x - 2y = 0 \\ -y = 2. \end{cases}$

2) Fie a) $x = y = 1$; b) $x = y = 3$; c) $x = y = 5$.

Care dintre aceste perechi de numere reprezintă soluție pentru următoarele sisteme:

a) $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 10 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 5\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 8 \\ 3\sqrt{x} - 7 = -4 \cdot \sqrt{y}. \end{cases}$

3) Fie sistemele:

a) $\begin{cases} \dfrac{x-3}{y+1} = 1 \\ \dfrac{x+1}{y-2} = 3 \end{cases}$; b) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2} - \dfrac{x-y}{2} = 8 \\ \dfrac{x+y}{3} + \dfrac{x-y}{4} = 11 \end{cases}$; c) $\begin{cases} \dfrac{11x - 5y}{11} = \dfrac{3x+y}{16} \\ 8x - 5y = 1, \end{cases}$

și perechile de numere: a) (7; 3); b) (18; 6); c) (7; 11). Precizați care pereche de numere reprezintă soluție, respectiv, pentru sistemul a), b), c).

4) Dovediți, înlocuind necunoscutele x și y în sistemele a) și b) cu numerele 5 și respectiv 6, că aceste sisteme sînt echivalente.

a) $\begin{cases} 135 - (14x - 2) = \dfrac{1}{6}(55x + 71y + 1) \\ 3x - 2y + 3 + \dfrac{1}{5}(53y - 30) = \dfrac{1}{7}(12x - 6y + 24) + \dfrac{3}{5} \cdot (45 - x); \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 11 \\ \dfrac{x}{5} = \dfrac{y}{6}. \end{cases}$

5) Verificați dacă următoarele sisteme sînt echivalente avînd soluția $\left(\frac{1}{4}; -\frac{1}{8}\right)$.

a) $\begin{cases} 2(x + y) = 0 \\ 3x - 4y + 1 = x \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + 1 = 4y \end{cases}$; c) $\begin{cases} 3x + 6y = 0 \\ 2(x - 2y) = -1 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} x = -2y \\ x - 2y - \dfrac{1}{2} = 0. \end{cases}$

6) Să se rezolve următoarele sisteme:

a) $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x = 1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3x - y = 4 \\ y = 2 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 2 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x - y = 9 \\ x + y = 1 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} 4x + 2y = 14 \\ 3x - y = 18 \end{cases}$; f) $\begin{cases} 2x + y = 8 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$; g) $\begin{cases} 24x + 3y - 200 = 0 \\ 28x - 15y - 36 = 0 \end{cases}$;

h) $\begin{cases} x + 17y - 300 = 0 \\ -y + 11x - 104 = 0 \end{cases}$; i) $\begin{cases} x + 0{,}7y = 1{,}47 \\ 1{,}1y - x = 0{,}51 \end{cases}$; j) $\begin{cases} 0{,}1x + 1{,}3y = 17{,}6 \\ 0{,}7y + 0{,}1x = 9{,}8 \end{cases}$;

k) $\begin{cases} \dfrac{1}{5} \cdot x + \dfrac{1}{6} y = 18 \\ \dfrac{1}{2} \cdot x - \dfrac{1}{4} y = 21 \end{cases}$; l) $\begin{cases} \dfrac{17}{7} x - \dfrac{3}{4} \cdot y = 116 \\ -y - 40 = -\dfrac{8}{5} \cdot x \end{cases}$;

m) $\begin{cases} \dfrac{13+x}{7} + \dfrac{3x-8y}{3} = x + y - \dfrac{16}{3} \\ \dfrac{11-x}{2} + \dfrac{4x+8y-2}{3} = 6 - y + x \end{cases}$;

n) $\begin{cases} \dfrac{1}{3}(3x-2y) + 1 + \dfrac{1}{8}(11y-10) = \dfrac{1}{7}(4x-3y) + \dfrac{5}{7} + \dfrac{1}{5}(45-x); \\ 45 - \dfrac{1}{3}(4x-2) = \dfrac{1}{16}(35x+71y+1) \end{cases}$

o) $\begin{cases} x - y = 5 \\ \dfrac{x}{5} = \dfrac{y}{4} \end{cases}$; p) $\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} \end{cases}$; r) $\begin{cases} 5x - 2y = 19 \\ \dfrac{x}{5} = \dfrac{y}{3} \end{cases}$; s) $\begin{cases} x + \sqrt{2} \cdot y = 2 \cdot \sqrt{2} \\ \dfrac{3}{\sqrt{2}} \cdot x - 2 \cdot y = 1 \end{cases}$;

t) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2} + x = 6 \\ \dfrac{x-y}{3} - y = 4. \end{cases}$

II. SISTEME ALGEBRICE DE TREI ECUAȚII CU TREI NECUNOSCUTE

1. Verificați dacă tripletele de numere reale (3; 2; 1); (6, 8; 10); (5; 11; 17); (5; 5; 6); (5; 12; 13); (0; 51; 0) și (0; 0; 1) sînt, respectiv, soluție pentru sistemele:

a) $\begin{cases} 2x + y + z = 9 \\ x - y = 1 \\ x + 2z = 5 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + 2y - 3z = -3 \\ x - y + 2z = 18 \\ x - 2y - 2z = -30 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x + y = 16 \\ y + z = 28 \\ z + y = 22 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} 2y - 5z = -34 \\ 3x + 4z = 47 \\ 3x + 3y = 19 \end{cases}$; e) $\begin{cases} x : y : z = 5 : 12 : 13 \\ 5x + 12y = 12z + 13 \end{cases}$;

f) $\begin{cases} (x + 2y) : (3y + 4z) : (5x + 6z) = 7 : 8 : 9 \\ x + y - z = 1{,}26. \end{cases}$

2) Cercetați dacă sistemele:

a) $\begin{cases} x = 3z - 2y - 8 \\ x - 18 = y - 2z \\ 2(y + z) = x + 30 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x + 4y - 6z = -16 \\ x + y + 2z = 18 \\ x - 2y - 2z = -30 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 3x + 3y - 4z = 2 \\ x - y + 2z = 18 \\ x + 6y - 4z = 14 \end{cases}$

au aceeași soluție (sînt echivalente).

3) Aceeași întrebare ca la exercițiul 2) pentru sistemele:

a) $\begin{cases} x + 2y = 23 \\ 5y + 6z = 94 \\ 4z + 3x = 57 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 5x + 2y + 4z = 60 \\ 5y + 6z = 94 \\ 4z + 3x = 57 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x + 2y = 23 \\ 3x + 5y + 10z = 151; \\ 47 + 3x = 57 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4x + 7y + 10z = 174 \\ x + 2y = 23 \\ 3x + 4z = 57. \end{cases}$

4) Rezolvați următoarele sisteme algebrice:

a) $\begin{cases} x + y + z = 10 \\ x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x - y - z = 20 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 0 \\ 2x = 4 \\ -y = 1 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} 3x - y - z = 1 \\ -x = -2 \\ z = -3 \end{cases}$; e) $\begin{cases} x + y + z = 9 \\ x - y = 3 \\ z = 6 \end{cases}$; f) $\begin{cases} x + y + z = 20 \\ y - z = 10 \\ x = 10 \end{cases}$;

g) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - 3y - 5z = -10 \\ 4x + 9y + 25z = 100 \end{cases}$; h) $\begin{cases} 5x - 6y + 4z = 15 \\ 2x + y + 6z = 46 \\ 7x + 5y - 3z = 23 \end{cases}$; i) $\begin{cases} 10x + 5y + 4z = 95 \\ 5x + 2y + 4z = 46; \\ 3x + 2y + z = 23 \end{cases}$

j) $\begin{cases} x + y = 26 \\ y + z = 40 \\ x + z = 34 \end{cases}$; k) $\begin{cases} x = 21 - 4y \\ y = 64 - \frac{15}{2}z \\ z = 9 - \frac{2}{3}x \end{cases}$; l) $\begin{cases} y - \frac{x}{2} = 41 \\ x - \frac{z}{4} = \frac{41}{2} \\ y + \frac{1}{5}z = 34 \end{cases}$; m) $\begin{cases} x + y - z = 132 \\ x - y + z = 65,4 \\ -x + y + z = -1,2 \end{cases}$;

n) $\begin{cases} 3x + 2y + 3z = 22 \\ 4x + 3y + 2z = 20 \\ 2x + 5y + 7z = 23 \end{cases}$; o) $\begin{cases} 2x - 4y + 4z = 42 \\ \frac{x}{5} = \frac{y}{4} = \frac{z}{6} \end{cases}$; p) $\begin{cases} x + y + z = 40 \\ \frac{x}{5} = \frac{y}{2} \\ \frac{y}{6} = \frac{z}{5} \end{cases}$;

r) $\begin{cases} x + 3y + z = 42 \\ \frac{x - 1}{4} = \frac{y + 1}{5} = \frac{z}{3}. \end{cases}$

LUCRARE PENTRU VERIFICAREA ÎNSUȘIRII UNOR CUNOȘTINȚE DE BAZĂ

1) Care dintre numerele -8; 7; 8 și 9 este soluție a ecuației $\frac{x^2 + 63}{16x} = 1$?

2) Rezolvați ecuațiile: a) $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} = 3$; b) $5(x - 1) = 4(3 - x) + 7$.

3) Rezolvați sistemele de ecuații:

a) $\begin{cases} \frac{x + y}{2} + x = 6 \\ \frac{x - y}{8} - y = 4 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x - y = \frac{1}{6} \\ 8x - 6y = 2 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 8 \\ 3x - y - z = 0 \\ x - 2y + 2z = -1. \end{cases}$

4) Un muncitor cheltuiește 952 lei pentru a-și cumpăra un costum, o cămașă și o cravată. Cămașa este cu 38 lei mai scumpă decît cravata, iar costumul este de 9 ori mai scump decît cămașa. Aflați prețul costumului, al cămășii și al cravatei.

Capitolul II
FUNCȚII

1. NOȚIUNEA DE FUNCȚIE

Să notăm cu litera A intervalul închis $[0; 1]$, iar cu litera B intervalul închis $[0; 2]$. Putem stabili o legătură între aceste intervale; anume, fiecărui element x din A îi putem face să-i corespundă dublul său $2x$, care este un element din mulțimea B. Am definit astfel o funcție pe mulțimea A, cu valori în mulțimea B. O notăm astfel $f: A \to B$; această funcție este descrisă (dată), de formula $f(x) = 2x$.

În general, să ne imaginăm că am făcut să corespundă fiecărui element x dintr-o mulțime A un (singur) element y dintr-o mulțime B; spunem că am definit o **funcție** de la A la B.

Folosim notația $f: A \to B$, citind „funcția f, definită pe mulțimea A, cu valori în mulțimea B". Mulțimea A se numește **domeniul de definiție** al funcției f, iar mulțimea B se numește **codomeniul** (sau **domeniul de valori** al) funcției f.

În exemplul de mai sus am folosit litera x pentru a nota un element oarecare din domeniul de definiție; orice literă folosită în acest scop poartă numele de **argument**.

Exemplu. Perimetrul unui dreptunghi este de 12 cm. Ce putem spune despre aria sa?

Să notăm cu b (cm) lungimea bazei dreptunghiului. Deoarece semiperimetrul este de 6 cm, înălțimea dreptunghiului va fi de $6 - b$ (cm). Aria a (în cm²) a dreptunghiului este dată deci de:

$$a = b \cdot (6 - b).$$

Putem spune că această formulă ne dă aria dreptunghiului în funcție de lungimea bazei sale. Să precizăm această funcție.

Numărul a, reprezentînd o arie, nu poate fi negativ; putem considera că $a \in [0; +\infty)$. Deoarece b și $6 - b$ reprezintă lungimi, trebuie să avem $b \geqslant 0$ și $6 - b \geqslant 0$; astfel $b \in [0; 6]$.

Deci dependența ariei de lungimea bazei dreptunghiului este exprimată prin funcția

$$f:[0,\ 6]\to[0;\ +\infty),$$

descrisă de $f(b) = b(6 - b)$.

Aici argumentul este litera b. Care este domeniul de definiție al funcției? Dar codomeniul?

Să reprezentăm grafic această funcție, prin puncte. Completăm mai întîi un tabel de valori:

b	0	1	2	3	4	5	6
$f(b)$	0	5	8	9	8	5	0

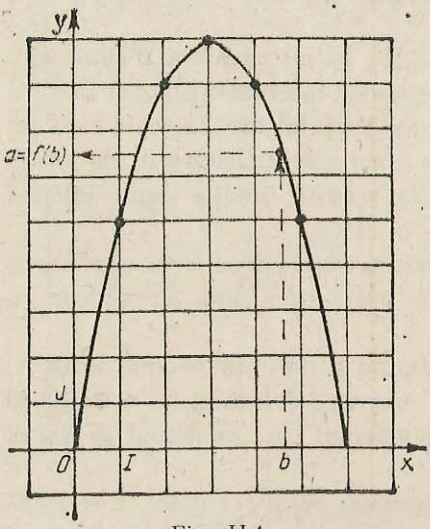


Fig. II.1

Înzestrăm planul cu un sistem de axe de coordonate (vezi figura 1). Scoatem în evidență punctele ce au abscisa b și ordonata $f(b)$, trecute în tabel. Le unim printr-o linie „continuă". Graficul obținut este o linie curbă.

Observăm, privind acest grafic, că numărul a poate lua valori doar în intervalul $[0;\ 9]$. Deci dependența ariei de lungimea bazei dreptunghiului poate fi exprimată și prin funcția:

$$g:[0;\ 6]\to[0;\ 9],\ g(b) = b(6 - b).$$

Observație. Funcția g diferă de funcția f, căci are alt codomeniu!

Alte exemple. 1) *Procese de creștere și de descreștere.* a) O celulă de bacterie se divide, dînd naștere la două celule; după o oră, fiecare dintre acestea se divide, apărînd astfel patru celule; după încă o oră, fiecare dintre cele 4 celule se divide, apărînd opt celule și așa mai departe. Putem completa un tabel:

Momentul t	0	1	2	3	4	...
Numărul total de bacterii	1	2	4	8	16	...

Să observăm că numărul total de bacterii, n, depinde de momentul în care le numărăm. Acest fenomen *de creștere* este exprimat prin funcția $n:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, descrisă de $n(t) = 2^t$ (verificați!). Graficul acestei funcții este o mulțime de puncte din plan; cîteva sînt desenate în figura 2.

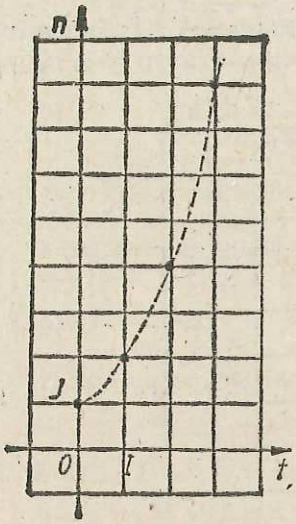


Fig. II.2

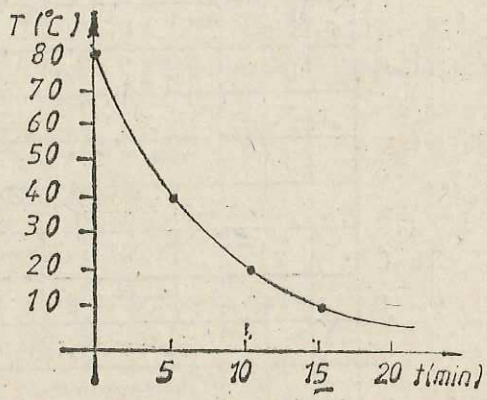


Fig. II.3

b) Măsurînd temperatura T a ceaiului dintr-o cană, s-au obținut următoarele rezultate:

Momentul t	0	5	10	15
Temperatura T (în °C)	80	40	20	10

Dependența între temperatura ceaiului și momentul în care s-a măsurat această temperatură poate fi exprimată prin funcția:

$$T : [0, \infty) \to \mathbf{R}$$

descrisă de $T(t) = 80 \cdot 2^{-t/5}$ (verificați!).

Graficul acestei funcții a fost trasat în figura 3 printr-o linie „continuă", ce trece prin punctele ce corespund măsurătorilor.

2) Elevii unei clase au obținut la teză următoarele rezultate: două note de 4, patru note de 5, trei note de 6, cinci note de 7, opt note de 8, șase note de 9 și patru note de 10. Construim funcția

$$f : \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \to \mathbf{N}$$

care face să corespundă fiecărei note *frecvența* ei (numărul care arată de cîte ori a fost obținută nota). Funcția este descrisă de tabelul:

Nota x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecvența ei $f(x)$	0	0	0	2	4	3	5	8	6	4

Graficul acestei funcții este alcătuit din punctele $I(1; 0)$, $A(2; 0)$, $B(3;0)$, $C(4;2)$, $D(5;4)$, $E(6;3)$, $F(7;5)$, $G(8;8)$, $H(9;6)$, și $K(10;4)$ (vezi figura 4).

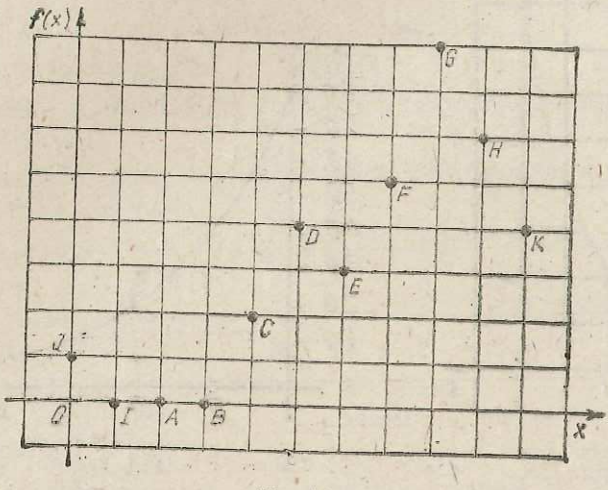
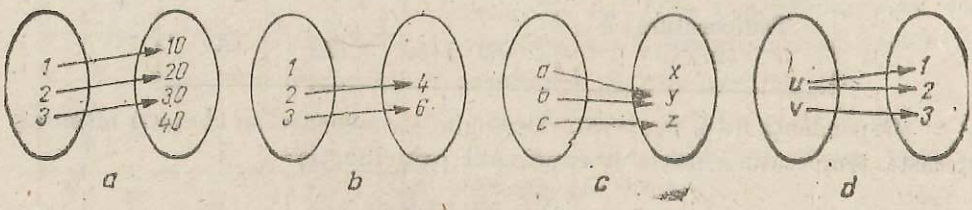


Fig. 11.4

EXERCIȚII

1) (oral) Care dintre diagramele următoare nu definesc funcții? De ce?



2) Fie $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ și fie funcția $f : A \to A$ dată prin formula $f(x) = 6 - x$. Alcătuiți tabelul de valori al funcției.

3) Fie funcția $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ descrisă astfel:

$$g(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{dacă } x \leq 2; \\ x - 2 & \text{dacă } x > 2. \end{cases}$$

Calculați $g(-1)$, $g(0)$, $g(1)$, $g(1)$, $g(1,5)$, $g(2)$, $g(2,5)$, $g(3)$, $g(4)$.

4) Un pieton pleacă la ora 8 din localitatea A și ajunge la ora 12 în localitatea B (în aceeași zi), mergînd cu viteza (constantă) de 5 km/h. Considerăm funcția $d : [8; 12] \to \mathbf{R}$, care face ca fiecărei valori a timpului t din intervalul $[8; 12]$ să-i corespundă distanța $d(t)$ parcursă de la ora 8 pînă la momentul t (t este exprimat în ore, iar $d(t)$ în kilometri). Scrieți formula care descrie pe d și completați tabelul:

t	8	8,5	9	10	10,5	11	12
$d(t)$	0						

Ați putea completa tabelul și cu alte valori? Ați putea alcătui un tabel care să descrie complet funcția?

5) Un parașutist se aruncă dintr-un avion și își deschide parașuta la t secunde după momentul saltului. Tabelul de mai jos ne dă distanța parcursă în cădere liberă, în metri:

t	1	2	3	4
distanța d	4,9	19,6	44,1	78,4

Puteți descrie dependența între d și t printr-o funcție? (Indicație: comparați prin împărțire valorile lui d cu pătratele lui t.)

6) Reprezentați grafic funcțiile:

a) $f:\{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 - x$.

b) $g:\{-2, -1, 1, 2\} \to \mathbf{R}$, $g(x) = 1 + \frac{2}{x}$.

7) Care dintre graficele funcțiilor:

a) $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 3x^5 - 7x^3 - 4x$, b) $g:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$;

c) $h:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $h(x) = x + 1$, conține originea axelor?

8) Pentru ce valoare a lui m, graficul funcției

$$f:\mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = 2x - m,$$

conține punctul $A(1; -5)$?

2. FUNCȚII LINIARE

O funcție $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin $f(x) = mx + n$, unde m și n sînt numere reale date, se numește **funcție liniară**. Graficul oricărei funcții liniare este o dreaptă în plan. Cunoaștem de asemenea că, dacă $m > 0$, atunci funcția este **crescătoare** (ceea ce înseamnă că dacă $a < b$, atunci $f(a) < f(b)$); dacă $m < 0$ funcția este **descrescătoare** (ceea ce înseamnă că dacă $a < b$, atunci $f(a) > f(b)$). Dacă $m = 0$ funcția este **constantă**; graficul ei este o dreaptă paralelă cu axa Ox.

Pentru reprezentarea grafică a unei funcții liniare este suficient să cunoaștem doar două puncte ale graficului.

Exemple. 1) Fie funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dată de $f(x) = 2x - 4$. Ea este o funcție liniară; aici $m = 2$ și $n = -4$. Avem $f(-1) = 2\cdot(-1) - 4 = -6$ și $f(1) = -2$; deci punctele $A(-1; -6)$ și $B(1; -2)$ aparțin graficului. Graficul funcției va fi dreapta AB (vezi figura 5). Dacă $M(x; y)$ este un punct al dreptei AB, atunci coordonatele sale x și y verifică relația $y = 2x + 4 = 0$. În afară

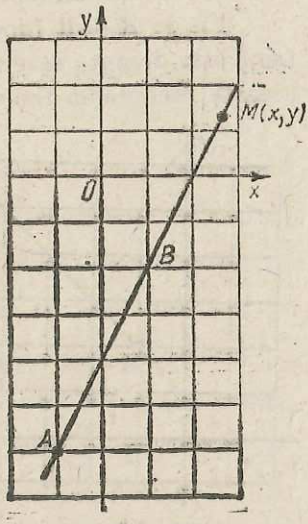


Fig. II.5

de punctele dreptei AB nu există altele care să verifice această relație. Spunem că AB este **dreapta de ecuație** $y - 2x + 4 = 0$.

Adesea, pentru a reprezenta grafic o funcție liniară, determinăm punctele în care graficul intersectează axele de coordonate. Pentru aceasta, ținem seamă de faptul că axa Ox **are ecuația** $y = 0$, **iar axa** Oy **are ecuația** $x = 0$. Pentru funcția din acest exemplu, găsim intersecția graficului cu axa Ox rezolvînd sistemul:

$$\begin{cases} y - 2x + 4 = 0 \\ y = 0 \end{cases}; \text{ obținem soluția } (2;0).$$

Intersecția cu axa Oy este dată de soluția sistemului:

$$\begin{cases} y - 2x + 4 = 0 \\ x = 0 \end{cases}, \text{ adică de } (0;\ -4).$$

Deci dreapta se obține unind punctele $C(2;0)$ și $D(0;\ -4)$ (vezi figura 6).

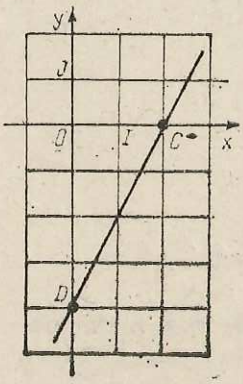


Fig. II.6

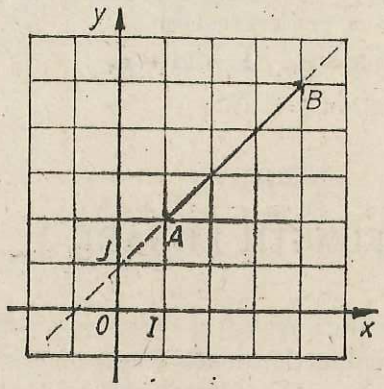


Fig. II.7

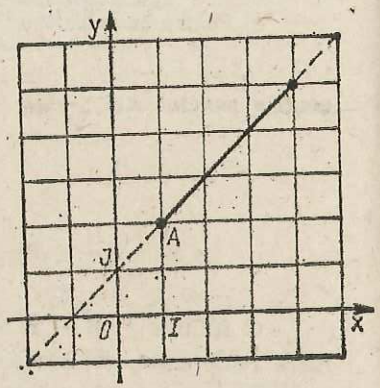


Fig. II.8

2) Să reprezentăm grafic funcția $f: [1;4] \to \mathbf{R}$ descrisă de $f(x) = x + 1$.

Fie $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funcția liniară descrisă de $g(x) = x + 1$. Graficul funcției g este dreapta determinată de punctele $(-1;\ 0)$ și $(0;\ 1)$. Am reprezentat această dreaptă în figura 7 (cu linie întreruptă). Graficul funcției f va fi o parte a acestei drepte, anume aceea formată din punctele $(x;\ y)$ care au abscisa x cuprinsă între 1 și 4. Deci f are ca grafic segmentul ce unește punctele $A\ (1;\ 2)$ și $B(4;\ 5)$. Punctele A și B aparțin graficului funcției f.

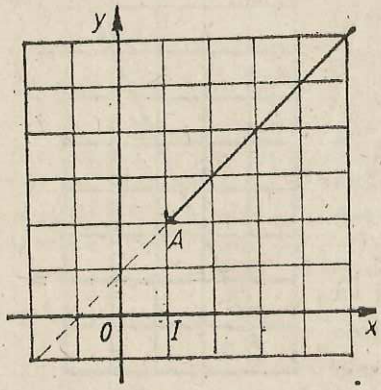


Fig. II.9

3) Funcția $h: (1;\ 4) \to \mathbf{R}$, $h(x) = x + 1$ are graficul desenat în figura 8. Punctele A și B nu aparțin graficului.

4) Funcția $k: (1;\ \infty) \to R$, $k(x) = x + 1$ are ca grafic semidreapta cu originea în A reprezentată în figura 9. Punctul A nu aparține graficului.

EXERCIȚIU REZOLVAT

Să aflăm funcția liniară f pentru care $f(1) = 3$ și $f(2) = 5$ (deci al cărei grafic conține punctele $A(1; 3)$ și $B(2; 5)$).

Funcția f fiind liniară, este descrisă de $f(x) = mx + n$, pentru orice $x \in R$. Rămîne să aflăm valorile lui m și n.

Avem $f(1) = m \cdot 1 + n = m + n$, iar $f(2) = m \cdot 2 + n = 2m + n$. Deci pentru a afla valorile lui m și n, va trebui să rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases} m + n = 3, \\ 2m + n = 5. \end{cases}$$

Rezolvîndu-l, găsim $m = 2$, $n = 1$. Funcția liniară căutată este descrisă de formula $f(x) = 2x + 1$.

EXERCIȚII

1) Aflați numărul a știind că graficul funcției constante $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = a$, conține punctul $M(-3; -5)$. Reprezentați grafic funcția.

2) Construiți graficele funcțiilor: $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = 3$ și $h: [-2; 2] \to \mathbf{R}$, $h(x) = 3$.

3) Reprezentați grafic, în același sistem de coordonate, funcțiile:

$f, g, h: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, descrise de:

$f(x) = -x$, $g(x) = -x + 2$, $h(x) = -x - 2$. Ce observați?

4) Comparați între ele graficele funcțiilor:

$f_1: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_1(x) = -2x + 2$;

$f_2: [0; 3] \to \mathbf{R}$, $f_2(x) = -2x + 2$;

$f_3: (0; 3) \to \mathbf{R}$, $f_3(x) = -2x + 2$;

$f_4: \{0; 3\} \to \mathbf{R}$, $f_4(x) = -2x + 2$.

5) Reprezentați grafic funcțiile:

a) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2 \text{ dacă } x < 0, \\ -1 \text{ dacă } x \geqslant 0; \end{cases}$

b) $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = \begin{cases} -x \text{ dacă } x \leqslant 0, \\ 0 \text{ dacă } 0 < x < 2, \\ x - 2 \text{ dacă } x \geqslant 2. \end{cases}$

6) Reprezentați grafic funcțiile:

$f: (2, +\infty) \to \mathbf{R}$, $f(z) = 5 - z$ și $g: (-\infty; -2) \to \mathbf{R}$, $g(z) = 5 - z$.

7) Pentru ce valori ale lui m funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dată de $f(x) = (m - 2)x + m$ este: a) crescătoare; b) descrescătoare; c) constantă?

8) a) Determinați funcția liniară f pentru care $f(1) = 10$, $f(2) = -4$.

b) Determinați funcția liniară g pentru care $g(0) = 2$, $g(1) = 4$, $g(2) = 6$ și $g(3) = 8$.

c) Există o funcție liniară h astfel încît $h(-1) = -3$, $h(0) = 2$, $h(1) = 17$

d) Reprezentați grafic funcțiile f și g.

9) Să presupunem că, pe măsură ce coborîm spre centrul Pămîntului, la fiecare 30,5 metri temperatura crește cu 1°C, iar la suprafață temperatura este de 20°C.

a) Stabiliți o formulă care să descrie dependența temperaturii de adîncime.

b) Ce temperatură va fi la adîncimea de 122 m?

c) La ce adîncime temperatura va fi de 36°C?

10) Reprezentați grafic funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ descrisă de:

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 \text{ dacă } x \geq 2, \\ -x + 2 \text{ dacă } x < 2. \end{cases}$$

3. FUNCȚII PĂTRATICE

Ne propunem să studiem funcția care face să corespundă fiecărui număr real pătratul său:

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f(x) = x^2.$$

Să completăm mai întîi un tabel de valori:

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$	4	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	4

Valorile funcției trecute în tabel ne îndeamnă să presupunem că funcția este descrescătoare pe intervalul $(-\infty; 0]$ și crescătoare pe $[0; +\infty)$.

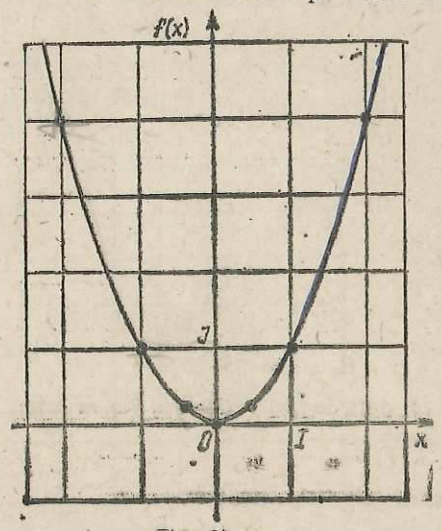


Fig. II.10

În figura 10 prezentăm graficul acestei funcții. Am scos în evidență punctele ale căror coordonate sînt trecute în tabelul de valori de mai sus. Graficul funcției este o *parabolă*.

Vom numi **funcție pătratică** orice funcție de forma:

$$g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad g(x) = ax^2 + bx + c;$$

unde a, b, c sînt numere reale, iar $a \neq 0$.

În particular, funcția f de mai sus este o funcție pătratică

$$(a = 1, \quad b = c = 0).$$

Graficul oricărei funcții pătratice este o parabolă.

EXERCIȚIU REZOLVAT

Să determinăm funcția pătratică g ce are proprietatea că $g(1) = 0$, $g(2) = 1$ și $g(3) = 4$.

Știm că $g(x) = ax^2 + bx + c$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Rămîne să determinăm coeficienții a, b și c. Avem $g(1) = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = a + b + c$; $g(2) = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 4a + 2b + c$; $g(3) = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = 9a + 3b + c$. Deci coeficienții îi aflăm rezolvînd sistemul de ecuații

$$\begin{cases} a + b + c = 0, \\ 4a + 2b + c = 1, \\ 9a + 3b + c = 4. \end{cases}$$

Înlocuim acest sistem prin altul, echivalent cu el, scăzînd din a doua ecuație pe prima, iar din a treia pe a doua:

$$\begin{cases} a + b + c = 0, \\ 3a + b \quad\quad = 1, \\ 5a + b \quad\quad = 3. \end{cases}$$

Scăzînd acum din a treia ecuație pe a doua, obținem:

$$\begin{cases} a + b + c = 0, \\ 3a + b \quad\quad = 1, \\ 2a \quad\quad\quad = 2. \end{cases}$$

Acest ultim sistem se rezolvă ușor; soluția sa este $a = 1$, $b = -2$, $c = 1$. Așadar funcția pătratică căutată este $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = x^2 - 2x + 1$.

EXERCIȚII

1) Completați tabelul:

x	-3	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	3
$f_1(x) = \frac{1}{2}x^2$											
$f_2(x) = x^2$											
$f_3(x) = 2x^2$											
$f_4(x) = -\frac{1}{2}x^2$											
$f_5(x) = -x^2$											
$f_6(x) = -2x^2$											

Reprezentați grafic, în același sistem de coordonate, funcțiile f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, definite pe $\mathbf{R}$, cu valori reale (luați ca unitate de măsură, pe ambele axe, 1 cm).

2) Aceeași problemă, pentru funcțiile g_1, g_2, g_3, g_4 și g_5.

x	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$g_1(x) = x^2$									
$g_2(x) = x^2 + 1$									
$g_3(x) = x^2 + 2$									
$g_4(x) = x^2 - 1$									
$g_5(x) = x^2 - 2$									

Ce observați?

3) Aceeași problemă, pentru funcțiile h_1, h_2, h_3, h_4.

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$h_1(x) = x^2$								
$h_2(x) = x^2 - x$								
$h_3(x) = x^2 - 2x$								
$h_4(x) = x^2 + x$								

4) Aceeași problemă, pentru funcțiile k_1, k_2, k_3, k_4.

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	3
$k_1(x) = x^2$									
$k_2(x) = (x - 1)^2$									
$k_3(x) = (x - 2)^2$									
$k_4(x) = (x + 1)^2$									

Ce observați?

5) Determinați funcția pătratică ce are proprietatea că $g(0) = 0$, $g(1) = -2$, $g(2) = 0$.

6) Care funcție pătratică are graficul o parabolă ce conține punctele $A(1; 4)$, $B(2; 3)$ și $C(3; 4)$?

7) Reprezentați grafic funcția ce descrie dependența ariei unui pătrat (măsurată în cm²) de lungimea laturii sale (măsurată în cm). Alegeți unitatea de măsură de 4 cm pe fiecare axă de coordonate. Completați apoi tabelul:

latura l (cm)	1,4	2			10
aria A (cm²)			8	10	

8*) În figura 11 vedeți desenată o curbă ce seamănă cu un arc de parabolă. Ea este graficul unei funcții f. Completați tabelul:

x	0,5	1	1,5
$f(x)$			

Este într-adevăr un arc de parabolă?

9) Înălțimea h (în kilometri) atinsă de o rachetă la t minute după lansare este dată în tabelul:

durata zborului t	0	1	2	3	4
înălțimea h	0	25	100	225	400

Puteți descrie mișcarea rachetei printr-o funcție? Aflați înălțimea atinsă după 10 minute de la lansare, presupunînd că motoarele rachetei funcționează tot timpul.

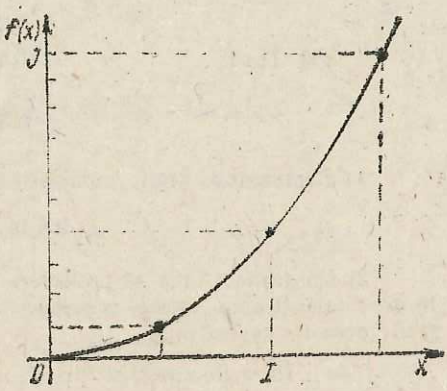


Fig. II.11

4. ALTE FUNCȚII

Orice număr real x, diferit de zero, are un invers, care a fost notat $\frac{1}{x}$ sau x^{-1}. Să considerăm tabelul:

x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Putem considera funcția

$$f: \mathbf{R}\setminus\{0\} \to \mathbf{R},\ f(x) = \frac{1}{x}.$$

Graficul acestei funcții (vezi figura 12) este o *hiperbolă*.

Fie x un număr real $\geqslant 0$; putem extrage rădăcina pătrată din x; ca rezultat obținem numărul real $\sqrt{x}$.

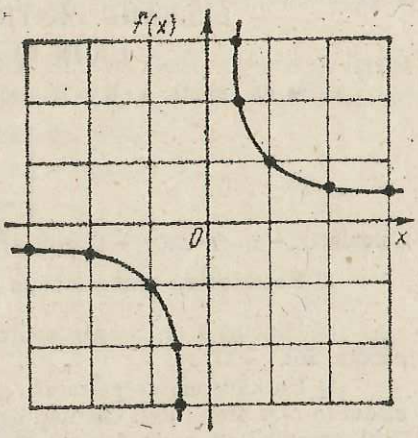


Fig. II.12

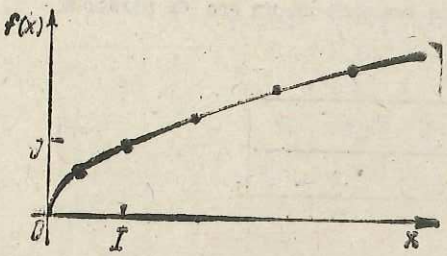


Fig. II.13

Să completăm un tabel (consultați și tabelul de la sfîrșitul manualului):

x	0	$\frac{1}{4}$	1	2	3	4
$\sqrt{x}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\sqrt{2}=1{,}41...$	$\sqrt{3}=1{,}73...$	2

Funcția $f:[0;\ +\infty) \to \mathbf{R}$ descrisă de $f(x)=\sqrt{x}$ are graficul prezentat în figura 13.

EXERCIȚII

1) Reprezentați grafic, completînd mai întîi un tabel de valori, funcția:

$$f:\mathbf{R}\setminus\{0\}\to\mathbf{R},\ f(x)=\frac{2}{x}.$$

2) Un arhitect vrea să proiecteze o cameră dreptunghiulară avînd suprafața de 15 m². Stabiliți cum variază lungimea camerei în funcție de lățimea ei. Reprezentați grafic această dependență.

3) Între București și Ploiești, pe șosea, sînt 60 km. În cît timp parcurge un automobil această distanță, mergînd cu viteza (constantă) v? Reprezentați grafic dependența între durata călătoriei și viteză.

4) Știm că tensiunea curentului electric din rețea este de 220 V. Făcîndu-l să treacă printr-un rezistor de rezistență R (ohmi), intensitatea sa I variază astfel:

$$I(R)=\frac{220}{R}.$$

a) Trasați graficul dependenței lui I față de R.

b) Rezistorul este protejat de o siguranță fuzibilă de $5A$. Care este valoarea minimă a rezistenței rezistorului, ce nu provoacă întreruperea curentului prin distrugerea siguranței?

5) Reprezentați grafic funcția $f:[1,\ 3]\to\mathbf{R},\ f(x)=\frac{3}{x}$.

LUCRARE PENTRU VERIFICAREA ÎNSUȘIRII UNOR CUNOȘTINȚE DE BAZĂ

1) Se dă funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, descrisă de:

$$f(x)=\begin{cases} x-3 \text{ pentru } x\leqslant 0,\\ 2-x \text{ pentru } 0<x\leqslant 2,\\ -x^2 \text{ pentru } x>2.\end{cases}$$

Calculați $f(-3)$, $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$.

2) Reprezentați grafic funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{1}{2}x^2$.

3) Punctul A (2, 3) aparține graficului funcției liniare date de $f(x)=2x-7$? Dar punctul $B(2;\ -3)$?

4) Un kilogram de portocale costă 18 lei. Alcătuiți graficul funcției care exprimă modul în care prețul unei cantități de portocale depinde de masa acesteia. Folosind graficul, stabiliți cît costă 700 g portocale. Cît cîntărește o pungă cu portocale care a costat 21,60 lei?

Capitolul III

POLINOAME ȘI FRACȚII RAȚIONALE

1. POLINOAME. OPERAȚII CU POLINOAME

Am învățat în clasele a VI-a și a VII-a să facem calcule cu numere reprezentate prin litere și în primul rînd cu polinoame.

Să ne reamintim că, de exemplu,

$$X^3Y^2 - 2Y^4 + 3$$

este un polinom în nedeterminatele X și Y, de gradul 5;

$$Z^2 + \frac{1}{2}Z + 4$$

este un polinom în nedeterminata Z, de gradul 2. De asemenea, numerele diferite de 0 pot fi considerate polinoame de gradul 0 în orice nedeterminată; pentru uniformitate, vom considera că numărul 0 este polinom (dar că nu are grad). Numerele reale considerate ca polinoame vor fi numite **polinoame constante**.

Ne vom ocupa în special cu polinoame într-o singură nedeterminată; aceasta va fi notată de obicei cu litera X.

Am învățat în clasele anterioare că orice polinom poate fi scris în formă canonică. De asemenea, am învățat să efectuăm trei operații cu polinoame: adunarea, scăderea și înmulțirea; să le repetăm prin:

EXERCIȚII

1) Scrieți în formă canonică polinoamele:

a) $\frac{1}{2}X^2 - \frac{3}{2}X + X^3 + 5$; b) $X + 1 + 2X^2 + 3X^3$; c) $1 - 2X + 4X^3 - 8X^7$; d) $-X^5 - X + X^3 - X^2$.

2) Scrieți în formă canonică suma polinoamelor:

a) $7X^2 - 3X + 5$ și $2X^2 + 7$; b) $2X - 5$ și $4X^2 - 3X + 6$; c) $1 - X + X^2 - X^3 + X^4$ și $1 + X + X^2 + X^3 + X^4$; d) $X^2 - X + 1$, $X^2 + X + 1$ și $X^3 - 2X^2 + 1$.

3) Ce polinom trebuie adunat cu $X^3 + 2X - 3$ pentru a obține ca rezultat $X^4 - X^2 + 1$?

4) Efectuați calculele:

a) $(3X^2 - 3X + 5) - (2X^2 - 3X + 4)$; b) $(X^3 + 2X - 6) - (3X^3 - X^2 + 2)$; c) $(5X^2 + 6X + 3) - (X^2 + 2X) + (2X^2 + 5)$.

5) Efectuați înmulțirile:

a) $3X^2 \cdot (4X - 1)$; b) $(4X^3 - 5X - 1) \cdot 2X^2$; c) $(X^2 - 7X - 3) \cdot (2X - 1)$; d) $(X^4 + X^3 - 8) \cdot (2X^2 - 3X + 1)$.

2. ÎMPĂRȚIREA POLINOAMELOR

Fie monoamele $6X^5$ și $2X^3$. Constatăm că:

$$6X^5 = 3X^2 \cdot 2X^3;$$

putem scrie astfel:

$$6X^5 : 2X^3 = 3X^2.$$

Observați relația între gradele monoamelor: $5 - 3 = 2$.

În general, dacă $m \geqslant n$ și $b \neq 0$, atunci:

$$aX^m : bX^n = (a : b)\, X^{m-n}$$

care se mai scrie și:

$$aX^m : bX^n = \frac{a}{b}\, X^{m-n}.$$

La fel procedăm și în cazul unor monoame în mai multe nedeterminate; de exemplu:

$$12X^3Y^2 : 4XY = (12 : 4)X^{3-1}Y^{2-1} = 3X^2Y,$$

$$(-14XY^3Z) : 2XY^2 = (-14 : 2)X^{1-1}Y^{3-2}Z^{1-0} = -7YZ,$$

$$(-3X^2Y^3) : (-2Y) = ((-3) : (-2))X^{2-0}Y^{3-1} = \frac{3}{2}\, X^2Y^2 = 1{,}5X^2Y^2,$$

$$22X^4 : 11 = (22 : 11)\, X^{4-0} = 2X^4.$$

EXERCIȚII

1) Efectuați împărțirile:

a) $8X^4 : (-2X^2)$; b) $(-6X^5) : 4X^3$; c) $(-5X^6) : (-X^2)$; d) $4X^7 : 8X$; e) $25X^2 : 5X$; f) $5X^3 : (-10X)$.

2) Efectuați:

a) $(-15X^4Y^2) : (-5X^2Y^2)$; b) $4X^5Y^2 : \left(-\frac{2}{3}\, Y^3Y\right)$; c) $3XY^4 : 2XY$; d) $3X^3Y^2 : 4X^3Y^2$; e) $25X^3Y^3 : 5XY^2$; f) $(-6X^5Y^2) : 3X^2Y$.

Fie polinoamele $P(X) = 2X^2 + 4X$ și $Q(X) = X + 2$. Constatăm că $P(X) = Q(X) \cdot 2X$; putem spune că polinomul $C(X) = 2X$ este *cîtul* împărțirii polinomului $P(X)$ la $Q(X)$.

Alt exemplu: deoarece

$$X^2 - 4 = (X - 2) \cdot (X + 2),$$

putem spune că polinomul $X + 2$ este cîtul împărțirii polinomului $X^2 - 4$ la polinomul $X - 2$.

Să încercăm să împărțim polinomul $P(X) = 2X^3 + 5X + 1$ la polinomul $Q(X) = X^2 + X$. Cîtul lor ar trebui să aibă gradul $3 - 2 = 1$. Să presupunem că acest cît este polinomul $C(X) = aX + b$; atunci:

$$2X^3 + 5X + 1 = (X^2 + X) \cdot (aX + b),$$

de unde: $2X^3 + 5X + 1 = aX^3 + (a + b)X^2 + bX$.

Identificînd coeficienții, obținem:

$2 = a$ (coeficienții lui X^3),
$0 = a + b$ (coeficienții lui X^2),
$5 = b$ (coeficienții lui X),
$1 = 0$ (termenii liberi),

ceea ce este absurd.

Presupunerea făcută ne-a condus la o concluzie absurdă; ea este deci falsă. Nu putem împărți „fără rest" polinomul $2X^3 + 5X + 1$ la $X^2 + X$.

Să observăm însă că:

$$2X^3 + 5X + 1 = (X^2 + X) \cdot (2X - 2) + 7X + 1;$$

astfel putem spune că prin împărțirea lui $2X^3 + 5X + 1$ la $X^2 + X$ am obținut *cîtul* $2X - 2$ și *restul* $7X + 1$.

Să observăm că gradul restului este 1, mai mic decît gradul împărțitorului $X^2 + X$, care este 2.

Practic, procedăm astfel:

— împărțim monomul $2X^3$ la monomul X^2 și obținem $2X$;

— înmulțim pe $2X$ cu $X^2 + X$ și obținem produsul parțial $2X^3 + 2X^2$ pe care-l scădem din deîmpărțit;

— deîmpărțitul se înlocuiește cu $-2X^2 + 5X + 1$; împărțim monomul $-2X^2$ la monomul X^2, obținînd -2;

— înmulțim pe -2 cu $X^2 + X$ și obținem produsul parțial $-2X^2 - 2X$, pe care-l scădem din $-2X^2 + 5X$;

— deîmpărțitul se înlocuiește cu $7X + 1$; deoarece monomul $7X$ nu mai poate fi împărțit la monomul X^2, împărțirea s-a terminat. Cîtul este $2X - 2$, iar restul este $7X + 1$.

$$\begin{array}{rl|l}
 & 2X^3 \qquad + 5X + 1 & X^2 + X \\ \cline{3-3}
(-) & + 2X^3 + 2X^2 \qquad\quad & 2X - 2 \\ \cline{1-2}
 & -2X^2 + 5X + 1 & \text{cîtul} \\
(-) & -2X^2 - 2X \qquad & \\ \cline{1-2}
 & 7X + 1 & \text{restul}
\end{array}$$

Se obișnuiește să se schimbe semnul fiecărui produs parțial, efectuîndu-se adunări în loc de scăderi; calculele se aranjează astfel:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
2X^3 & & +5X & +1 & X^2+X \\ \cline{5-5}
-2X^3 & -2X^2 & & & 2X-2 \\ \cline{1-2}
 & -2X^2 & +5X & & \\
 & 2X^2 & +2X & & \\ \cline{2-3}
 & & 7X & +1 & \\
\end{array}
$$

Urmăriți etapă cu etapă, împărțirea polinomului $81X^4-10X^2+35X+1$ la polinomul $9X^2+X+4$:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
81X^4 & & -10X^2 & +35X & +1 & 9X^2+X+4 \\ \cline{6-6}
-81X^4 & -9X^3 & -36X^2 & & & 9X^2-X-5 \\ \cline{1-3}
 & -9X^3 & -46X^2 & +35X & & \\
 & 9X^3 & +X^2 & +4X & & \\ \cline{2-4}
 & & -45X^2 & +39X & +1 & \\
 & & 45X^2 & +5X & +20 & \\ \cline{3-5}
 & & & 44X & +21 & \\
\end{array}
$$

Deci cîtul împărțirii este $9X^2-X-5$, iar restul este $44X+21$.

În general, se poate demonstra o *teoremă a împărțirii cu rest* pentru polinoame. Aceasta se enunță astfel:

TEOREMĂ. Fie polinoamele $P(X)$ de gradul p și $Q(X)$ de gradul q, cu coeficienți numere reale.

Există un polinom $C(X)$ și un polinom $R(X)$ astfel încît

$$P(X)=Q(X)\cdot C(X)+R(X)$$

și astfel încît gradul polinomului $R(X)$ să fie mai mic decît q. Polinoamele $C(X)$ și $R(X)$ cu aceste proprietăți sînt unice.

Observație. Înainte de efectuarea împărțirii, atît deîmpărțitul cît și împărțitorul trebuie scrișii în formă canonică.

EXERCIȚII

1) Efectuați împărțirile:

a) $(3X^3-6X^2+2X):3X$; b) $(6X^5-5X^4+4X^3):(-2X^2)$.

2) Efectuați împărțirile:

a) $(X^2-5):(X-2)$; b) $(3X^2+20):(X-3)$; c) $(3X^2-27):(X-3)$; d) $(8X^3-2):(2X-1)$; e) $(25-30X+9X^2):(3X-5)$; f) $(X^3-6X^2+11X-10):(X-4)$.

3) Efectuați împărțirile:

a) $(X^2+1):(X+1)$; b) $(X^3+1):(X+1)$; c) $(X^4+1):(X+1)$; d) $(X^5+1):(X+1)$; e) $(X^6+1):(X+1)$; f) $(X^7+1):(X+1)$. Puteți spune care va fi cîtul și restul împărțirii lui $X^{19}+1$ la $X+1$?

4) Efectuați împărțirile:

a) $(X^3+1):(X+2)$; b) $(X^3+1):(X^2+2)$; c) $(X^3+1):(X^3+2)$. Ce observați?

5) Efectuați împărțirile: $(X^4+X^2+1):(X^2+X+1)$ și $(X^4+X^2+1):(X^2-X+1)$. Ce observați?

6) Fie $C(X)$ cîtul împărțirii polinomului X^3+X^2+X+1 la X^2-X+2. Efectuați împărțirea polinomului X^3+X^2+X+1 la $C(X)$. Este adevărat că obținem cîtul X^2-X+2? De ce?

7) Efectuați împărțirile:

a) $(X^5-2X^3+X+2):(X^3-X^2-X+1)$; b) $(X^3+2-X-2X^2):(4-4X+X^2)$; c) $(X^4-7X^3+6X):(X^2-2)$; d) $(18X^4-8X^3+4X^2-1):(4X^2+X-1)$.

8) Efectuați împărțirile polinoamelor în nedeterminata X (scrieți-le mai întîi în formă canonică):

a) $(X^4-Y^4):(X+Y)$; b) $(15X^2+26XY+8Y^2):(3X+4Y)$; c) $(2X^3+3X^2Y+2XY-Y^2):(X^2-Y)$; d) $(6X^2-2XY-8Y^2+5):(3X+5Y+2)$; e) $(9X^3-6X^2Y-2XY^2+4Y^3):(3X+2Y)$.

9) Aflați restul împărțirii polinomului $X^2-6XY+9Y^2$ la polinomul X^2-9Y^2, considerîndu-le:

a) polinoame în nedeterminata X; b) polinoame în nedeterminata Y.

10) Efectuați calculele:

$[(X^2-9)\cdot(X^2+2X)]:[(X+2)(X-3)]$; $(X^2-3X)^2:(X+2)^2$.

3. DIVIZIBILITATEA POLINOAMELOR. POLINOAME IREDUCTIBILE

Definiție. Vom spune că polinomul $Q(X)$ **divide** polinomul $P(X)$ dacă există un polinom $C(X)$ astfel încît $P(X)=Q(X)\cdot C(X)$ (adică dacă restul împărțirii lui $P(X)$ la $Q(X)$ este polinomul nul). În acest caz vom nota $Q(X)\mid P(X)$ sau $Q\mid P$ (și vom citi „Q divide pe P").

Dacă $Q\mid P$, vom mai spune că polinomul P este **multiplu** al polinomului Q, sau că P se divide cu Q.

De exemplu, $X+1$ divide pe X^2-1, deoarece $X^2-1=(X+1)\cdot(X-1)$; scriem $(X+1)\mid(X^2-1)$.

Polinomul $2X^3-1$ divide polinomul $2X^5+6X^3-X^2-3$, deoarece $2X^5+6X^3-X^2-3=(2X^3-1)\cdot(X^2+3)$.

Polinomul constant 2 divide polinomul $2X+4$, deoarece $2X+4=2\cdot(X+2)$; constanta 2 divide și polinomul $X+1$, deoarece $X+1=2\cdot\left(\frac{1}{2}X+\frac{1}{2}\right)$.

Polinomul X nu divide polinomul X^2+1, deoarece împărțind pe X^2+1 la X obținem restul 1; la fel, $X+3$ nu divide pe X^3+3X-5.

Observație. Polinomul constant 2 divide polinomul constant 3, deoarece $3=2\cdot\frac{3}{2}$. Nu confundați divizibilitatea polinoamelor cu divizibilitatea numerelor naturale!

EXERCIȚII

1) Stabiliți dacă polinomul Q divide sau nu polinomul P, unde a) $P = 4X^5 - 3$, $Q = 3X - 2$; b) $P = X^3 - 2X + 1$, $Q = X - 1$; c) $P = X^3 - 8$, $Q = X^2 + 2X + 4$; d) $P = X^5 + 1$, $Q = X - 1$; e) $P = X^6 - 1$, $Q = X^2 + X + 1$; f) $P = 3X^2 - 14X + 15$, $Q = 2X - \frac{10}{3}$.

2) Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $(X^2 - 1) \mid (X - 1)$; b) $(X + 1) \mid (X^2 + 1)$; c) $(X - 2) \mid (X^2 - X - 2)$; d) $3 \mid 4X$; e) $(X + 1) \mid (2X - 1)$.

3) Pentru ce valori ale lui m, polinomul $2X^5 + 5X^2 + m$ se divide cu polinomul $X + 2$?

4) Fie polinomul $P(X) = X^3 - X^2 + X - 1$; scrieți trei polinoame care îl divid. Aceeași problemă pentru polinomul $X^3 - 3X^2 + 9X - 27$.

5) Arătați că dacă polinomul R divide polinomul Q, iar polinomul Q divide polinomul P, atunci R divide pe P. Ce proprietate a relației de divizibilitate între polinoame este aceasta?

6) Arătați că dacă Q divide pe P și pe R, atunci Q îl divide și pe $P + R$.

Definiție. Vom spune că un polinom $P(X)$ este **reductibil** dacă poate fi scris ca produs de polinoame:

$$P(X) = Q(X) \cdot R(X),$$

factorii Q și R având gradele ≥ 1.

De exemplu, polinomul $X^2 - 1$ este reductibil:

$$X^2 - 1 = (X + 1) \cdot (X - 1);$$

de asemenea, polinomul $X^2 + X - 2$ este reductibil:

$$X^2 + X - 2 = (X - 1) \cdot (X + 2).$$

Și polinomul $X^4 + 1$ este reductibil:

$$X^4 + 1 = (X^2 + \sqrt{2}\,X + 1) \cdot (X^2 - \sqrt{2}\,X + 1).$$

Ca exemple de polinoame ce nu sînt reductibile avem în primul rînd polinomul nul; apoi polinoamele constante $\neq 0$; celelalte polinoame ce nu sînt reductibile vor fi numite **ireductibile**.

Observați schema de clasificare a polinoamelor:

— Polinoame ireductibile
— Polinomul nul
— Polinoame constante $\neq 0$
— Polinoame reductibile

Comparați-o cu schema de clasificare a numerelor naturale:

— Numere prime
— Numărul 0
— Numărul 1
— Numere compuse

Vom arăta că polinoamele de gradul 1 sînt ireductibile.

Să considerăm polinomul de gradul 1:

$$aX + b, \quad a \neq 0.$$

Dacă am presupune că este reductibil:

$$aX + b = Q(X) \cdot R(X)$$

cu gradele lui Q și R mai mari decît 1, atunci din compararea gradelor am obține $1 \geqslant 1 + 1$, ceea ce este absurd. Deci orice polinom de gradul 1

$$aX + b, \quad a \neq 0$$

este ireductibil.

EXERCIȚII

1) Descompuneți în factori polinoamele:

a) $X^2 - 1$; b) $X^3 - 1$; c) $X^4 - 1$; d) $X^6 - 1$; e) $X^3 - 1$; f) $X^9 - 1$.

2) Precizați care polinoame sînt reductibile:

a) $X^2 - 4$; b) $X^2 - 2$; c) $X^3 - 4X + 4$; d) $2X + 2$; e) $4X - 2$; f) $X^3 + 8$; g) $X^3 + 2$; h) $X^4 + 1$.

3) Fie $P(X) = X^3 + 2X^2 - 3X - 1$. Calculați $P(-2)$, $P(-1)$, $P(0)$, $P(1)$, $P(\sqrt{2})$, $P(\sqrt{3})$ și $P(2)$. (Notăm cu $P(a)$ numărul obținut înlocuind în polinom nedeterminata X cu numărul a și efectuînd operațiile indicate; de exemplu, $P(3) = 3^3 + 2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 - 1 = 35$.)

4) Fie $P(X) = X^3 - 2X^2 - 4X - 5$ și $Q(X) = [(X - 2) \cdot X - 4] \cdot X - 5$. Calculați $P(a)$ și $Q(a)$ pentru $a \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Ce observați? De ce?

4. ÎMPĂRȚIREA PRIN BINOMUL $X - a$

Să luăm de exemplu polinomul $P(X) = X^3 - X + 1$ și să-l împărțim la binomul $X - 2$:

$$\begin{array}{r|l}
X^3 \qquad\quad -X + 1 & X - 2 \\ \cline{2-2}
-X^3 + 2X^2 \qquad\qquad & X^2 + 2X + 3 \\ \cline{1-1}
2X^2 - X \qquad & \\
-2X^2 + 4X \qquad & \\ \cline{1-1}
3X + 1 & \\
-3X + 6 & \\ \cline{1-1}
7 &
\end{array}$$

Obținem cîtul $X^2 + 2X + 3$ și restul 7. Pe de altă parte, să calculăm numărul $P(2)$: $P(2) = 2^3 - 2 + 1 = 7$. Observăm că restul împărțirii este exact $P(2)$. Este oare aceasta o întîmplare?

Să considerăm un polinom $P(X)$ și să-l împărțim (cu rest) la binomul $X - a$; teorema împărțirii cu rest ne spune că există polinoamele $C(X)$ și $R(X)$ astfel încît:

a) $P(X) = (X - a) \cdot C(X) + R(X)$.

b) gradul lui R este mai mic decît gradul lui $X - a$.

Însă gradul lui $X - a$ este 1; așadar polinomul rest $R(X)$ este constant: $R(X) = r$. Putem deci scrie:

$$P(X) = (X - a) \cdot C(X) + r.$$

Putem afla restul r fără a face împărțirea? În egalitatea de mai sus să înlocuim nedeterminata X prin numărul a:

$$P(a) = (a - a) \cdot C(a) + r.$$

Deoarece $a - a = 0$, obținem că $r = P(a)$. Am dovedit de fapt următoarea:

Teoremă. Restul împărțirii polinomului $P(X)$ la binomul $X - a$ se obține calculînd valoarea $P(a)$.

Cum calculăm valoarea $P(a)$? Să luăm cîteva exemple.

Fie $P(X) = X^2 + 2X + 3$; atunci $P(a) = a \cdot a + 2 \cdot a + 3$. Observăm că pentru a obține pe $P(a)$ trebuie să efectuăm două înmulțiri, apoi două adunări. Dacă scriem însă $P(X) = (X + 2) \cdot X + 3$, atunci pentru a obține pe $P(a) = (a + 2) \cdot a + 3$ efectuăm doar o înmulțire și două adunări.

Alt exemplu. Fie polinomul $T(X) = X^3 + 5X^2 - 6X + 4$; atunci $T(a) = a \cdot (a \cdot a) + 5 \cdot (a \cdot a) - 6 \cdot a + 4$. Pentru a-l obține pe $T(a)$ sînt necesare deci 4 înmulțiri și 3 adunări (scăderea este considerată adunare). Putem proceda mai economic, calculînd cu formula $T(X) = [(X + 5) \cdot X - 6] \cdot X + 4$; efectuăm doar 2 înmulțiri și 3 adunări.

EXERCIȚIU REZOLVAT

Aflați valorile lui m și n astfel încît polinomul $P(X) = X^2 + mX + n$ să dea restul 2 la împărțirea cu $X - 1$ și restul 5 la împărțirea cu $X - 3$. Ce rest vom obține dacă vom împărți polinomul $P(X)$ la $X - 2$?

Rezolvare. Scriem $P(1) = 2$ și $P(3) = 5$, adică

$$\begin{cases} 1 + m + n = 2, \\ 9 + 3m + n = 5. \end{cases}$$

Rezolvînd acest sistem de ecuații, obținem $m = -\frac{5}{2}$, $n = \frac{7}{2}$.

Putem calcula acum restul împărțirii polinomului la $X - 2$:

$$P(2) = 2^2 - \frac{5}{2} \cdot 2 + \frac{7}{2} = \frac{5}{2}.$$

EXERCIȚII

1) Aflați restul împărțirii polinomului $5X^4 - 21X^2 + 7$ la binomul

a) $X - 1$; b) $X - 2$; c) $X + 1$; d) $X - \frac{1}{2}$; e) $X - \sqrt{2}$.

2) Aflați restul împărțirii la binomul $X - 2$ a polinoamelor:

a) $2X^2 + X - 10$; b) $3X^4 - 4X^3 - 5X - 2$; c) $2X^4 - 3X + 5$; d) $4X^3 - X^2 + 5$; e) $3X^2 - 8X - 3$.

3) Aflați restul împărțirii polinomului $8X^3 - mX^2 + 15$ la $X - 4$, știind că împărțit la $X - 2$ dă restul -3.

4) Aflați restul împărțirii polinomului $X^3 + 3aX + a - 1$ la binomul $X - a$, știind că prin împărțirea la $X - 3$ dă restul 5.

5) Împărțind polinomul $2X^3 - mX^2 + nX - 16$ la $X - 8$ și $X + 1$, obținem în ambele cazuri restul -2. Ce rest vom obține dacă-l vom împărți la $X - 1$?

6*) Arătați că dacă împărțind polinomul $P(X)$ la $X - \frac{u}{v}$ obținem restul r, atunci împărțindu-l la $vX - u$ obținem același rest r.

În clasa a V-a am învățat criterii de divizibilitate cu anumite numere prime: 2, 3, 5. Vom stabili acum un criteriu de divizibilitate cu polinomul ireductibil $X - a$.

Teoremă. Un polinom $P(X)$ este divizibil cu binomul $X - a$ dacă și numai dacă $P(a) = 0$.

Demonstrație. Dacă $P(X)$ este divizibil cu $X - a$, atunci restul împărțirii lui $P(X)$ la $X - a$ este 0; însă acest rest coincide cu $P(a)$.

Reciproc, dacă $P(a) = 0$, atunci teorema împărțirii cu rest ne asigură că există un polinom $C(X)$ astfel încît $P(X) = (X - a) \cdot C(X)$, ceea ce înseamnă că $P(X)$ se divide cu $X - a$. Teorema este demonstrată.

Observație. Dacă într-un polinom $P(X)$ suma coeficienților este 0, atunci $P(1) = 0$, deci polinomul este divizibil cu $X - 1$. De exemplu, polinoamele

$$2X^2 - 3X + 1,\ 5X^5 - 3X^4 - 2X^3 + 4X^2 - 2X - 2,\ X^3 - 2X + 1$$

se divid cu $X - 1$.

EXERCIȚII

1) Care dintre polinoamele de mai jos sînt divizibile cu $X - 1$?

a) $7X^3 - 5X^2 + 4$; b) $6X^3 - 5X - 1$; c) $42X^2 + 27X - 69$; d) $X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 5X + 3$; e) $2X^3 - 3X^2 + 8X - 5$.

2) Verificați dacă primul polinom este divizibil sau nu cu al doilea; în caz afirmativ, aflați cîtul:

a) $2X^2 + X - 10$ și $X + \frac{5}{2}$; b) $4X^3 - 5X^2 + 9X + 1$ și $X - 3$; c) $8X^4 - 2X^3 + 4X^2 - 5X - 38$ și $X - 2$; d) $2X^4 - 3X + 5$ și $X - 3$.

3) Să presupunem că $a \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Pentru ce valori ale lui a, polinomul:

a) $X^3 + X^2 - 9X - 9$; b) $X^3 + 3X^2 - 4X - 12$; c) $X^3 - 3X^2 - X + 3$; d) $X^3 - 4X^2 - 9X + 36$; e) $X^4 - 10X^2 + 9$; f) $X^4 + 6X^3 + 11X^2 + 6X$, este divizibil cu $X - a$?

5. DESCOMPUNEREA POLINOAMELOR ÎN FACTORI. FORMULE SPECIALE

Scrierea unui polinom ca produs de factori ireductibili prezintă aceleaşi avantaje ca şi scrierea unui număr natural ca produs de factori primi; este utilă în special atunci cînd efectuăm operaţii cu fracţii.

Nu întotdeauna putem descompune *efectiv* un polinom în factori ireductibili; de cele mai multe ori ne limităm la a-l descompune în doi factori.

În clasa a VII-a am învăţat cîteva formule speciale, care ne ajută în descompunerea în factori a polinoamelor. Să le reamintim:

— formula de scoatere a factorului comun: $\boxed{a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)}$

— formula de restrîngere a pătratului binomului: $\boxed{a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2}$

— formula de descompunere în factori a diferenţei pătratelor: $\boxed{a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)}$

Să folosim aceste formule pe cîteva exemple.

Exemplul 1. Polinomul $X^8 + 4X^6$ se descompune în factori în mod evident: $X^6(X^2 + 4)$. La fel, polinomul $\frac{1}{2}X^3 + \frac{1}{6}X^2 - \frac{1}{3}X$ se descompune de exemplu astfel: $X \cdot \left(\frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{6}X - \frac{1}{3}\right)$, sau astfel:

$$\frac{1}{6}X \cdot (3X^2 + X - 2).$$

Exemplul 2. Constatăm imediat că polinomul $X^8 + 4X^4 + 4$ este pătratul unui binom: $(X^4 + 2)^2$. La fel polinomul $(5X + 2)^2 + 2(5X + 2) + 1$ este pătratul lui $(5X + 2) + 1 = 5X + 3$.

Exemplul 3. Polinomul $25X^4 - 9$ poate fi descompus în produsul $(5X^2+3)(5X^2 - 3)$, sau în produsul $(5X^2+3)(\sqrt{5}X+\sqrt{3})(\sqrt{5}X-\sqrt{3})$; ultima descompunere este o descompunere în factori ireductibili.

EXERCIŢII

1) Eliminaţi parantezele:

a) $(2X + 4)^2$; b) $(2X - 3)(X + 5)$; c) $5X\left(\frac{1}{5}X + 2\right)^2$; d) $2X(3X - 8)(X - 3)$; e) $(X - 1)(X - 3)(X - 5)$.

2) Scoateţi factor comun:

a) $14X^5 - 3X^3$; b) $8X^4 + 4X^3 + X^2$; c) $(3X - 1)^2 + 5(3X - 1)$; d) $(6X + 1)^4 + 3(6X + 1)^3$; e) $2\left(X + \frac{1}{2}\right) + \left(X + \frac{1}{2}\right)^2$; f) $(X+3)(X-4)+(X-4)^2+(X+6)(X-4)$.

3) Completați pînă la pătratul unui binom:

a) $9X^4 + \ldots + 25$; b) $9X^4 - \ldots + 100$; c) $25 - 10X^3 + \ldots$; d) $16 + 24X + \ldots$; e) $4X^6 - 12X^3 + \ldots$.

4) Restringeți:

a) $X^6 + X^3 + 0{,}25$; b) $9X^4 - 12X^2 + 4$; c) $9 - 12X^2 + 4X^4$; d) $\frac{1}{2}X^2 + X + \frac{1}{2}$; e) $12X^2 - 12X + 3$.

5) Descompuneți în factori:

a) $49X^6 - 16$; b) $(3X + 2)^2 - (2X + 3)^2$; c) $(5X + 1)^2 - 16X^2$; d) $8X^4 - 2X^2$; e) $25X^5 - 16X^3$.

6*) Descompuneți în factori:

a) $X^2 - 2$; b) $X^4 - 3X^2$; c) $2X^3 - X$.

O altă formulă specială, mult utilizată în descompunerile în factori, este **formula diferenței cuburilor:**

$$\boxed{a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)}.$$

Asemănătoare este și formula sumei cuburilor:

$$\boxed{a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)}.$$

Observați cu atenție deosebirile dintre cele două formule.

EXERCIȚII

1) Descompuneți în factori polinoamele:

a) $8X^3 - 27$; b) $(X + 2)^3 + (X - 2)^3$; c) $\frac{1}{64}X^4 - X$; d) $X^6 - 27X^3$; e) $8X^3 + 125$; f) $16X^2 + \frac{1}{4}$.

2) Descompuneți în factori:

a) $X^3 + 2X^2(X - 1) - 1$; b) $X^6 + 2X^3 + 1$; c) $X^5 + X^3 - X^2 - 1$; d) $X^5 - X^3 + X^2 - 1$.

3*) Descompuneți în factori:

a) $X^3 - 2$; b) $X^3 - 3$; c) $X^3 - 4$; d) $X^3 + 2$.

Uneori putem descompune un polinom în factori căutîndu-i un factor de gradul 1.

De exemplu, fie polinomul $P(X) = X^3 - 5X^2 + 8X - 4$. Suma coeficienților săi, $1 - 5 + 8 - 4$, este 0. Deci polinomul se divide cu $X - 1$. Efectuînd împărțirea, obținem $P(X) = (X - 1) \cdot (X^2 - 4X + 4)$ și observăm că putem descompune $P(X) = (X - 1)(X - 2)^2$.

Alt exemplu. Să descompunem în factori polinomul $T(X) = X^4 - 7X^2 - 12X + 18$. Deoarece suma coeficienților săi este 0, polinomul se

divide cu $X - 1$; $T(X) = (X - 1)(X^3 + X^2 - 6X - 18)$. Deoarece $3^3 + 3^2 - 6 \cdot 3 - 18 = 0$, putem descompune $X^3 + X^2 - 6X - 18 = (X - 3)(X^2 + 4X + 6)$. Deci am descompus: $T(X) = (X - 1)(X - 3)(X^2 + 4X + 6)$.

Din exemplele de mai sus rezultă că, în general, descompunerea în factori a unui polinom este dificil de executat. Nu există reguli generale de lucru; trebuie folosite toate posibilitățile avute la îndemînă, uneori chiar artificii de calcul ce denotă ingeniozitate.

Observație. Dacă un polinom are toți coeficienții numere întregi și se divide cu $X - a$, unde $a \in \mathbf{Z}$, atunci a este divizor al termenului liber al polinomului. Verificați aceasta pe exemplele de mai sus.

EXERCIȚII

1) Descompuneți în factori:

a) $X^2 - X - 6$; b) $X^2 + X - 6$; c) $X^2 - 10X + 16$; d) $X^2 - 7X + 12$; e) $X^2 - 9X + 18$; f) $3X^2 - 7X + 2$.

2) Descompuneți în factori:

a) $X^3 - 7X + 6$; b) $X^3 - 6X^2 + 11X - 6$; c) $X^3 - 7X - 36$; d) $X^3 - 3X + 2$; e) $X^3 - 12X + 16$; f) $4X^3 - 4X^2 - 9X + 9$.

3) Descompuneți în factori:

a) $X^4 - 25X^2 + 60X - 36$; b) $X^4 + 6X^3 + 11X^2 + 6X - 24$; c) $X^4 - 4X^3 + 3X^2 + 4X - 4$; d) $X^4 - 5X^2 + 4$; e) $X^4 + 4X^2 - 32$; f) $X^5 - X^3 - 8X^2 + 8$.

Polinoamele în mai multe nedeterminate se descompun mult mai greu în factori. Nu există metode generale; reușita descompunerii depinde foarte mult de utilizarea adecvată a formulelor speciale.

De exemplu, pentru a descompune în factori polinomul

$$X^2 + 2XY + Y^2 + XZ + YZ,$$

grupăm termenii în două grupe: prima grupă (formată din primii trei termeni) este pătratul unui binom; în a doua grupă scoatem factor comun pe Z. Polinomul se scrie: $(X + Y)^2 + (X + Y)Z$. Scoțind încă o dată factor comun, am descompus în factori: $(X + Y)(X + Y + Z)$.

Alt exemplu: fie polinomul $9X^2 - 6XY + Y^2 - 9$. Primii trei termeni pot fi restrînși; polinomul devine: $(3X - Y)^2 - 9$. Folosind formula diferenței pătratelor, am reușit descompunerea polinomului în factori:

$$(3X - Y + 3)(3X - Y - 3).$$

Alte exemple:

$X^4 - 3X^2Y^2 + Y^4 = X^4 - 2X^2Y^2 + Y^4 - X^2Y^2 = (X^2 - Y^2)^2 - (XY)^2 = (X^2 - Y^2 + XY)(X^2 - Y^2 - XY)$;

$X^2Y^2 + X^2 - Y^2 - 1 = X^2(Y^2 + 1) - (Y^2 + 1) = (X^2 - 1)(Y^2 + 1) = (X + 1)(X - 1)(Y^2 + 1)$;

$X^2 - Y^2 - Z^2 + 2YZ - 2X + 1 = (X^2 - 2X + 1) - (Y^2 - 2YZ + Z^2) = (X - 1)^2 - (Y - Z)^2 = (X + Y - Z - 1)(X - Y + Z - 1)$;

$X^2 - 5XY + 6Y^2 = X^2 - 2XY - 3XY + 6Y^2 = X(X - 2Y) - 3Y(X - 2Y) = (X - 3Y)(X - 2Y)$;

$X^4 + X^2Y^2 + Y^4 = X^4 + 2X^2Y^2 + Y^4 - X^2Y^2 = (X^2 + Y^2)^2 - (XY)^2 = (X^2 + XY + Y^2)(X^2 - XY + Y^2)$;

$X^5 - X^4Y + X^3Y^2 - X^2Y^3 + XY^4 - Y^5 = X^4(X - Y) + X^2Y^2(X - Y) + Y^4(X - Y) = (X^4 + X^2Y^2 + Y^4)(X - Y) = (X^2 + XY + Y^2)(X^2 - XY + Y^2)(X - Y)$.

EXERCIȚII

1) Descompuneți în factori (toate literele care apar sînt considerate nedeterminate):

a) $X^3 - X^2Y + XY^2 - Y^3$; b) $A^3 + A^2B + AB^2 + B^3$; c) $X^2 + AX + BX + AB$; d) $XY + 3X + 5Y + 15$; e) $X^2Y + XY^2 + aXY - a^2X - a^2Y - a^3$; f) $X^3 + aX^2 + 3a^2X + 3a^3$.

2) Descompuneți în factori:

a) $X^4 + 2X^2Y^2 - 3Y^4$; b) $X^6 - Y^6$; c) $9X^2 - 12XY + 4Y^2$; d) $9X^2 - 12XY + 3Y^2$; e) $81X^2Y^2 - 16Y^4$; f) $27X^3 - 64Y^3$.

3*) Descompuneți în factori:

a) $(XY + 1)^3 + (X + Y)^3$; b) $(X - Y)(X^2 - Z^2) + (X - Z)(X^2 - Y^2)$; c) $X^2 - a^2 - b^2 + 2ab$; d) $(aX + bY)^2 + (bX - aY)^2$; e) $X^3 - 2XY^2 + Y^3$; f) $(X + Y)^4 - (X^2 - 4XY + Y^2)^2$; g) $X^4 + 2X^2Y^2 + 9Y^4$.

4) Descompuneți în factori ireductibili, căutînd mai întîi un factor de forma $X - a$:

a) $X^3 - 2X^2 - 5X + 6$; b) $X^3 - 4X^2 + X + 6$; c) $X^3 + 2X^2 - 5X - 6$; d) $X^3 - 2{,}3X^2 - 1{,}7X + 3$; e) $X^3 + 3X^2 + 4X + 2$.

6. CEL MAI MARE DIVIZOR COMUN ȘI CEL MAI MIC MULTIPLU COMUN A DOUĂ POLINOAME

Fie polinomul $T(X) = X^3 - 5X^2 + 8X - 4$. Care sînt polinoamele care îl divid?

Observînd că se divide cu $X - 1$, putem să-l descompunem în factori: $T(X) = (X - 1)(X - 2)^2$.

Acum este evident că polinomul $T(X)$ se divide cu $X - 1$, cu $X - 2$ cu $(X - 1)(X - 2) = X^2 - 3X + 2$ și cu $(X - 2)^2 = X^2 - 4X + 4$.

Fie polinoamele:

$$P(X) = 6X^5 - 24X^3 \text{ și } Q(X) = 3X^3 - 12X^2 + 12X.$$

Descompunîndu-le în factori, putem scrie:

$$P(X) = 6X^3(X + 2)(X - 2), \quad Q(X) = 3X(X - 2)^2.$$

Să observăm că binomul $X - 2$ este divizor al ambelor polinoame $P(X)$ și $Q(X)$; spunem despre el că este divizor comun polinoamelor P și Q. De asemenea, polinoamele X și $X(X-2) = X^2 - 2X$ sînt divizori comuni polinoamelor P și Q.

Iată lista polinoamelor care sînt divizori comuni lui P și Q:

$$\left.\begin{array}{l} \text{— polinoamele constante } a; \\ \text{— polinoamele de forma } aX; \\ \text{— polinoamele de forma } a(X-2); \\ \text{— polinoamele de forma } aX(X-2), \end{array}\right\} \text{unde } a \text{ este un număr real } \neq 0.$$

Observăm că toți divizorii comuni lui P și Q divid și pe $X(X-2) = X^2 - 2X$; acesta este numit cel mai mare divizor comun al polinoamelor P și Q.

Dacă luăm polinomul $3X(X-2)$ și polinomul $2X(X-2)$, observăm că ele sînt multipli ai tuturor divizorilor lui P și Q; putem să le numim și pe ele „cel mai mare divizor comun al polinoamelor P și Q"; preferăm însă să lucrăm cu $X(X-2) = X^2 - 2X$, deoarece coeficientul termenului de gradul cel mai înalt este 1.

Să observăm că divizorii comuni lui P și Q au gradele 0, 1 și 2, iar cel mai mare divizor comun lui P și Q are gradul 2.

Definiție. Fie două polinoame $P(X)$ și $Q(X)$. Un polinom $D(X)$ ce are următoarele proprietăți:

1) este divizor al lui $P(X)$ și al lui $Q(X)$;

2) orice divizor al lui P și Q este divizor și al lui $D(X)$, va fi numit **cel mai mare divizor comun** al polinoamelor P și Q.

Observații. 1) Cel mai mare divizor comun a două polinoame *nu este unic*; orice polinom de forma $aD(X)$, unde a este un număr real $\neq 0$, are și el proprietățile 1) și 2).

2) Cel mai mare divizor comun a două polinoame P și Q este divizor comun al lui P și al lui Q gradul său este cel mai mare dintre gradele divizorilor comuni lui P și Q.

Cum putem obține efectiv cel mai mare divizor comun a două polinoame?

Dacă polinoamele P și Q sînt descompuse în factori ireductibili, atunci cel mai mare divizor comun al lor se obține luînd produsul factorilor ireductibili comuni, la puterea cea mai mică cu care apar în cele două descompuneri.

De exemplu, fie polinoamele:

$$P(X) = X^5 + 6X^4 + 13X^3 + 14X^2 + 12X + 8 = (X+2)^3(X^2+1) \text{ și}$$

$$Q(X) = 2X^5 + 6X^4 + 2X^3 - 2X^2 - 8 = 2(X+2)^2(X^2+1)(X-1).$$

În cele două descompuneri apar factorii ireductibili $X + 2$, $X^2 + 1$ și $X - 1$. Dintre aceștia, doar primii doi apar în ambele descompuneri. Factorul $X + 2$ apare cu exponenții 3 și 2, deci va apărea cu exponentul 2 în cel

mai mare divizor comun al polinoamelor P și Q. Cel mai mare divizor comun al lui P și Q va fi polinomul:

$$D(X) = (X+2)^2(X^2+1) = X^4 + 4X^3 + 5X^2 + 4X + 4.$$

Alt exemplu. Fie $A(X) = 2X + 1$ și $B(X) = (X-1)(X+3)$. Nu există nici un factor ireductibil comun polinoamelor A și B, deci cel mai mare divizor comun al lui A și B este 1; polinoamele A și B sînt prime între ele.

EXERCIȚII

1) Aflați cel mai mare divizor comun al polinoamelor:

a) $(X-1)(X-2)(X-3)$ și $(X+1)(X-2)(X+3)$; b) $(X-1)^2(X+5)$ și $(X-1)(X+5)^2$; c) $(X+3)(X-3)$ și $(X+3)^2$; d) $14X(X+7)$ și $4X^2(X-7)$; e) $3X^3(X-1)^2(X+1)(X^2+1)$ și $4X(X-1)^2(X^2+1)$. Scrieți-l în formă canonică.

2) Aflați cel mai mare divizor comun al polinoamelor:

a) $X^3 - X$ și $X^3 + 2X^2 + X$; b) $X^2 + X$ și $X^2 + 2X + 1$; c) $4X^2 + 12X + 9$ și $8X^3 + 27$; d) $X^2 - 3X + 2$ și $X^2 - X - 2$; e) $8X^2 - 32$ și $2X^2 - 14X + 20$; f) $X^2 - 7X + 12$ și $3X^2 - 6X - 24$; g) $2X^2 + 2X - 4$ și $4X^2 - 12X - 40$; h) $X^2 - X - 2$ și $X^3 - X^2 - 4X + 4$.

3) Scrieți un polinom $P(X)$ de gradul 2 astfel încît cel mai mare divizor comun al lui $P(X)$ și $Q(X)$ să fie $D(X)$, unde:

a) $Q(X) = X^3 + 1$, $D(X) = X + 1$; b) $Q(X) = 2X^2 - 8$; $D(X) = X - 2$; c) $Q(X) = 9X^2 - 12X + 4$, $D(X) = 3X - 2$.

4) Aflați cel mai mare divizor comun al polinoamelor:

a) $X^2 - XY$ și $X^2 - 2XY + Y^2$; b) $6(X^2 - Y^2)^3$ și $9(X^4 - Y^2)(X - Y)^3$.

5) Arătați că polinoamele:

a) $X^2 + 1$ și $X^3 + 1$; b) $X^2 + 3X + 2$ și $X^3 - 1$ sînt prime între ele.

Nu întotdeauna putem descompune efectiv polinoamele în factori ireductibili. Metoda de aflare a celui mai mare divizor comun, prezentată mai înainte, nu este aplicabilă întotdeauna. De aceea vom prezenta încă o metodă, algoritmică, numită *algoritmul lui Euclid**.

Să luăm de exemplu polinoamele $P(X) = X^2 + 2X - 24$ și $Q(X) = X^2 + X - 20$.

Împărțim polinomul P la polinomul Q:

$$\begin{array}{r|l} X^2 + 2X - 24 & X^2 + X - 20 \\ \cline{2-2} -X^2 - X + 20 & 1 \\ \hline X - 4 & \end{array}$$

Obținem cîtul 1 și restul $R_1(X) = X - 4$:

$$P(X) = Q(X) \cdot 1 + (X - 4).$$

* Euclid — matematician grec ce a trăit în secolul III î.e.n. în orașul Alexandria (Egipt); este autorul unui faimos tratat de geometrie.

Împărțim polinomul Q la polinomul R_1:

$$\begin{array}{r|l} X^2 + X - 20 & X - 4 \\ \cline{2-2} -X^2 + 4X & X + 5 \\ \cline{1-1} 5X - 20 & \\ -5X + 20 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Obținem cîtul $X + 5$ și restul $R_2(X) = 0$; $Q(X) = R_1(X) \cdot (X + 5) + 0$.

Deoarece restul R_2 este 0, algoritmul se oprește; restul $R_1(X) = X - 4$ este cel mai mare divizor comun al polinoamelor P și Q.

Alt exemplu. Fie polinoamele $P(X) = X^4 - 2X^3 + 4X^2 - 4X + 4$ și $Q(X) = X^3 - 3X^2 + 2X - 6$.

Împărțim polinomul P la polinomul Q (efectuați împărțirea!). Obținem cîtul $X + 1$ și restul $R_1(X) = 5X^2 + 10$:

$$P(X) = Q(X) \cdot (X + 1) + (5X^2 + 10).$$

Împărțim polinomul Q la polinomul R_1 (efectuați!). Obținem cîtul $\frac{1}{5}X - \frac{3}{5}$ și restul $R_2(X) = 0$:

$$Q(X) = R_1(X) \cdot \left(\frac{1}{5}X - \frac{3}{5}\right) + 0.$$

Deoarece restul R_2 este 0, algoritmul se oprește: restul $R_1(X) = 5X^2 + 10$ este cel mai mare divizor comun al polinoamelor P și Q.

Observație. Putem spune că și $X^2 + 2$ este cel mai mare divizor comun al polinoamelor P și Q.

Alt exemplu. Să aplicăm algoritmul lui Euclid polinoamelor $P(X) = 2X^4 - 2X^3 - 2X^2 - 2X - 4$ și $Q(X) = X^3 - 3X^2 + 4X - 4$.

Împărțim polinomul P la polinomul Q. Obținem cîtul $2X + 4$ și restul $R_1(X) = 2X^2 - 10X + 12$:

$$P(X) = Q(X) \cdot (2X + 4) + (2X^2 - 10X + 12).$$

Împărțim polinomul Q la polinomul R_1. Obținem cîtul $\frac{1}{2}X + 1$, iar restul $R_2(X) = 8X - 16$:

$$Q(X) = R_1(X) \cdot \left(\frac{1}{2}X + 1\right) + (8X - 16).$$

Împărțim polinomul R_1 la polinomul R_2. Obținem cîtul $\frac{1}{4}X - \frac{3}{4}$ și restul $R_3(X) = 0$.

$$R_1(X) = R_2(X) \cdot \left(\frac{1}{4}X - \frac{3}{4}\right) + 0.$$

Algoritmul se oprește aici. Cel mai mare divizor comun al polinoamelor P și Q este ultimul rest $\neq 0$ obținut, anume $R_2(X) = 8X - 16$.

EXERCIȚII

1) Folosind algoritmul lui Euclid, calculați cel mai mare divizor comun al polinoamelor:

a) $X^2 + 3X + 2$ și $X^2 - X - 2$; b) $X^2 - 5X + 4$ și $X^2 + 2X - 3$; c) $12X^2 + 5X - 3$ și $6X^2 + X - 1$; d) $5X^3 - 4X - 1$ și $X^2 - 2X + 1$.

2) Aflați cel mai mare divizor comun al polinoamelor:

a) $X^3 - 6X^2 + 11X - 6$ și $X^3 - 8X^2 + 19X - 12$; b) $6X^3 + 13X^2 + 15X - 25$ și $2X^3 + 4X^2 + 4X - 10$; c) $6X^4 + X^3 - X$ și $4X^3 - 6X^2 - 4X + 3$; d) $2X^4 - 12X^3 + 19X^2 - 6X + 9$ și $4X^3 - 18X^2 + 19X - 3$; e) $X^4 + 2X^3 - X + 2$ și $X^4 - X^3 + 2X^2 + X + 3$; f) $2X^5 - 11X^2 - 9$ și $4X^5 + 11X^4 + 81$; g) $3X^5 - X^4 - 3X + 1$ și $3X^4 + X^3 + X^2 + X - 2$; h) $X^8 - 17X^4 + 16$ și $X^7 - 12X + 11$.

3) Sînt polinoamele $3X^2 - 4X + 1$ și $2X^2 + X + 1$ prime între ele? Dar polinoamele $4X^2 - 5X + 1$ și $X^2 - 5X + 4$?

Cel mai mic multiplu comun al polinoamelor $P(X)$ și $Q(X)$ este un polinom $M(X)$ ce are proprietățile:

— polinoamele $P(X)$ și $Q(X)$ divid polinomului $M(X)$;

— dacă $P(X)$ și $Q(X)$ divid un polinom $T(X)$ atunci și polinomul $M(X)$ îl divide pe $T(X)$.

Cu alte cuvinte:

— $M(X)$ este un multiplu al polinoamelor $P(X)$ și $Q(X)$;

— dacă $T(X)$ este multiplu al polinoamelor $P(X)$ și $Q(X)$, atunci $T(X)$ este multiplu și al lui $M(X)$.

Între polinoamele $P(X)$, $Q(X)$, cel mai mare divizor comun $D(X)$ al lor și cel mai mic multiplu comun $M(X)$ al lor există relația:

$$\boxed{P(X) \cdot Q(X) = D(X) \cdot M(X)}.$$

Această relație ne permite să-l aflăm pe $M(X)$, dacă îl cunoaștem pe $D(X)$:

$$\boxed{M(X) = [P(X) \cdot Q(X)] : D(X)}.$$

Dacă polinoamele $P(X)$ și $Q(X)$ sînt descompuse în factori ireductibili, atunci $M(X)$ poate fi luat produsul tuturor factorilor ce apar în descompuneri, fiecare factor la puterea cea mai mare.

De exemplu, cel mai mic multiplu comun al polinoamelor

$$P(X) = (X - 1)^2(X + 2)(X + 3) \quad \text{și} \quad Q(X) = (X - 1)(X + 2)^3$$

este polinomul

$$M(X) = (X - 1)^2(X + 2)^3(X + 3).$$

EXERCIȚIU REZOLVAT

Să aflăm cel mai mic multiplu comun al polinoamelor $2X^3 - X^2$, $2X^2 + X$ și $4X^2 - 1$.

Rezolvare. Descompunem cele trei polinoame în factori ireductibili:

$$2X^3 - X^2 = X^2(2X - 1),$$
$$2X^2 + X = X(2X + 1),$$
$$4X^2 - 1 = (2X + 1)(2X - 1).$$

În descompuneri apar factorii ireductibili X, $2X - 1$ și $2X + 1$. Primul apare cu exponentul 2 în prima descompunere. Cel mai mic multiplu comun va fi $X^2(2X - 1)(2X + 1) = 4X^4 - X^2$.

EXERCIȚII

1) Aflați cel mai mic multiplu comun al polinoamelor:
a) $(X - 1)^2(X - 2)$ și $(X - 1)(X - 2)^2$; b) $(X - 1)(X - 2)(X - 3)$ și $(X - 1)^2(X - 3)$; c) $(X - 1)^2$ și $(X - 1)(X + 1)^2$.

2) Aflați cel mai mic multiplu comun al polinoamelor:

$$X^2 - (a + b)X + ab \text{ și } X^2 - (a + c)X + ac.$$

Scrieți-l în formă canonică.

3) Aflați cel mai mic multiplu comun al polinoamelor:
a) $X^2 - 4X$ și $X^2 - 8X + 16$; b) $X^2 + 2X$ și $X^3 + 8$; c) $X^3 + 1$ și $X^3 - X^2 + X$; d) $9X^2 + 12X + 4$ și $27X^3 + 8$; e) $X^3 - X$ și $X^3 - 1$; f) $X^2 - 3X + 2$ și $X^2 - X - 2$.

4) Aflați cel mai mic multiplu comun al polinoamelor:
a) $1 - X$, $1 + X$ și $1 - X^2$; b) $(X + 2)^2$, $(X + 2)(X + 1)$ și $(X + 2)(X + 3)$; c) $X - 2$, $(X - 2)^2$ și $(X - 2)^3$; d) X, $X - 1$ și $X^2 - 1$; e) $3X - 1$, $3X + 1$ și $1 - 9X^2$;
f) $3X^2 + 5$ și $4X^2 - X + 1$.

5*) Aflați cel mai mic multiplu comun al polinoamelor:
a) $X^3 - 6X^2 + 11X - 6$ și $X^3 - 8X^2 + 19X - 12$; b) $X^4 - 1$ și $X^6 - 1$.

7. FUNCȚII POLINOMIALE ȘI ECUAȚII POLINOMIALE. TEOREMA LUI BÉZOUT

Am întîlnit în lecțiile anterioare multe exemple de polinoame. Putem scrie acum forma generală a unui polinom în nedeterminata X, de gradul n:

$$a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_2X^2 + a_1X + a_0,$$

sau

$$a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n,$$

unde coeficienții $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ sînt numere reale, iar $a_n \neq 0$.

Să luăm de exemplu polinomul $P(X) = 2X^3 - 3X^2 + 5$. Scriindu-l astfel: $P(X) = 2X^3 + (-3)X^2 + 0X + 5$, recunoaștem coeficienții:

$$a_3 = 2, \quad a_2 = -3, \quad a_1 = 0, \quad a_0 = 5.$$

Să înlocuim în acest polinom nedeterminata X cu numărul 1: obținem ca rezultat numărul $2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 5 = 4$; îl notăm $P(1)$. Deci $P(1) = 4$.

Dacă înlocuim nedeterminata X cu numărul $\frac{3}{2}$, obținem ca rezultat numărul $2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 5 = 5$; îl notăm $P\left(\frac{3}{2}\right)$. Deci $P\left(\frac{3}{2}\right) = 5$. La fel, $P(2) = 2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 5 = 9$, $P(-1) = 2 \cdot (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 + 5 = 0$.

Înlocuind nedeterminata X cu un număr x, obținem ca rezultat numărul $2 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 + 5$, care se notează $P(x)$. Putem defini o funcție $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ prin $h(x) = P(x)$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Aceasta este o funcție polinomială.

În general, polinomul

$$a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0,$$

determină o funcție polinomială $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită de formula $f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

Funcțiile liniare, descrise de

$$f(x) = a_1 \cdot x + a_0$$

sînt exemple simple de funcții polinomiale.

Și funcțiile pătratice $f(x) = a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$ sînt funcții polinomiale.

Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție polinomială, definită de

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

Orice număr r cu proprietatea că $f(r) = 0$ va fi numit **rădăcină** a polinomului $a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$. Rădăcinile reale ale acestui polinom sînt tocmai soluțiile ecuației polinomiale

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Dacă $a_n \neq 0$, se spune că aceasta este o ecuație **de gradul al n-lea**.

De exemplu, numărul -1 este rădăcină a polinomului $2X^3 - 3X^2 + 5$, așa cum am văzut. Putem spune că -1 este soluție a ecuației polinomiale de gradul al III-lea

$$2x^3 - 3x^2 + 5 = 0, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Am văzut că ecuațiile de gradul I:

$$a_1 x + a_0 = 0, \quad x \in \mathbf{R}$$

(cu $a_1 \neq 0$) au o singură soluție, numărul $-\frac{a_0}{a_1}$. Deci polinomul de gradul I $a_1 X + a_0$ are o singură rădăcină. Polinomul de gradul al II-lea $X^2 + 1$ nu are nici o rădăcină reală (de ce?). Se poate arăta că polinomul de gradul al III-lea $2X^3 - 3X^2 + 5$ are ca rădăcină reală doar pe -1.

Polinoamele, în special sub formă de funcții polinomiale, apar în multe probleme ridicate de fizică, chimie, tehnică. De multe ori interesează aflarea rădăcinilor polinoamelor. În acest scop se folosește mult următoarea teoremă, datorată lui Bézout*:

Teoremă. Numărul r este rădăcină a polinomului $P(X)$ dacă și numai dacă binomul $X - r$ îl divide pe $P(X)$.

EXERCIȚIU REZOLVAT

Arătați că polinomul $X^{n+1} - nX^n + (n - 1)$ se divide cu $X - 1$, oricare ar fi numărul natural n.

Într-adevăr, înlocuind nedeterminata X cu 1, obținem $1^{n+1} - n \cdot 1^n + (n - 1) = 0$; deci 1 este rădăcină a polinomului.

EXERCIȚIU REZOLVAT

Care polinom $P(X)$ de gradul al II-lea are valorile $P(-2)=3$, $P(-1)=6$, $P\left(\frac{1}{2}\right) = 3$?

Fiind un polinom de gradul al II-lea, îl vom scrie

$$P(X) = aX^2 + bX + c, \text{ cu } a \neq 0.$$

A găsi polinomul ce satisface condițiile date înseamnă a preciza valorile coeficienților a, b și c.

Condiția $P(-2) = 3$ se scrie $a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c = 3$. La fel, celelalte condiții se scriu:

$$a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 6$$

și

$$a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + b \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + c = 3.$$

Coeficienții a, b și c formează soluția sistemului de ecuații. Rezolvîndu-l, obținem $a = -2$, $b = -3$, $c = 5$.

EXERCIȚII

1) Fie polinomul $P(X) = 2X^4 - X^3 + 3X^2 - 5X + 1$.

a) Calculați valorile $P(-3)$, $P(-2)$, $P(-1)$, $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$.

b) Calculați $P\left(-\frac{1}{2}\right)$, $P\left(\frac{1}{2}\right)$, $P\left(\frac{3}{2}\right)$.

c) Aproximați (cu eroare de cel mult 0,01) valorile $P(-\sqrt{2})$, $P(\sqrt{2})$, $P(\sqrt{3})$.

---

* *Bézout*, Étienne — matematician francez (1730—1783).

2) În împărțirea $(2X^5 - 5X + a) : (X - 2)$, determinați coeficientul a în așa fel încît restul să fie 0.

3) Care dintre numerele $-3, -2, -\frac{3}{2}, -1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}$ este rădăcină a polinomului:

a) $X^3 + 4X^2 + 4X + 3$; b) $4X^2 + 12X + 9$; c) $2X^5 - X^4 - 2X^3 - 2X^2 - 4X - 1$; d) $2X^6 - X^5 - 5X^3 - 5X^2 - X$?

4) Aflați polinomul de gradul al doilea $P(X) = a_2X^2 + a_1X + a_0$ știind că:

a) $P(-3) = -39$, $P(0) = 0$, $P(3) = -33$, b) $P(-1) = 0$, $P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$, $P(1) = 0$; c) $P(-2) = -3$, $P(-1) = -4$, $P(1) = 12$.

Fie polinomul în nedeterminatele X și Y:

$$P(X, Y) = 2X^2 + XY + 5Y + 1.$$

Înlocuind nedeterminata X cu numărul 3, iar nedeterminata Y cu numărul -4, obținem ca rezultat numărul $2 \cdot 3^2 + 3 \cdot (-4) + 5 \cdot (-4) + 1 = -13$, pe care îl notăm $P(3, -4)$. Deci $P(3, -4) = -13$.

Înlocuind nedeterminata X cu un număr x, iar pe Y cu numărul y, obținem numărul $2 \cdot x^2 + x \cdot y + 5 \cdot y + 1$, care va fi notat $P(x, y)$. Acest număr este numit **valoarea** polinomului P în (x, y).

Așadar, $P(1, 1) = 2 \cdot 1^2 + 1 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 1 = 9$; $P\left(\frac{1}{2}, 1\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 1 = \frac{7}{2}$; $P(-4, 3) = 2 \cdot (-4)^2 + (-4) \cdot 3 + 5 \cdot 3 + 1 = 36$; $P(\sqrt{2}, 3) = 2 \cdot (\sqrt{2})^2 + \sqrt{2} \cdot 3 + 5 \cdot 3 + 1 = 20 + 3\sqrt{2}$.

EXERCIȚII

1) Aflați valoarea polinomului $Q(X, Y) = 2X - Y^2 + 2$ în:

a) $(1, 1)$; b) $(1, 2)$; c) $(-1, 1)$; d) $(1, -2)$; e) $(3, 2)$; f) $(4, 2\sqrt{2})$; g) $(-2, \sqrt{3})$.

2) Pentru polinomul $P(X, Y) = 5X^2 - XY^2 + Y^3 + X$, calculați:

a) $P(x, 2)$; b) $P(x, -1)$; c) $P(1, y)$; d) $P(-2, y)$.

3) Fie polinomul $P(X, Y) = X^2 - 3XY + 2Y - X + 3$. Pentru ce număr y avem $P(3, y) = 0$? Dar $P(3, y) = 9$?

8. FRACȚII RAȚIONALE. AMPLIFICAREA ȘI SIMPLIFICAREA

O **fracție rațională** este o pereche de polinoame P și Q, scrisă astfel: $\frac{P}{Q}$. Numitorul Q trebuie să fie diferit de polinomul nul 0.

De exemplu, $\frac{2X + 1}{3X^2 + 1}$, $\frac{X^2}{X}$, $\frac{2X + 1}{4}$, $\frac{4X^2 - 4X + 1}{(3X - 1)^2}$ sînt fracții raționale în nedeterminata X, iar $\frac{2X + Y}{X + 2Y}$, $\frac{X + 1}{Y + 1}$, $\frac{Y^2}{X}$, $\frac{X + Y^3}{1}$ sînt fracții raționale în nedeterminatele X și Y.

Fracțiile raționale ale căror numitori sînt constante $\neq 0$ sînt de fapt polinoame. De exemplu, fracția $\frac{2X^2+1}{1}$ se identifică cu polinomul $2X^2+1$; fracția $\frac{X^2+2}{2}$ se identifică cu polinomul $\frac{1}{2}X^2+1$; fracția $\frac{2X+\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$ se identifică cu polinomul $\frac{2}{\sqrt{2}}X+\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}X+\sqrt{3}$.

Putem amplifica o fracție rațională $\frac{P}{Q}$ cu orice polinom $R \neq 0$; ca rezultat obținem fracția rațională $\frac{R \cdot P}{R \cdot Q}$. De exemplu, amplificînd fracția rațională $\frac{2X+1}{3X^2+1}$ cu polinomul X^2+X, obținem ca rezultat fracția rațională $\frac{(X^2+X)(2X+1)}{(X^2+X)(3X^2+1)}=\frac{2X^3+3X^2+X}{3X^4+3X^3+X^2+X}$.

Pentru a simplifica o fracție rațională $\frac{P}{Q}$ cu un polinom $R \neq 0$, este necesar ca atît numărătorul P cît și numitorul Q să fie divizibile prin R.

De exemplu, fracția rațională $\frac{2X^2+X}{3X^3+X}$ poate fi simplificată cu polinomul X; ca rezultat obținem fracția $\frac{2X+1}{3X^2+1}$; fracția $\frac{2X^3+3X^2+X}{3X^4+3X^3+X^2+X}$ poate fi simplificată cu X, cu $X+1$ sau cu X^2+X. Obținem pe rînd: $\frac{2X^2+3X+1}{3X^3+3X^2+X+1}$, $\frac{2X^2+X}{3X^3+X}$, respectiv $\frac{2X+1}{3X^2+1}$. Primele două fracții obținute mai pot fi simplificate: prima cu $X+1$, a doua cu X; ca rezultat obținem cea de-a treia fracție. Aceasta nu mai poate fi simplificată cu polinoame de grad ≥ 1; spunem că ea este *ireductibilă*.

Alt exemplu: fracția $\frac{2X^2+X}{4X+2}$ poate fi simplificată cu polinomul $2X+1$; ca rezultat obținem *polinomul* $\frac{1}{2}X$.

EXERCIȚII

1) Simplificați fracțiile raționale:

a) $\frac{2X^3}{3X^4}$; b) $\frac{4X^2Y^3}{6X^4Y^3}$; c) $\frac{8a^2XY^2}{12aX^2Y}$; d) $\frac{5X^2-6X}{5X}$; e) $\frac{XY-X}{XY+X}$.

2) Simplificați:

a) $\frac{9X^2+9X}{4X+4}$; b) $\frac{X^2+2X+1}{X^2-1}$; c) $\frac{X^2-1}{(X-1)^2}$; d) $\frac{X^2-25}{X^2-10X+25}$; e) $\frac{7X^4-7}{2X^2+2}$; f) $\frac{X^3+8}{X^2+X}$; g) $\frac{X^3+X^2+X}{X^3-1}$.

3) Simplificați:

a) $\frac{3X^2 - 3XY}{9XY - 9Y^2}$; b) $\frac{X^2 - 16Y^2}{X^2 + 8XY + 16Y^2}$; c) $\frac{X^3 - Y^3}{2X - 2Y}$; d) $\frac{X^3 - 125Y^3}{X^2 - 10XY + 25Y^2}$.

4*) Simplificați:

a) $\frac{X^3 - 6X^2 + 11X - 6}{X^2 - 3X + 2}$; b) $\frac{X^2 - Y^2 - 2YZ - Z^2}{Y^2 - X^2 - 2XZ - Z^2}$; c) $\frac{9X^4 - 9XY^3}{X^3 + X^2Y + XY^2 - \frac{1}{2}(X^3 - Y^3)}$.

5) Amplificați cu X, apoi cu $X - 1$ fracțiile:

a) $\frac{X}{X+1}$; b) $\frac{X-1}{X}$; c) $\frac{X^2 + X + 1}{X+1}$; d) $\frac{X+1}{X^2+1}$.

6) Amplificați fracțiile:

$$\frac{X+1}{X^2 - X} \text{ și } \frac{X-1}{X^2 + X}.$$

astfel încît să obțineți fracții avînd același numitor.

9. VALORILE UNEI FRACȚII RAȚIONALE. FUNCȚII RAȚIONALE

Fie de exemplu fracția rațională $F(X) = \frac{X-1}{X^2-1}$. Să înlocuim nedeterminata X cu numărul 2; obținem numărul $\frac{2-1}{2^2-1} = \frac{1}{3}$, care se notează $F(2)$. Deci $F(2) = \frac{1}{3}$. Dacă înlocuim nedeterminata X cu numărul $-\frac{1}{2}$, obținem ca rezultat numărul $\frac{-\frac{1}{2} - 1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 1} = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{1}{4} - 1} = \frac{-\frac{3}{2}}{-\frac{3}{4}} = 2$; acesta se notează $F\left(-\frac{1}{2}\right)$. Deci $F\left(-\frac{1}{2}\right) = 2$. Se spune că fracția rațională *are valoarea* $\frac{1}{3}$ *în* 2 și că are valoarea 2 în $-\frac{1}{2}$. De asemenea, $F(0) = \frac{0-1}{0^2-1} = 1$.

Însă, dacă înlocuim nedeterminata X cu -1 (sau cu 1), numitorul fracției se anulează. Se spune că fracția rațională F *nu are definită valoarea în* -1 *și în* 1.

În general, dacă într-o fracție rațională $F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$ înlocuim nedeterminata X cu un număr real r, pot apărea două cazuri:

Cazul 1 : $Q(r) = 0$. În acest caz spunem că fracția rațională F **nu are definită valoarea în** r, sau că **nu este definită în** r.

Cazul 2. $Q(r) \neq 0$. În acest caz fracția rațională F are valoarea $\frac{P(r)}{Q(r)}$ în r; notăm $F(r) = \frac{P(r)}{Q(r)}$.

De exemplu, pentru a calcula efectiv valoarea $F(r)$, unde $F(X) = \frac{8X^2 + 12X + 1}{(X-1)(X-6)}$, vom scrie $F(X) = \frac{1 + X \cdot (12 + X \cdot 8)}{6 + X \cdot (-7 + X)}$ și vom folosi următorul algoritm:

Pasul 0. Citește numărul r. Dacă $r \neq 1$ și $r \neq 6$, continuă cu pasul 1. În caz contrar scrie „*excepție*". Stop.

Pasul 1. $a = r \cdot 8$;
Pasul 2. $b = 12 + a$;
Pasul 3. $c = r \cdot b$;
Pasul 4. *numărător* $= 1 + c$;
Pasul 5. $d = -7 + r$;
Pasul 6. $e = r \cdot d$;
Pasul 7. *numitor* $= 6 + e$;
Pasul 8. $F(r) =$ *numărător* : *numitor*;
Pasul 9. Scrie rezultatul $F(r)$. Stop.

Fie fracția $\frac{X+1}{X^2 - 3X + 2}$. Numitorul are două rădăcini, anume 1 și 2. Pentru orice număr real x, diferit de 1 și de 2, fracția are valoare în x, și anume $\frac{x+1}{x^2 - 3 \cdot x + 2}$. Putem defini o funcție $h : \mathbf{R} \setminus \{1, 2\} \to \mathbf{R}$ prin $h(x) = \frac{x+1}{x^2 - 3x + 2}$; aceasta este o *funcție rațională*.

În general, fie $F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$ o fracție rațională. Să notăm cu M mulțimea rădăcinilor reale ale numitorului $Q(X)$. Putem defini o funcție $f : \mathbf{R} \setminus M \to \mathbf{R}$, prin $f(x) = F(x)$. O astfel de funcție se numește funcție rațională.

Astfel, funcțiile $g : \mathbf{R} \setminus \{1\} \to \mathbf{R}$, $g(x) = \frac{3x^2 + 1}{x - 1}$ și $i : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $i(x) = \frac{1}{x}$ sînt exemple de funcții raționale.

Și funcția $t : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ descrisă de $t(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$, este o funcție rațională.

Studierea funcțiilor raționale va fi făcută în liceu.

EXERCIȚII

1) Calculați valoarea fracțiilor raționale de mai jos în: $-1, 1, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2$ și $-\frac{5}{3}$:

a) $\frac{X+4}{X+6}$; b) $\frac{2X+1}{X-3}$; c) $\frac{3X^2 - 2}{X^2 - 3X}$; d) $\frac{2X^2 - 5X + 3}{X^3 + 2X + 2}$; e) $\frac{3X^2 - 5X + 2}{X^2 - 6X + 9}$.

2) Pentru ce numere a, fracția rațională:

a) $\frac{2X-3}{X-1}$; b) $\frac{5}{2X+1}$; c) $\frac{4X-3}{X+2}$; d) $\frac{3X-17}{3X+15}$; e) $\frac{12X-4}{6X}$ nu are definită valoarea în a?

3) Scrieți algoritmul pentru calculul valorii $F(r)$, dacă $F(X)$ este fracția rațională:

a) $\frac{X+1}{X-2}$; b) $\frac{X^2 - 2X + 2}{3X + 4}$; c) $\frac{5X^2 - 4X + 3}{X^2 + 1}$.

10. OPERAŢII CU FRACŢII RAŢIONALE

Priviţi circuitul electric desenat în figura 1: doi rezistori, avînd aceeaşi rezistenţă R, au fost legaţi în paralel cu rezistori de 1 kΩ respectiv 2 kΩ, iar cele două celule obţinute au fost legate în serie. Care este rezistenţa totală a circuitului?

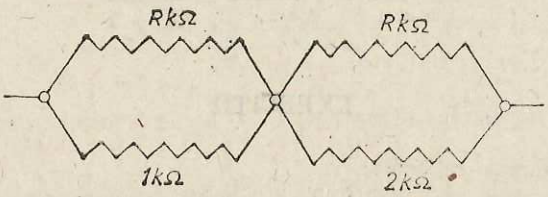


Fig. III.1

Cunoscînd formulele de calcul ale rezistenţelor, vom putea afla rezistenţa primei celule: $\frac{R}{1+R}$ kΩ (am presupus că şi rezistenţa R este exprimată în kiloohmi). Rezistenţa celei de-a doua celule este $\frac{2R}{R+2}$ kΩ. Deci rezistenţa totală a circuitului este de $\frac{R}{R+1}+\frac{2R}{R+2}$. Aducînd la acelaşi numitor, putem să scriem:

$$\overset{R+2)}{\frac{R}{R+1}}+\overset{R+1)}{\frac{2R}{R+2}}=\frac{R^2+2R}{(R+2)(R+1)}+\frac{2R^2+2R}{(R+1)(R+2)}=$$
$$=\frac{(R^2+2R)+(2R^2+2R)}{(R+1)(R+2)}=\frac{3R^2+4R}{R^2+3R+2}.$$

Avem un exemplu de adunare a două fracţii raţionale (în nedeterminata R).

În fracţiile raţionale nedeterminatele reprezintă de obicei numere reale; chiar şi fracţiile reprezintă numere reale; de aceea este natural să definim operaţii cu fracţii raţionale, care să extindă operaţiile cu numere: adunarea, scăderea, înmulţirea şi împărţirea.

De exemplu, pentru a aduna fracţiile raţionale $\frac{2X-1}{X}$ şi $\frac{5X-2}{X}$, avînd în vedere că au acelaşi numitor, vom proceda astfel:

$$\frac{2X-1}{X}+\frac{5X-2}{X}=\frac{(2X-1)+(5X-2)}{X}=\frac{7X-3}{X}.$$

La fel,

$$\frac{3}{X-1}+\frac{4X+1}{X-1}=\frac{3+(4X+1)}{X-1}=\frac{4X+4}{X-1};$$
$$\frac{3X+Y}{X+Y}+\frac{X+2Y}{X+Y}=\frac{(3X+Y)+(X+2Y)}{X+Y}=\frac{4X+3Y}{X+Y};$$
$$\frac{X-2}{X^2-1}+\frac{X}{X^2-1}=\frac{(X-2)+X}{X^2-1}=\frac{2X-2}{X^2-1}.$$

Să observăm că putem simplifica ultima fracție cu $X-1$; ca rezultat obținem $\frac{2}{X+1}$. Așadar, putem spune că suma fracțiilor $\frac{X-2}{X^2-1}$ și $\frac{X}{X^2-1}$, după simplificare, este $\frac{2}{X+1}$. Se obișnuiește să se scrie:

$$\frac{X-2}{X^2-1}+\frac{X}{X^2-1}=\frac{2}{X+1}.$$

EXERCIȚII

1) Adunați fracțiile raționale:

a) $\frac{1}{X+1}$ și $\frac{5}{X+1}$; b) $\frac{X+2}{X^2+X}$ și $\frac{X-1}{X^2+X}$; c) $\frac{5X-4}{11}$ și $\frac{3X+2}{11}$;

d) $\frac{X+2Y^2}{X^2Y}$ și $\frac{2X-Y^2}{X^2Y}$; e) $\frac{X-3}{X^2-2X}$ și $\frac{X-1}{X^2-2X}$; f) $\frac{X-Y^2}{X^2Y^2}$ și $\frac{2X+Y^2}{X^2Y^2}$.

2) Efectuați adunările, simplificînd rezultatele:

a) $\frac{5X}{X+2}+\frac{10}{X+2}$; b) $\frac{X^3}{X^2+X}+\frac{1}{X^2+X}$; c) $\frac{2X+3}{(X-1)(X+3)}+$

$+\frac{3}{(X-1)(X+3)}$; d) $\frac{X^2}{X^3+1}+\frac{1-X}{X^3+1}$; e) $\frac{X^2+1}{X^3-1}+\frac{X}{X^3-1}$.

În general, dacă $\frac{P}{Q}$ și $\frac{R}{Q}$ sînt două fracții raționale cu același numitor, definim suma lor astfel: $\frac{P}{Q}+\frac{R}{Q}=\frac{P+R}{Q}$.

Pentru a aduna două fracții raționale cu numitorii diferiți, le vom aduce mai întîi la același numitor, prin amplificare convenabilă, apoi le vom aplica regula de mai sus.

De exemplu, fie fracțiile $\frac{X^2}{X-1}$ și $\frac{1}{X}$. Pentru a le aduna, le vom aduce mai întîi la același numitor, amplificîndu-le cu X, respectiv cu $X-1$;

$$\overset{X)}{\frac{X^2}{X-1}}+\overset{X-1)}{\frac{1}{X}}=\frac{X^3}{X(X-1)}+\frac{X-1}{X(X-1)}=\frac{X^3+(X-1)}{X(X-1)}=\frac{X^3+X-1}{X^2-X}.$$

Alt exemplu. Pentru a aduna fracțiile $\frac{X}{(X-1)^2}$ și $\frac{3}{X^2-1}$, să observăm că cel mai mic multiplu comun al numitorilor lor este $(X-1)^2(X+1)$. Așadar, pentru a le aduce la același numitor, le vom amplifica cu $X+1$ respectiv cu $X-1$:

$$\overset{X+1)}{\frac{X}{(X-1)^2}}+\overset{X-1)}{\frac{3}{X^2-1}}=\frac{X^2+X}{(X+1)(X-1)^2}+\frac{3X-3}{(X+1)(X-1)^2}=$$

$$=\frac{X^2+4X-3}{(X-1)^2(X+1)}=\frac{X^2+4X-3}{X^3-X^2-X+1}.$$

Să adunăm fracțiile $\frac{X}{X+1}$ și $\frac{1}{X-1}$. Cel mai mic multiplu comun al numitorilor este produsul lor: $(X+1)(X-1) = X^2 - 1$. Vom proceda astfel:

$$\overset{X-1)}{\frac{X}{X+1}} + \overset{X+1)}{\frac{1}{X-1}} = \frac{X^2 - X}{X^2 - 1} + \frac{X+1}{X^2 - 1} =$$

$$= \frac{(X^2 - X) + (X+1)}{X^2 - 1} = \frac{X^2 + 1}{X^2 - 1}.$$

Să adunăm polinomul $2X + 5$ cu fracția rațională $\frac{3X^2}{X-1}$. Polinomul poate fi scris ca fracție rațională cu numitorul 1: $\frac{2X+5}{1}$. Cel mai mic multiplu comun al numitorilor este chiar numitorul fracției $\frac{3X^2}{X-1}$. Vom proceda astfel:

$$\overset{X-1)}{(2X+5)} + \frac{3X^2}{X-1} = \frac{(X-1)(2X+5) + 3X^2}{X-1} = \frac{5X^2 + 3X - 5}{X-1}.$$

De regulă, rezultatul adunării a două fracții raționale trebuie simplificat pe cît posibil. Preferăm, din motive evidente, scrierea lui sub forma unei fracții ireductibile (însă aceasta este, în general, dificil de realizat).

Astfel, să luăm ca exemplu fracțiile raționale $\frac{X+2}{X^2+X}$ și $\frac{1}{X+1}$. Adunîndu-le, obținem:

$$\frac{X+2}{X^2+X} + \overset{X)}{\frac{1}{X+1}} = \frac{(X+2) + X}{X(X+1)} = \frac{2X+2}{X(X+1)}.$$

Rezultatul obținut poate fi simplificat cu $X + 1$; se obișnuiește să se scrie:

$$\frac{X+2}{X^2+X} + \frac{1}{X+1} = \frac{2}{X}.$$

Alt exemplu. Să luăm fracțiile raționale

$$\frac{X^3 - 3X^2 + 2X}{X^5 - X^2} \text{ și } \frac{3X+1}{X^4 + X^3 + X^2}.$$

Adunîndu-le observînd că cel mai mic multiplu comun al numitorilor este $X^5 - X^2 = X^2(X-1)(X^2 + X + 1)$, obținem:

$$\frac{X^3 - 3X^2 + 2X}{X^5 - X^2} + \overset{X-1)}{\frac{3X+1}{X^4 + X^3 + X^2}} =$$

$$= \frac{(X^3 - 3X^2 + 2X) + (3X^2 - 2X - 1)}{X^5 - X^2} = \frac{X^3 - 1}{X^5 - X^2}.$$

Putem simplifica rezultatul obținut cu $X^3 - 1$; vom scrie:

$$\frac{X^3 - 3X^2 + 2X}{X^5 - X^2} + \frac{3X+1}{X^4 + X^3 + X^2} = \frac{1}{X^2}.$$

Observație. Am fi putut evita o serie de calcule dacă am fi observat de la început că fracția $\frac{X^3 - 3X^2 + 2X}{X^5 - X^2}$ poate fi simplificată cu $X - 1$ și înlocuită cu $\frac{X^2 - 2X}{X^4 + X^3 + X^2}$. De aceea, atunci cînd adunăm fracții raționale, este bine să verificăm înainte de toate dacă ele sînt sau nu ireductibile, eventual să le simplificăm.

Alte exemple. Să efectuăm: $\frac{5}{3X} + \frac{2X}{X^2 + 1}$ și $\frac{X}{1 - X^2} + \frac{1}{X + 1}$.

Avem:

$$\overset{X^2+1)}{\frac{5}{3X}} + \overset{3X)}{\frac{2X}{X^2 + 1}} = \frac{5X^2 + 5}{(X^2 + 1) \cdot 3X} + \frac{6X^2}{3X(X^2 + 1)} = \frac{11X^2 + 5}{3X^3 + 3X};$$

$$\overset{X+1)}{\frac{X}{1 - X^2}} + \overset{1-X^2)}{\frac{1}{X + 1}} = \frac{(X^2 + X) + (1 - X^2)}{(1 - X^2)(X + 1)} =$$

$$= \frac{X + 1}{(1 - X^2)(X + 1)} \overset{(X+1}{=} \frac{1}{1 - X^2},$$

sau, observînd că cel mai mic multiplu comun al numitorilor $1 - X^2$ și $X + 1$ este $1 - X^2 = (X + 1)(1 - X)$:

$$\frac{X}{1 - X^2} + \overset{1-X)}{\frac{1}{X + 1}} = \frac{X + (1 - X)}{1 - X^2} = \frac{1}{1 - X^2}.$$

În general, dacă $\frac{P}{Q}$ și $\frac{R}{S}$ sînt două fracții raționale cu numitorii diferiți, atunci suma lor este fracția rațională

$$\frac{S \cdot P + Q \cdot R}{Q \cdot S}.$$

Adunarea fracțiilor raționale are aceleași proprietăți ca și adunarea numerelor reale: este comutativă și asociativă. Putem astfel să adunăm trei sau mai multe fracții raționale, indiferent în ce ordine.

EXERCIȚIU REZOLVAT

Să adunăm fracțiile raționale $\frac{X + 1}{X - 1}$, $\frac{X - 1}{X + 1}$ și $\frac{7X^2 - 18X + 7}{X^2 - 1}$.

Cel mai mic multiplu comun al numitorilor este $X^2 - 1 = (X + 1) \cdot (X - 1)$. Pentru a aduce toate cele trei fracții la același numitor, vom amplifica prima cu $X + 1$, iar a doua cu $X - 1$. Obținem astfel:

$$\overset{X+1)}{\frac{X + 1}{X - 1}} + \overset{X-1)}{\frac{X - 1}{X + 1}} + \frac{7X^2 - 18X + 7}{X^2 - 1} =$$

$$= \frac{(X^2 + 2X + 1) + (X^2 - 2X + 1) + (7X^2 - 18X + 7)}{X^2 - 1} =$$

$$= \frac{9X^2 - 18X + 9}{X^2 - 1} = \frac{9(X - 1)^2}{X^2 - 1} \overset{(X-1}{=} \frac{9X - 9}{X + 1}.$$

EXERCIȚIU REZOLVAT

Să adunăm fracțiile raționale $\frac{3X^2+Y^2}{X^2+2XY+Y^2}$ și $\frac{-2X}{X+Y}$.

Pentru a aduce fracțiile la același numitor, va trebui să amplificăm a doua cu $X+Y$. Deci:

$$\frac{3X^2+Y^2}{X^2+2XY+Y^2}+\frac{(X+Y)\,-2X}{X+Y}=\frac{3X^2+Y^2-2X^2-2XY}{(X+Y)^2}=$$

$$=\frac{(X-Y)^2}{(X+Y)^2}=\left(\frac{X-Y}{X+Y}\right)^2.$$

De ce credeți că am scris rezultatul ca pătrat și nu astfel:

$$\frac{X^2-2XY+Y^2}{X^2+2XY+Y^2}?$$

EXERCIȚII

1) Aduceți la același numitor fracțiile, simplificîndu-le în prealabil:

a) $\frac{2X^2+3X}{X(X+7)}$ și $\frac{4X+4}{X^2-1}$; b) $\frac{X+6}{9X^2+12X+4}$ și $\frac{4-6X}{9X^2-4}$; c) $\frac{X+3}{X^3-9X}$ și $\frac{2X^2-6X}{X^2-6X+9}$.

2) Efectuați adunările:

a) $\frac{5X+2}{2X}+\frac{-2X+1}{4}$; b) $\frac{X+1}{X^2}+\frac{X-1}{X}$; c) $\frac{X-1}{X+1}+\frac{1}{X}$;

d) $\frac{X}{2}+\frac{X}{X-1}$; e) $\frac{X-1}{X+2}+\frac{X+1}{X-2}$; f) $\frac{1}{X+1}+\frac{1}{X-1}$; g) $\frac{2X-5}{2-5X}+\frac{2X+5}{2+5X}$;

h) $\frac{4X-3}{4X+3}+\frac{3X+4}{3X-4}$.

3) Efectuați adunările:

a) $\frac{1}{X+Y}+\frac{1}{X-Y}$; b) $\frac{2X}{X+2Y}+\frac{2Y}{X-2Y}$; c) $\frac{Y}{X+2Y}+\frac{4X}{2X+Y}$;

d) $\frac{X+Y}{X^2-XY}+\frac{X-Y}{XY+Y^2}$.

4) Efectuați adunările, simplificînd (dacă este posibil) rezultatul:

a) $\frac{1}{X}+\frac{2}{X-1}+\frac{3X+1}{1-X^2}$; b) $\frac{2X+3}{X-2}+\frac{2-3X}{X+2}+\frac{X^2-16X}{X^2-4}$;

c) $\frac{X+Y}{2X-2Y}+\frac{Y-X}{2X+2Y}+\frac{2Y^2}{X^2-Y^2}$; d) $\frac{1}{X-2}+\frac{2}{(X-2)^2}+\frac{1}{(X-2)^3}$;

e) $\frac{4}{(X-2)(X-3)}+\frac{3}{(X-1)(X-2)}$; f) $\frac{2}{X^2-Y^2}+\frac{1}{(X+Y)^2}+\frac{1}{(X-Y)^2}$;

g) $\frac{X+Y}{(Y-Z)(Z-X)}+\frac{Y+Z}{(Z-X)(X-Y)}+\frac{X+Z}{(X-Y)(X-Z)}$; h) $\frac{YZ}{(X+Y)(X+Z)}+$
$+\frac{XZ}{(Y+X)(Y+Z)}+\frac{XY}{(Z+X)(Z+Y)}$; i) $\frac{1}{X-3}+\frac{1}{X-1}+\frac{1}{X+1}+\frac{1}{X+3}$.

5) Efectuați adunările:

a) $1+\frac{1}{X-1}$; b) $1+X+\frac{X^2}{1-X}$; c) $1+X+X^2+\frac{X^3}{1-X}$; d) $X+\frac{2X}{X-1}$.

6*) Fie fracțiile:

$$F(X)=\frac{2X-1}{X^2-2X};\quad G(X)=\frac{3X-2}{X^2+2X};\quad H(X)=\frac{4X-3}{X^2-4}.$$

Calculați $U(X)=F(X)+G(X)$; $V(X)=2G(X)+H(X)$; $W(X)=F(X)+3G(X)+2H(X)$.

7*) Efectuați adunările:

a) $\frac{X+1}{X^2-3X+2}+\frac{X+2}{X^2-4X+3}$; b) $\frac{X^2-4}{X^2+4X+3}+\frac{X^2-9}{X^2+6X+8}$.

Opusa fracției raționale $F(X)=\frac{P(X)}{Q(X)}$ este fracția rațională $\frac{-P(X)}{Q(X)}$, care se notează $-F$. **Scăderea** fracțiilor raționale se definește cu ajutorul adunării, prin: $G-F=G+(-F)$.

De exemplu, dacă vrem să scădem fracția rațională $\frac{3X-4}{X^2-1}$ din fracția $\frac{7}{X+1}$, vom proceda astfel:

$$\frac{7}{X+1}-\frac{3X-4}{X^2-1}=\frac{7}{X+1}+\frac{-3X+4}{X^2-1}=\frac{7(X-1)+(-3X+4)}{X^2-1}=$$
$$=\frac{4X-3}{X^2-1}.$$

Practic vom proceda ca și în cazul adunării:

$$\overset{X-1)}{\frac{7}{X+1}}-\frac{3X-4}{X^2-1}=\frac{7(X-1)-(3X-4)}{X^2-1}.$$

Observație. Să observăm că opusa fracției $\frac{-P}{Q}$ este fracția $\frac{P}{Q}$: $-\frac{-P}{Q}=\frac{P}{Q}$.

De asemenea, să observăm că prin amplificarea fracției $\frac{-P}{Q}$ cu -1 obținem fracția $\frac{P}{-Q}$.

EXERCIȚII

1) Efectuați:

a) $\frac{1}{X}-\frac{4}{3X+2}$; b) $\frac{5X}{X+2}-\frac{2X}{X-1}$; c) $\frac{2X-1}{X+3}-\frac{-2X}{X-2}$; d) $\frac{3}{X^2-1}-$
$-\frac{2X}{X^2+2X+1}$; e) $\frac{3X+7}{X^2-3X}-\frac{X+2}{X^2-9}$; f) $\frac{1}{(X-2)^3}-\frac{X}{(X-2)^4}$.

2) Efectuați, simplificînd pe cît posibil rezultatul:

a) $\frac{1}{X}+\frac{2}{X-1}-\frac{3X+1}{X^2-1}$; b) $\frac{3+2X}{X-2}-\frac{3X-2}{X+2}+\frac{X^2-16X}{X^2-4}$; c) $\frac{3}{2X-1}+\frac{7}{2X+1}-\frac{20X-4}{4X^2-1}$; d) $\frac{2}{X^2+3}+\frac{1}{X+1}-\frac{8}{(1-X^2)(X^2+3)}$; e) $\frac{X^2}{X^3+1}-\frac{2X}{X^2-X+1}+\frac{3}{X+1}$.

3) Fie fracțiile raționale $F(X)=\frac{2X-1}{X^2-2X}$, $G(X)=\frac{3X-2}{X^2-2X}$ și $H(X)=\frac{4X-3}{X^2-4}$. Calculați fracțiile raționale $U(X)=F(X)+G(X)-H(X)$; $V(X)=F(X)-G(X)$; $W(X)=H(X)-F(X)$. Calculați apoi fracția $E(X)=U(X)+V(X)+W(X)$. Ce observați? Puteți explica?

4) Efectuați:

a) $\frac{X}{X+Y}+\frac{X}{X-Y}-\frac{2XY}{X^2-Y^2}$; b) $\frac{3X}{(X-2Y)^2}+\frac{2X+Y}{(X+Y)(X-2Y)}-\frac{5}{X+Y}$; c) $\frac{X+Y}{X-Y}+\frac{X^2+Y^2}{X^2-Y^2}-\frac{X-Y}{X+Y}$; d) $\frac{X+Y}{(X+2Y)(2X+3Y)}-\frac{13X+36Y}{(X+2Y)(3X-4Y)}$; e) $\frac{(X+Y)^2}{XY}+\frac{(Y+Z)^2}{YZ}+\frac{(X+Z)^2}{XZ}-4$.

Produsul a două fracții raționale $\frac{P}{Q}$ și $\frac{R}{S}$ este, prin definiție, fracția rațională $\frac{P\cdot R}{Q\cdot S}$:

$$\frac{P}{Q}\cdot\frac{R}{S}=\frac{P\cdot R}{Q\cdot S}.$$

Observăm că numărătorul produsului este produsul numărătorilor, iar numitorul produsului este produsul numitorilor fracțiilor.

De exemplu, să calculăm produsul fracțiilor $\frac{X^2-4}{X^2}$ și $\frac{2X}{X+2}$:

$$\frac{X^2-4}{X^2}\cdot\frac{2X}{X+2}=\frac{(X^2-4)\cdot 2X}{X^2(X+2)}=\frac{2X^3-8X}{X^3+2X^2}.$$

Se obișnuiește să se simplifice (pe cît posibil) rezultatul; în acest exemplu putem simplifica cu $X(X+2)=X^2+2X$ și putem scrie:

$$\frac{X^2-4}{X^2}\cdot\frac{2X}{X+2}=\frac{2X-4}{X}.$$

Simplificarea poate fi făcută chiar de la început, după ce am descompus în factori numărătorii și numitorii. Orice factor care apare într-unul dintre numărători și într-unul dintre numitori poate fi simplificat.

Luînd din nou exemplul de mai sus, să descompunem numărătorii și numitorii în factori:

$$\frac{X^2-4}{X^2}\cdot\frac{2X}{X+2}=\frac{(X+2)(X-2)}{X^2}\cdot\frac{2X}{X+2}.$$

Observăm că X apare ca factor la numitor și la numărător; la fel $X + 2$. Îi simplificăm; rămîne $\frac{X-2}{X} \cdot \frac{2}{1}$, adică $\frac{2X-4}{X}$.

Pentru a efectua produsul fracțiilor raționale $\frac{X-2}{X}$ și $\frac{X^2}{X+1}$, observăm că X poate fi simplificat:

$$\frac{X-2}{X} \cdot \frac{X^2}{X+1} = \frac{X-2}{1} \cdot \frac{X}{X+1} = \frac{X^2-2X}{X+1}.$$

Alt exemplu. Să înmulțim fracția $\frac{X^3-1}{X^2+2X+1}$ cu fracția $\frac{X+1}{X^2-X}$. Descompunem în factori numitorii și numărătorii; cele două fracții se scriu:

$$\frac{(X-1)(X^2+X+1)}{(X+1)^2} \text{ și } \frac{X+1}{X(X-1)}.$$

Observăm că $X - 1$ și $X + 1$ apar ca factori la un numărător și la un numitor; îi simplificăm și scriem:

$$\frac{X^3-1}{X^2+2X+1} \cdot \frac{X+1}{X^2-X} = \frac{(X-1)(X^2+X+1)}{(X+1)^2} \cdot \frac{X+1}{X(X-1)} =$$

$$= \frac{X^2+X+1}{X+1} \cdot \frac{1}{X} = \frac{X^2+X+1}{X^2+X}.$$

Să înmulțim polinomul $X^2 - 2X + 1$ cu fracția $\frac{X+1}{X^2-X}$. Vom scrie polinomul ca fracție rațională cu numitorul 1: $\frac{X^2-2X+1}{1}$. Observăm că putem simplifica factorul $X - 1$:

$$\frac{X^2-2X+1}{1} \cdot \frac{X+1}{X^2-X} = \frac{X-1}{1} \cdot \frac{X+1}{X} = \frac{X^2-1}{X}.$$

Să efectuăm produsul fracțiilor raționale $\frac{X}{X^2-Y^2}$, $\frac{X+2}{XY}$ și $\frac{X-Y}{X}$.

Observăm că putem simplifica factorii $X - Y$ și X (o singură dată!). Așadar:

$$\frac{X}{X^2-Y^2} \cdot \frac{X+2}{XY} \cdot \frac{X-Y}{X} = \frac{1}{X+Y} \cdot \frac{X+2}{Y} \cdot \frac{1}{X} = \frac{1 \cdot (X+2) \cdot 1}{(X+Y) \cdot Y \cdot X} =$$

$$= \frac{X+2}{X^2Y+XY^2}.$$

Inversa fracției raționale $\frac{R}{S}$ este fracția rațională $\frac{S}{R}$ (presupunînd că polinomul R este diferit de polinomul 0). Într-adevăr, după simplificarea cu $R \cdot S$, avem: $\frac{R}{S} \cdot \frac{S}{R} = \frac{R \cdot S}{S \cdot R} = \frac{1}{1} = 1$.

Împărțirea fracțiilor raționale se definește cu ajutorul înmulțirii, astfel:

$$\frac{P}{Q} : \frac{R}{S} = \frac{P}{Q} \cdot \frac{S}{R}.$$

Cîtul unei fracții raționale prin alta se obține înmulțind prima fracție cu inversa celei de-a doua.

Rețineți și formula:

$$\frac{\frac{P}{Q}}{\frac{R}{S}} = \frac{P \cdot S}{Q \cdot R}.$$

De exemplu, să împărțim fracția rațională $\frac{X^2 - 2X}{X + 1}$ la fracția $\frac{X - 2}{X}$.

Procedăm astfel:

$$\frac{X^2 - 2X}{X + 1} : \frac{X - 2}{X} = \frac{X^2 - 2X}{X + 1} \cdot \frac{X}{X - 2} = \frac{X}{X + 1} \cdot \frac{X}{1} = \frac{X^2}{X + 1}$$

(am simplificat cu $X - 2$).

Să scriem cîtul $\dfrac{\frac{(X + 3)(2X + 1)}{9X^2 - 4}}{\frac{X + 3}{3X + 2}}$ ca fracție rațională. Folosind formula, îl putem înlocui cu $\frac{(X + 3)(2X + 1) \cdot (3X + 2)}{(9X^2 - 4) \cdot (X + 3)}$. Simplificînd cu $X + 3$ și cu $3X + 2$, obținem $\frac{2X + 1}{3X - 2}$. Putem scrie:

$$\frac{\frac{(X + 3)(2X + 1)}{9X^2 - 4}}{\frac{X + 3}{3X + 2}} = \frac{2X + 1}{3X - 2}$$

EXERCIȚII

1) Efectuați înmulțirile de mai jos, scriind mai întîi polinoamele ca fracții cu numitorul 1:

a) $X^2 \cdot \frac{3}{X}$; b) $(X^2 - 2X + 1) \cdot \frac{5}{X - 1}$; c) $X^2 \cdot \frac{2}{X^3}$; d) $(X^2 + 4X + 4) \cdot \frac{1}{X^2 - 4}$.

2) Efectuați:

a) $\frac{2}{X - 3} \cdot \frac{X^2 - 9}{8X}$; b) $\frac{3}{X^2 - 1} \cdot \frac{X + 1}{6X}$; c) $\frac{X^2 - 4}{X^2 + 4} \cdot \frac{4X}{X + 2}$.

3) Efectuați înmulțirile:

a) $\frac{3X^3Y}{Z^2}\cdot\frac{5Z}{6XY^2}$; b) $\frac{3X}{X-Y}\cdot\frac{X^2-Y^2}{6Y}$; c) $\frac{X+1}{Y}\cdot\frac{4Y^2}{X^2-1}$; d) $\frac{3(X^2-Y^2)}{5XY}\cdot$

$\cdot\frac{10Y}{9(X+Y)}$; e) $\frac{2X+Y}{9X^2-Y^2}\cdot\frac{3X-Y}{2XY+Y^2}$; f) $\frac{(3X+2)^2}{16X^2-25}\cdot\frac{4X-5}{9X+6}$.

4) Efectuați înmulțirile:

a) $(X+Y)^4\cdot\frac{3X^2}{(X+Y)^2}$; b) $\frac{X^3-Y^3}{X^2+4XY+4Y^2}\cdot\frac{X+2Y}{X-Y}$;

c) $\frac{X^3+XY^2}{X^3-Y^3}\cdot\frac{X^2-XY}{X^4-Y^4}$; d) $\frac{XY}{X^2-Y^2}\cdot\frac{X+Y}{X}\cdot\frac{X-Y}{2Y}$; e) $\frac{X^4-Y^4}{(X-Y)^2}\cdot\frac{X-Y}{X^2+XY}$;

f) $\frac{4X^2}{Y^2}\cdot\frac{XY}{X+Y}\cdot\frac{X^2-Y^2}{2XY}$; g) $\frac{1-X^2}{1+Y}\cdot\frac{1-Y^2}{X+X^2}\cdot\left(1+\frac{X}{1-X}\right)$.

5) Efectuați împărțirile:

a) $\frac{1}{X^3}:\frac{2}{X^2}$; b) $X^2:\frac{X+1}{2X}$; c) $\frac{5X-2}{X-3}:\frac{X+2}{4X-12}$; d) $\frac{X^2-Y^2}{4XY}:\frac{X-Y}{3Y}$;

e) $\frac{X^2+3X}{4XY-16Y}:\frac{X+3}{3X-12}$; f) $\frac{XY+Y^2}{X^2-2XY+Y^2}:\frac{Y^2}{X^2-Y^2}$; g) $\frac{(X+Y)^3}{X^4-Y^4}:\frac{(X+Y)^2}{X-Y}$.

6) Scrieți ca fracție rațională:

a) $\dfrac{\dfrac{X^4-81}{9X^2+12X+4}}{\dfrac{X^2+9}{9X^2-4}}$; b) $\dfrac{\dfrac{X^2-2XY}{Y^2+4}}{\dfrac{XY-2Y^2}{Y^4-16}}$.

7) Efectuați:

a) $\left(X-\frac{1}{X-1}\right)\cdot\frac{(X-1)^2}{X^2-X-1}$; b) $\frac{X^3+8}{X^2+2X+2}\cdot\left(\frac{1}{X+2}\right)$; c) $\frac{(X^2-Y^2)^2}{(X^2+Y^2)^2}+$

$+\frac{4X}{X^2+Y^2}\cdot\frac{XY^2}{X^2+Y^2}$; d) $\left(X+\frac{X}{X-1}\right):\left(X-\frac{X}{X-1}\right)$; e) $\left(\frac{X^2}{Y^3}+\frac{1}{X}\right):\left(\frac{X}{Y^2}-\frac{1}{Y}+\frac{1}{X}\right)$;

f) $\dfrac{1}{1+\dfrac{X}{Y+Z}}+\dfrac{1}{1+\dfrac{Y}{X+Z}}+\dfrac{1}{1+\dfrac{Z}{X+Y}}$.

8) Efectuați:

a) $\dfrac{\dfrac{X}{Y}+\dfrac{Y}{X}+1}{\dfrac{1}{X}+\dfrac{1}{Y}}:\dfrac{X^3-Y^3}{X^2-Y^2}$; b) $\dfrac{\dfrac{X^2+Y^2}{Y}-X}{\dfrac{1}{Y}-\dfrac{1}{X}}:\dfrac{X^3+Y^3}{X^2-Y^2}$.

LUCRĂRI PENTRU VERIFICAREA ÎNSUȘIRII UNOR CUNOȘTINȚE ȘI DEPRINDERI DE BAZĂ

LUCRAREA I

1) Efectuați:

a) $(3X^2 - 6X + 2) + (3X^2 + 2X - 4)$; b) $(5X^2 - 4X + 3) - (2X^2 - 5X + 4)$; c) $(8X - Y + 3) \cdot (5X^2 - Y)$; d) $(X^6 - 3X^4 - 4X^3 + 6X + 4) : (X^3 - 3X - 2)$.

2) Descompuneți în factori:

a) $16X^2 - 4$; b) $3X^4 + 6X^3 + 3X^2$; c) $8X^3 - Y^3$; d) $X^4 - X^3 + 8X - 8$.

3) Arătați că polinomul $X - 3$ divide polinomul $X^3 - 8X - 3$.

4) Aflați cel mai mare divizor comun și cel mai mic multiplu comun al polinoamelor: $X^2 + 4X + 4$ și $X^3 + 8$.

LUCRAREA A II-A

1) Simplificați fracțiile raționale:

a) $\dfrac{-8X^3Y^4}{6X^4Y^3}$; b) $\dfrac{3XY - 3Y^2}{3Y^2 + 3XY}$; c) $\dfrac{4(X + Y)^2 - 4(X + Y) + 1}{2X + 2Y - 1}$.

2) Efectuați:

a) $\dfrac{X - 3}{3} + \dfrac{2X^2}{6X}$; b) $2X - 1 - \dfrac{X + 4}{2X}$; c) $\dfrac{1}{X^2} - \dfrac{1}{Y^2} - \dfrac{X - Y}{XY}$.

3) Ce fracție rațională poate fi scrisă în locul semnului ..., astfel încît:

a) $\dfrac{X^2 + 2X + 1}{X - 1} + \ldots = \dfrac{X^2 - 2X + 1}{X - 1}$; b) $\dfrac{X^2 + 2X + 1}{X - 1} \cdot (\ldots) = \dfrac{X^2 - 2X + 1}{X - 1}$?

4) Efectuați:

$$\left(\frac{X^3 - X}{X^2 + 1} + \frac{2X^2}{X^3 - X^2 + X - 1}\right) : \frac{X^2}{X^2 - 1}.$$

Capitolul IV

ECUAȚII DE GRADUL AL DOILEA

1. PREZENTARE

Multe probleme practice se pot rezolva folosind ecuațiile. De exemplu, să presupunem că un arhitect vrea să proiecteze o cameră de 15 m², dorind ca lungimea camerei să fie cu 2 m mai mare decît lățimea.

Dacă notăm cu x lățimea camerei (măsurată în m), atunci lungimea camerei este $x + 2$, iar aria camerei este $(x + 2) \cdot x$. Putem rezolva problema arhitectului dacă reușim să rezolvăm ecuația:

$$(x + 2) \cdot x = 15 \ (x \in \mathbf{R}).$$

Această ecuație este echivalentă cu ecuația:

$$x^2 + 2x - 15 = 0 \ (x \in \mathbf{R}).$$

care este o ecuație de gradul al II-lea. O soluție a sa este evidentă, anume $x = 3$. Dar ecuația mai are încă o soluție, anume -5 (verificați!).

Arhitectul își rezolvă problema dacă proiectează camera avînd lungimea de 5 metri și lățimea de 3 metri. Aceasta este oare singura soluție acceptabilă pentru arhitect?

DEFINIȚIE. Vom numi **ecuație de gradul al II-lea** orice ecuație de forma:

$$ax^2 + bx + c = 0 \ (x \in \mathbf{R}).$$

cu a, b, c numere reale. Putem presupune de la început că $a \neq 0$, căci pentru $a = 0$ obținem o ecuație liniară (de gradul I).

Să notăm $P(X) = aX^2 + bX + c$; acesta este un polinom în X de gradul al II-lea; de aici provine și numele ecuației. Soluțiile ecuației se mai numesc și **rădăcini** ale polinomului.

De exemplu, 7 este soluție a ecuației $x^2 - 16x + 63 = 0$, deoarece este adevărat că $7^2 - 16 \cdot 7 + 63 = 0$. Notînd $P(X) = X^2 - 16X + 63$, constatăm că $P(7) = 0$, deci 7 este rădăcină a polinomului $P(X)$. 8 este rădăcină? Dar 9?

EXERCIȚIU REZOLVAT

Pentru ce valori ale lui m și n ecuația $x^2 + mx + n = 0$ admite soluțiile 4 și -3?

Deoarece 4 este soluție a ecuației, înlocuind necunoscuta x cu 4 obținem propoziția adevărată $4^2 + m \cdot 4 + n = 0$. La fel, din faptul că -3 este soluție, obținem propoziția adevărată: $(-3)^2 + m \cdot (-3) + n = 0$.

Deci m și n sînt soluții ale sistemului:

$$16 + 4m + n = 0$$

$$9 - 3m + n = 0.$$

Obținem $m = -1$ și $n = 12$.

Dacă notăm $P(X) = X^2 + mX + n$, faptul că 4 și -3 sînt rădăcini ale polinomului $P(X)$ se exprimă prin condițiile $P(4) = 0$ și $P(-3) = 0$, care conduc la sistemul de ecuații de mai sus.

EXERCIȚII

1) Formați ecuațiile de gradul al II-lea care au coeficienții a, b, c dați în tabelul următor (primul rînd este completat ca model).

Verificați, pentru fiecare dintre ecuații, dacă vreun element din mulțimea $\left\{0, \frac{1}{2}, 1, 2\right\}$ este soluție.

a	b	c	Ecuația
2	-9	7	$2x^2 - 9x + 7 = 0$
4	0	1	
5	17	0	
1	-3	-3	
-1	0	5	
6	0	0	
-1	4	0	

2) Precizați coeficienții a, b, c pentru fiecare dintre ecuațiile:

a) $2x^2 - 20x + \sqrt{19} = 0$; b) $x^2 - x + 1 = 0$; c) $2x^2 + 15 = 0$; d) $x^2 = 0$; e) $-x^2 + 4x = 0$; f) $-9x^2 = 0$; g) $-x^2 + x\sqrt{7} + x - 5 = 0$; h) $3x^2 + 5x\sqrt{5} = 0$; i) $(m^2 + 1)x^2 + 2mx + 3(m + 2) = 0$.

3) Dintre următoarele ecuații, care sînt echivalente cu ecuații de gradul al II-lea?

a) $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) = (x^2 + 3)^2$; b) $x(x + 2)(x + 3) = x(x + 1)(x + 4)$;

c) $(2x-1)(4x^2+2x+1)-8x(x^2+2x+15) = 0$; d) $(\sqrt{2}+x+1)^2+(\sqrt{2}-x-1)^2 = 0$.

4) Este 5 o soluție a ecuației $-x^2 - 4x + 5 = 0$? Dar -5? Este $-1 + \sqrt{2}$ rădăcină a trinomului $X^2 - 2X - 1$? Dar $1 + \sqrt{2}$?

5) a) Aflați valoarea lui m știind că 1 este soluție a ecuației

$$5x^2 - mx + 7 - m = 0.$$

b) Pentru ce valoare a parametrului p, ecuația $px^2 - 5x - 4p = 0$ are soluția 2?

2. REZOLVAREA ECUAȚIEI DE GRADUL AL II-LEA. CAZURI SPECIALE

De exemplu, să rezolvăm ecuația:

$$x^2 - 6x = 0 \ (x \in \mathbf{R}).$$

Constatăm imediat, prin înlocuire directă, că numărul 0 este soluție a ecuației.

Să presupunem că numărul real s este soluție a ecuației; atunci, dacă înlocuim necunoscuta x cu s, obținem propoziția adevărată $s^2 - 6s = 0$, sau $s^2 = 6s$.

Distingem două cazuri:

— soluția s este 0;

— $s \neq 0$; în acest caz, împărțind ambii membri cu s, obținem $s = 6$. Deoarece $6^2 - 6 \cdot 6 = 0$, ecuația are două soluții: 0 și 6.

Să considerăm polinomul $P(X) = X^2 - 6X$. Știm că rădăcinile sale sînt 0 și 6. Dacă-l descompunem în factori: $P(X) = X(X - 6)$, observăm că cei doi factori sînt de forma $X - s$, unde s este rădăcină a polinomului.

Alt exemplu: ecuația $(x - 1)(x + 15) = 0$ $(x \in \mathbf{R})$.

Înlocuind necunoscuta x prin numărul s, presupunînd că acesta este soluție, obținem $(s - 1)(s + 15) = 0$. Dacă $s \neq 1$, împărțim ambii membri cu $s - 1$ și obținem $s + 15 = 0$, adică $s = -15$. Ecuația are două soluții, 1 și -15 (verificați că sînt soluții!).

Polinomul $P(X) = (X - 1)(X + 15)$ este deja descompus în factori. Observați legătura între factori și rădăcinile sale!

Pentru a rezolva ecuația $2x^2 + 3x = 0$, $x \in \mathbf{R}$, se obișnuiește să se procedeze astfel:

— se descompune în factori: $x(2x + 3) = 0$;

— fiecare factor ne dă o soluție; din $x = 0$ obținem soluția 0; din $2x + 3 = 0$, obținem soluția $-\frac{3}{2}$.

EXERCIȚII

1) Rezolvați ecuațiile (presupunem $x \in \mathbf{R}$):

a) $x^2 = 4x$; b) $x^2 = -3x$; c) $4x^2 = x$; d) $-2x^2 = -7x$.

2) Rezolvați ecuațiile:

a) $x^2 - 3x = 0$; b) $x^2 + 2x = 0$; c) $2x^2 - 6x = 0$; d) $2x^2 + 6x = 0$; e) $7x^2 - x = 0$; f) $-5x^2 + 7x = 0$; g) $-0{,}6x^2 - 3{,}6x = 0$.

3) Rezolvați ecuațiile:

a) $x(x+8) = 0$; b) $(x+1)(x-2) = 0$; c) $(x+2)(x-3) = 0$; d) $(2x-5)(5x-2) = 0$; e) $(3x - 8)(2x - 13) = 0$.

Am rezolvat ecuații de gradul al II-lea de forma $ax^2 + bx = 0$ (deci în care lipsește termenul liber). Vom rezolva acum ecuații în care $b = 0$, deci de forma $ax^2 + c = 0$.

De exemplu, să rezolvăm ecuația

$$x^2 - 81 = 0, \ x \in \mathbf{R}.$$

Ca de obicei, presupunem că numărul s este soluție a ecuației; să înlocuim necunoscuta x cu numărul s; obținem propoziția adevărată $s^2 - 81 = 0$, pe care o putem scrie astfel $(s + 9)(s - 9) = 0$.

Distingem două cazuri:

1) $s = -9$;

2) $s \neq -9$; în acest caz $s + 9 \neq 0$; împărțind ambii membri cu $s + 9$, obținem $s - 9 = 0$ deci $s = 9$.

Atît -9 cît și 9 sînt soluții ale ecuației.

Să observăm că polinomul $P(X) = X^2 - 81$ se descompune în factori astfel: $P(X) = (X + 9)(X - 9)$; factorul $X + 9$ ne dă soluția -9, iar factorul $X - 9$ ne dă soluția 9.

Alt exemplu: să aflăm soluțiile ecuației $5x^2 - 3 = 0$.

Polinomul $P(X) = 5X^2 - 3$ se descompune în factori astfel:

$$P(X) = 5\left(X^2 - \frac{3}{5}\right) = 5\left(X + \sqrt{\frac{3}{5}}\right)\left(X - \sqrt{\frac{3}{5}}\right).$$

Deci ecuația are soluțiile $-\sqrt{\frac{3}{5}}$ și $\sqrt{\frac{3}{5}}$.

Să rezolvăm acum ecuația:

$$6x^2 + 11 = 0, \ x \in \mathbf{R}.$$

Pentru orice număr real s, avem $s^2 \geqslant 0$; deci $6s^2 \geqslant 0$, de unde rezultă că $6s^2 + 11 \geqslant 11 > 0$. Așadar, dacă înlocuim necunoscuta x prin numărul s, propoziția $6s^2 + 11 = 0$ este falsă, oricare ar fi s. Ecuația dată nu are nici o soluție reală.

EXERCIȚII

1) Rezolvați ecuațiile:

a) $x^2 - 1 = 0$; b) $4x^2 - 1 = 0$; c) $-x^2 + 9 = 0$; d) $2x^2 - 8 = 0$; e) $x^2 + 1 = 0$; f) $4x^2 - 0{,}05 = 0$; g) $-x^2 - 8 = 0$; h) $-x^2 + 2 = 0$.

2) Rezolvați ecuațiile:

a) $2x^2 - 3 = 0$; b) $\sqrt{2}x^2 - 2\sqrt{2} = 0$; c) $4x^2 - 0{,}5 = 0$; d) $144x^2 = 1$; e) $49x^2 = (\sqrt{5} + 1)^2$; f) $2x^2 - (1 + \sqrt{2})^2 = 0$.

Exemplele de mai sus ne arată că ecuația de gradul al II-lea $ax^2 + bx + c = 0$, în cazurile $b = 0$ sau $c = 0$, se rezolvă simplu, prin descompunere în factori. Rezolvarea ecuației prin descompunerea trinomului în factori este posibilă și în alte cazuri.

De exemplu, să rezolvăm ecuația

$$4x^2 + 4x + 1 = 0 \ (x \in \mathbf{R}).$$

Descompunem în factori polinomul $P(X) = 4X^2 + 4X + 1$, astfel: $P(X) = (2X + 1)^2 = (2X + 1)(2X + 1)$. Amîndoi factorii ne dau aceeași rădăcină a polinomului, anume $-\frac{1}{2}$. Ecuația are deci o singură soluție; dar, se obișnuiește să se spună că polinomul are rădăcina *dublă*.

Alt exemplu. Fie ecuația $x^2 + 2x - 3 = 0$. Vom descompune în factori trinomul $X^2 + 2X - 3$, scoțînd în evidență un pătrat perfect: $X^2 + 2X - 3 = X^2 + 2X + 1 - 4 = (X + 1)^2 - 2^2 = (X + 1 + 2)(X + 1 - 2) = (X + 3)(X - 1)$. Așadar ecuația are două soluții: -3 și 1.

Scoțînd în evidență un pătrat perfect, ecuația $x^2 - 2x + 40 = 0$ poate fi înlocuită cu ecuația echivalentă:

$$(x - 1)^2 + 39 = 0.$$

Observăm că ecuația nu are nici o soluție reală.

Ecuația $x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = 0$ se rezolvă observînd că trinomul din membrul stîng poate fi descompus în factori astfel:

$$X^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})X + \sqrt{6} = X^2 - X\sqrt{2} - X\sqrt{3} + \sqrt{6} =$$
$$= X(X - \sqrt{2}) - \sqrt{3}(X - \sqrt{2}) = (X - \sqrt{2})(X - \sqrt{3}).$$

Soluțiile sînt deci $\sqrt{2}$ și $\sqrt{3}$.

EXERCIȚII

1) (oral) Explicați de ce următoarele ecuații nu au soluții:

a) $x^2 = 1 - \sqrt{2}$; b) $x^2 + 6x + 9 = -1$; c) $5(x+1)^2 + 29 = 0$; d) $(x - m)^2 = 4 - \sqrt{17}$.

2) Rezolvați ecuațiile (a, b și m sînt parametri reali):

a) $x^2 - 1 = 0$; b) $x^2 + 1 = 0$; c) $x^2 = 100$; d) $9x^2 = 1$; e) $4x^2 - 0{,}01 = 0$; f) $144x^2 = -1$; g) $x^2 = 4\pi^2$; h) $0{,}0004x^2 = 625$; i) $x^2 - (a + \sqrt{2})^2 = 0$; j) $49x^2 = (\sqrt{5} + 1)^2$; k) $13x^2 + (a - 9)^2 = 0$; l) $5x^2 + a^2 + b^2 = 2ab$; m) $2x^2 = 3m^2$.

3) Aflați toate numerele reale care sînt egale cu pătratele lor.

4) Ionică a scris:

„Ecuația $4x^2\sqrt{2} - 2x\sqrt{6} = 0$ se rezolvă astfel: trecem termenul $2x\sqrt{6}$ în membrul drept, schimbîndu-i semnul: $4x^2\sqrt{2} = 2x\sqrt{6}$; împărțim ambii membri ai ecuației prin $2x\sqrt{2}$ și obținem $2x = \sqrt{3}$; deci soluția ecuației este $\frac{\sqrt{3}}{2}$". În ce constă greșeala lui Ionică?

5) Rezolvați ecuațiile (m este un parametru real):

a) $(x+8)(x-5) = 0$; b) $(3x-5)(x+5{,}19) = 0$; c) $4x(5x-13) = 0$; d) $-12x^2 = 0$; e) $x^2 + 31x = 0$; f) $2x^2 = 19x$; g) $-x^2 = 59x$; h) $-\sqrt{8}x^2 + 2x = 0$; i) $x(x - 1) + 13(x - 1) = 0$; j) $x^2 + mx = 0$; k) $(x + 1)^2 = x + 1$; l) $(1 + m^2)x^2 = -x$.

6) Rezolvați ecuațiile:

a) $(x + 1)^2 - 25 = 0$; b) $x^2 + 4x + 4 = 1$; c) $x^2 + 4x + 4 = -1$; d) $x^2 + 4x + 4 = 0$. e) $x^2 + 10x + 16 = 0$; f) $x^2 - 10x + 25 = 0$; g) $x^2 + (\sqrt{2} + \sqrt{5})x + \sqrt{10} = 0$; h) $x^2 - (1 + \pi)x + \pi = 0$; i) $\sqrt{3}x^2 + (1 + \sqrt{3})x + 1 = 0$; j) $(x - 7)^2 = 2$; k) $x^2 + (m + n)x + mn = 0$; l) $mnx^2 + (m + n)x + 1 = 0$ $(m \neq 0,\ n \neq 0)$.

7) Aproximați, cu eroare de cel mult 0,01 rădăcinile ecuațiilor: a) $x^2 = 2$; b) $x^2 = \pi$; c) $x^2 - 3{,}1 = 0$; d) $4x^2 = 7$; e) $3x^2 - 5 = 0$.

8*) a) Demonstrați că dacă a, b sînt două numere reale astfel încît $ab = 0$, atunci cel puțin unul dintre ele este 0.

b) Demonstrați că dacă a, b, c sînt trei numere reale astfel încît $abc = 0$, atunci cel puțin unul dintre ele este 0.

c) Rezolvați ecuațiile:

$$x(x+1)(x+2) = 0; \quad (x-1)x^2 = (x-1)(6x-8); \quad x^3 + (1+\sqrt{5})x^2 + \sqrt{5}x = 0.$$

9) O coală de hîrtie pentru desen are aria de 1 m², iar raportul dimensiunilor egal cu $\sqrt{2}$. Aflați dimensiunile, cu aproximație de 1 mm.

3. REZOLVAREA ECUAȚIEI DE GRADUL AL II-LEA. FORMULA DE REZOLVARE

Vom stabili o metodă generală, care ne arată dacă o ecuație de gradul al II-lea are sau nu soluții, iar dacă are soluții cum le obținem.

Să luăm de exemplu ecuația:

$$15x^2 + 8x + 1 = 0, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Împărțind ambii membri prin 15 (astfel încît coeficientul lui x^2 să devină 1), obținem ecuația echivalentă:

$$x^2 + \frac{8}{15}x + \frac{1}{15} = 0.$$

Să considerăm trinomul $P(X) = X^2 + \frac{8}{15}X + \frac{1}{15}$. Să ne reamintim formula $(X+u)^2 = X^2 + 2uX + u^2$. Vom încerca să scoatem în evidență un pătrat perfect, care să conțină primii doi termeni ai trinomului. Din $2u = \frac{8}{15}$ obținem $u = \frac{4}{15}$. Să descompunem în factori:

$$P(X) = X^2 + \frac{8}{15}X + \frac{1}{15} = X^2 + 2\cdot\frac{4}{15}X + \left(\frac{4}{15}\right)^2 - \left(\frac{4}{15}\right)^2 + \frac{1}{15} =$$

$$= \left(X + \frac{4}{15}\right)^2 - \frac{1}{225} = \left(X + \frac{4}{15}\right)^2 - \left(\frac{1}{15}\right)^2 = \left(X + \frac{4}{15} + \frac{1}{15}\right)\left(X + \frac{4}{15} - \frac{1}{15}\right) =$$

$$= \left(X + \frac{1}{3}\right)\left(X + \frac{1}{5}\right).$$

Deci ecuația are soluțiile $-\frac{1}{3}$ și $-\frac{1}{5}$.

Ecuația $15x^2 - 150x + 405 = 0$ este echivalentă cu:

$$x^2 - 10x + 27 = 0,$$

adică cu $(x-5)^2 + 2 = 0$; deci ecuația nu are soluții reale.

Să procedăm la fel și în cazul general. Ecuația

$$ax^2 + bx + c = 0$$

este echivalentă cu ecuația $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$.

Să considerăm trinomul $P(X) = X^2 + \frac{b}{a}X + \frac{c}{a}$. Din $2u = \frac{b}{a}$ obținem $u = \frac{b}{2a}$. Vom completa un pătrat perfect:

$$P(X) = X^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}X + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = \left(X + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Putem descompune trinomul $P(X)$ în factori de gradul I numai dacă numărul $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ este $\geqslant 0$. Semnul acestui număr este același cu semnul numărătorului $b^2 - 4ac$. De aceea, numărul $b^2 - 4ac$ este numit **discriminantul*** ecuației (sau al trinomului); el se notează de obicei cu litera grecească Δ (se citește „delta").

Distingem trei cazuri:

I. $\Delta > 0$. În acest caz vom putea decompune în factori:

$$P(X) = \left(X + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = \left(X + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(X + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right).$$

Deci ecuația $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ are două soluții:

$$-\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ și } -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Se obișnuiește să se noteze soluțiile ecuației prin x_1 și x_2. Așadar,

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ unde } \Delta = b^2 - 4ac.$$

II. $\Delta = 0$. În acest caz trinomul este deja descompus în factori:

$$P(X) = \left(X + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Trinomul are o rădăcină dublă, iar ecuația are o singură soluție, anume $-\frac{b}{2a}$.

III. $\Delta < 0$. În acest caz $-\frac{\Delta}{4a^2} > 0$, deci $P(s) > 0$ pentru orice număr real s; ecuația nu are nici o soluție reală.

---

* **discrimina** — a separa. Discriminantul separă cazurile.

Putem sistematiza rezolvarea ecuației de gradul al II-lea în următorea schemă:

Cazul I:	$\Delta > 0$ **Ecuația are două soluții distincte** $x_1 \neq x_2$	**Soluțiile se calculează cu formula** $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ sau $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
Cazul II:	$\Delta = 0$ **Ecuația are o singură soluție** $x_1 = x_2$	
Cazul III:	$\Delta < 0$ **Ecuația nu are nici o soluție reală**	

EXERCIȚIU

(oral) Explicați de ce:

a) dacă ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ nu are nici o soluție, atunci

$$\Delta = b^2 - 4ac < 0;$$

b) dacă ecuația are două soluții distincte, atunci $\Delta > 0$.

Observații. 1) Formula de rezolvare a ecuației de gradul al II-lea este generală, deci poate fi aplicată și ecuațiilor în care $b = 0$ sau $c = 0$; dar, în unele cazuri, este avantajos să lucrăm prin descompunere în factori, această metodă fiind uneori mai rapidă.

2) Dacă $b = 2b'$, să observăm că formula de rezolvare a ecuației devine

$$x_{1,2} = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a};$$

dacă în plus $a = 1$, atunci formula de rezolvare este: $x_{1,2} = -b' \pm \sqrt{b'^2 - c}$.

Rezolvarea ecuației cu formula generală este o metodă algoritmică; ea poate fi programată pentru calculatoarele electronice.

Algoritmul de calcul al soluțiilor este următorul:

Pasul 1. Citește coeficienții a, b și c;

Pasul 2. Calculează $\Delta = b^2 - 4ac$;

Pasul 3. Dacă $\Delta < 0$, scrie „Ecuația nu are nici o soluție", STOP. Dacă $\Delta \geq 0$, continuă cu pasul 4;

Pasul 4. Calculează $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$. Scrie x_1. Dacă $\Delta = 0$, scrie „O singură soluție", STOP. Dacă $\Delta > 0$, continuă cu pasul 5;

Pasul 5. Calculează $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$. Scrie x_2. STOP.

EXEMPLE

1) Să rezolvăm ecuația:

$$x^2 - 107x + 1302 = 0.$$

Să recunoaștem coeficienții: $a = 1$; $b = -107$; $c = 1302$. Deci $\Delta = (-107)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1302 = 11449 - 5208 = 6241$.

Observăm că $\Delta > 0$, deci ecuația are două soluții. Aplicînd formula de rezolvare, obținem:

$$x_{1,2} = \frac{-(-107) \pm \sqrt{6241}}{2 \cdot 1} = \frac{107 \pm 79}{2}.$$

Deci $x_1 = \frac{107 - 79}{2} = 14$ și $x_2 = \frac{107 + 79}{2} = 93$.

2) Să rezolvăm ecuația:

$$0{,}01x^2 + 4{,}2x + 441 = 0.$$

Observăm că $\Delta = 4{,}2^2 - 4 \cdot 0{,}01 \cdot 441 = 17{,}64 - 17{,}64 = 0$; deci ecuația are o singură soluție, anume $-\frac{4{,}2}{2 \cdot 0{,}01} = -210$.

3) Fie ecuația $x^2 + \sqrt{79}x + 20 = 0$. Să calculăm discriminantul: $\Delta = (\sqrt{79})^2 - 4 \cdot 1 \cdot 20 = 79 - 80 = -1$. Deoarece $\Delta < 0$, ecuația nu are soluții reale.

EXERCIȚII REZOLVATE

1) a) Demonstrați că pentru orice m real, ecuația

$$mx^2 + (m^2 + 1)x + m = 0, \quad x \in \mathbf{R},$$

are soluții.

b) Calculați soluțiile, presupunînd $m > 1$.

c) Aflați valorile parametrului m pentru ecuația are o singură soluție.

Rezolvare.

a) Calculăm discriminantul ecuației:

$$\Delta = (m^2 + 1)^2 - 4 \cdot m \cdot m = m^4 + 2m^2 + 1 - 4m^2 = (m^2 - 1)^2.$$

Constatăm că $\Delta \geqslant 0$, deci ecuația are soluții pentru orice valoare a parametrului m.

b) Să calculăm soluțiile:

$$x_{1,2} = \frac{-(m^2 + 1) \pm \sqrt{(m^2 - 1)^2}}{2m} = \frac{-m^2 - 1 \pm |m^2 - 1|}{2m}.$$

Pentru $m > 1$, avem $|m^2 - 1| = m^2 - 1$. Soluțiile sînt:

$$x_1 = \frac{-m^2 - 1 - m^2 + 1}{2m} = -m; \quad x_2 = \frac{-m^2 - 1 + m^2 - 1}{2m} = -\frac{1}{m}.$$

c) Ecuația are o singură soluție numai dacă discriminantul ei este 0. Din $(m^2 - 1)^2 = 0$ obținem $m^2 = 1$, adică $m = 1$ sau $m = -1$.

2) Se dă ecuația:

$$mx^2 - 2(m-1)x + m = 0, \quad x \in \mathbf{R},$$

unde m este un parametru real diferit de 0. Pentru ce valori ale parametrului m, ecuația:

a) nu are soluții reale;

b) are o singură soluție;

c) are două soluții?

Rezolvare. Calculăm discriminantul:

$$\Delta = 4(m-1)^2 - 4m^2 = 4(m^2 - 2m + 1 - m^2) = 4(-2m+1).$$

Discriminantul este < 0 dacă și numai dacă $-2m + 1 < 0$, adică $m > \frac{1}{2}$.

Constatăm că:

— dacă $m \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$, ecuația are două soluții distincte; acestea pot fi calculate cu formulele obișnuite;

— dacă $m = \frac{1}{2}$, ecuația are o singură soluție, anume -1;

— dacă $m \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$, ecuația nu are soluții reale.

3) Aproximați, cu eroare de cel mult 0,01, soluțiile ecuației:

$$x^2 - 10x - 5 = 0, \; x \in \mathbf{R}.$$

Rezolvare. Calculăm discriminantul: $\Delta = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 120$. Deci

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{120}}{2} = \frac{10 \pm 2\sqrt{30}}{2} = 5 \pm \sqrt{30}.$$

Avem $\sqrt{30} \approx 5{,}47$ (cu eroare de cel mult o sutime). Deci $x_1 \approx -0{,}47$ și $x_2 \approx 10{,}47$.

EXERCIȚII

1) Completați tabelul:

Ecuația	a	b	c	Δ	Numărul soluțiilor
$x^2 + 5x - 6 = 0$					
$3x^2 + 7x + 4 = 0$					
$x^2 - 14x + 40 = 0$					
$x^2 + x + 180 = 0$					
$4x^2 + 4x + 1 = 0$					
$3x^2 + 13x - 14 = 0$					

2) Aflați rădăciniile polinoamelor:

1) $X^2 - 14X + 24$; b) $X^2 + 14X + 24$; c) $15X^2 - 8X + 1$; d) $2X^2 + 3X + 1$.

3) Rezolvați ecuațiile:

a $5x^2 - 9x - 2 = 0$; b) $3x^2 + 11x - 20 = 0$; c) $1{,}5x^2 - 5{,}3x - 2{,}8 = 0$; d) $0{,}11x^2 + 0{,}71x + 0{,}3 = 0$; e) $x^2 - 11x - 81 = 0$.

4) Rezolvați ecuațiile:

a) $10x^2 + 20x - 30 = 0$; b) $x^2 + 2x - 3 = 0$ c) $0{,}1x^2 + 0{,}2x - 0{,}3 = 0$; d) $0{,}01x^2 + 0{,}02x - 0{,}03 = 0$. Ce observați?

5) Stabiliți dacă ecuațiile următoare au sau nu soluții și, în caz afirmativ, rezolvați-le;

a) $2x^2 - x - 1 = 0$; b) $x^2 + 6x + 5 = 0$; c) $-x^2 + 90x - 89 = 0$; d) $x^2 + 5x + 7 = 0$; e) $3x^2 - 4x + 1 = 0$; f) $x^2 + x + 1 = 0$; g) $x^2 - x + 1 = 0$; h) $x^2 - x - 1 = 0$.

6) Demonstrați că pentru orice valoare reală a parametrului m, ecuația $2x^2 + mx - 13 = 0$ are soluții. Există valori ale lui m pentru care ecuația are o singură soluție?

7) Pentru ce valori ale lui m ecuația $4x^2 + mx + 529 = 0$ are o singură soluție? Pentru aceste valori, rezolvați ecuația.

8) Calculați cu aproximație de o sutime soluțiile ecuației:

a) $x^2 - 10x - 5 = 0$; b) $x^2 - 2x - 2 = 0$; c) $x^2 - 2x - 17 = 0$.

9) Aproximați, cu eroare de cel mult 0,001, soluțiile ecuațiilor:

a) $x^2 - 14x - 1 = 0$; $x^2 + 4\sqrt{5}x + 1 = 0$.

10) Aflați valoarea lui m știind că 1 verifică ecuația $mx^2 - 14x + 25 = 0$. Aflați apoi cealaltă soluție.

11) Orice ecuație de forma $ax^2 + bx + c = 0$ cu $a \neq 0$ poate fi adusă la forma $x^2 + px + q = 0$, prin împărțirea cu a. Scrieți algoritmul de rezolvare pentru ecuația $x^2 + px + q = 0$.

4. ECUAȚII ECHIVALENTE CU ECUAȚII DE GRADUL AL II-LEA

Exemplul 1. Fie ecuația

$$x(x - 1) = 12, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Să presupunem că numărul real s este soluție a acestei ecuații; deci este adevărat că $s(s - 1) = 12$. Putem scrie $s^2 - s = 12$, sau $s^2 - s - 12 = 0$. Așadar s este soluție a ecuației de gradul al II-lea:

$$x^2 - x - 12 = 0, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Și reciproc, orice soluție a acestei ecuații de gradul al II-lea este soluție și a ecuației $x(x - 1) = 12$, $x \in \mathbf{R}$. Cele două ecuații sînt echivalente.

Observați cum am obținut ecuația de gradul al II-lea

$$x^2 - x - 12 = 0$$

din ecuația inițială $x(x - 1) = 12$.

Exemplul 2. Ecuația

$$(x+1)^2 = 3(x+1),\ x \in \mathbf{R}$$

se poate rezolva în felul următor: observăm că -1 este soluție; dacă s este o altă soluție a ecuației, din $(s+1)^2 = 3(s+1)$ și $s \neq -1$ rezultă $s+1=3$, adică $s=2$. Într-adevăr, și numărul 2 este soluție a ecuației (verificați!). Deci ecuația are două soluții: -1 și 2.

Am fi putut obține soluțiile acestei ecuații și în alt mod, observînd că ea este echivalentă cu ecuația $x^2+2x+1=3x+3$, $x \in \mathbf{R}$, sau cu ecuația de gradul al II-lea

$$x^2 - x - 2 = 0,\ x \in \mathbf{R}$$

și rezolvînd această ultimă ecuație.

Exemplul 3. Ecuația

$$-9 + (x+1)^2 = 3(x-2)^2,\ x \in \mathbf{R}$$

este echivalentă cu

$$-9 + x^2 + 2x + 1 = 3x^2 - 12x + 12,\ x \in \mathbf{R},$$

deci cu ecuația de gradul al II-lea:

$$-2x^2 + 14x - 20 = 0,\ x \in \mathbf{R}.$$

Rezolvați-o!

Exemplul 4. Fie ecuația

$$\frac{x^2+5}{3} = \frac{9x+1}{5},\ x \in \mathbf{R}.$$

Eliminînd numitorii, o înlocuim cu:

$$5(x^2+5) = 3(9x+1),\ x \in \mathbf{R},$$

adică cu

$$5x^2 + 25 = 27x + 3,\ x \in \mathbf{R}.$$

Este deci echivalentă cu ecuația de gradul al II-lea:

$$5x^2 - 27x + 22 = 0,$$

ale cărei soluții, obținute cu formulele obișnuite, sînt 1 și $\frac{22}{5} = 4{,}4$.

Exemplul 5. Fie ecuația

$$\frac{2x-1}{x+7} = \frac{3x+4}{x-1}.$$

Dacă înlocuim necunoscuta x prin -7, în membrul stîng numitorul este 0; la fel, dacă înlocuim necunoscuta x prin 1, în membrul drept numitorul este 0.

Din această cauză va trebui să presupunem că -7 și 1 nu sînt printre valorile pe care le poate lua necunoscuta. Evident, -7 și 1 nu pot fi soluții ale ecuației.

Cum rezolvăm această ecuație? Presupunem că numărul s este soluție a ei; atunci este adevărat că:

$$\frac{2s-1}{s+7}=\frac{3s+4}{s-1}.$$

Întrucît $s+7\neq 0$ și $s-1\neq 0$, înmulțim ambii membri cu numărul $(s+7)(s-1)$, care este diferit de 0. Obținem (după simplificări):

$$(s-1)(2s-1)=(s+7)(3s+4),$$

$$2s^2-s-2s+1=3s^2+4s+21s+28,$$

$$-s^2-28s-27=0.$$

Așadar s este soluție a ecuației de gradul al II-lea:

$$-x^2-28x-27=0;$$

rezolvînd-o, obținem $s=-27$ sau $s=-1$.

Practic, pentru a rezolva ecuația $\frac{2x-1}{x+7}=\frac{3x+4}{x-1}$ procedăm astfel:

— aducem la același numitor și eliminăm numitorii:

$$(x-1)(2x-1)=(x+7)(3x+4);$$

— trecem la ecuația de gradul al II-lea:

$$-x^2-28x-27=0.$$

pe care o rezolvăm;

— dintre soluțiile acestei ecuații de gradul al II-lea, eliminăm pe acelea care anulează vreunul dintre numitorii ecuației inițiale; celelalte sînt soluțiile ecuației inițiale.

Exemplul 6. Fie ecuația $\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{x}{3}$. Pentru a o rezolva procedăm ca în exemplul 5:

— eliminăm numitorii:

$$3(x^2-1)=(x-1)x;$$

— trecem la ecuația de gradul al II-lea:

$$3x^2-3=x^2-x,$$

$$2x^2+x-3=0;$$

— rezolvăm ecuația de gradul al II-lea; ea are soluțiile 1 și $-\frac{3}{2}$;

— întrucît 1 anulează numitorul membrului stîng în ecuația $\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{x}{3}$, această ecuație are numai o soluție, anume $-\frac{3}{2}$ (verificați!).

Exemplul 7. Ecuația $\frac{3x^2+1}{x^2+2}=2$ se înlocuiește cu:

$$3x^2+1=2(x^2+2),$$

adică cu ecuația de gradul al II-lea

$$x^2-3=0.$$

Ea are soluțiile $-\sqrt{3}$ și $\sqrt{3}$ (verificați!).

Exemplul 8. Pentru a rezolva ecuația

$$\frac{x}{x-2}+\frac{5}{x+2}=\frac{8}{x^2-4}$$

aducem mai întîi ambii membri ai ecuației la același numitor, eliminînd apoi numitorii:

$$(x+2)x+(x-2)5=8,$$

adică

$$x^2+2x+5x-10=8,$$

sau

$$x^2+7x-18=0.$$

Rezolvăm această ecuație de gradul al II-lea; ea are soluțiile 2 și -9.

Să observăm că numărul 2 nu poate fi soluție a ecuației inițiale, deoarece înlocuirea necunoscutei x cu 2 provoacă anularea unor numitori. Ecuația

$$\frac{x}{x-2}+\frac{5}{x+2}=\frac{8}{x^2-4}$$

are o singură soluție, anume -9 (verificați!).

Exemplul 9. Ecuația

$$(x+1)^3=(x-1)^3$$

este echivalentă cu ecuația

$$x^3+3x^2+3x+1=x^3-3x^2+3x-1,$$

adică cu ecuația de gradul al II-lea:

$$6x^2+2=0.$$

Aceasta nu are nici o soluție reală.

EXERCIȚII

1) Rezolvați ecuațiile:

a) $x^2+x=-1$; b) $x^2-132=x$; c) $x^2+1=5x-8$.

2) Rezolvați ecuațiile:

a) $(x+3)^2=25(x+3)$; b) $2(x-2)^2=3(x-2)$; c) $(2x-3)^2=4$; d) $4(x-3)^2=25$.

3) Rezolvați ecuațiile:

a) $\frac{x^2+1}{2}=5(x+2)$; b) $\frac{(x-1)^2}{4}=x-2$; c) $\frac{x^2+1}{2}=5(x-2)$.

4) Rezolvați ecuațiile:

a) $(x+1)^2+(x-2)^2=0$; b) $(x+1)^2+(x-2)^2=3$; c) $(x+1)^2=1-2(x+3)$; d) $x(x-1)=(x+1)(2-x)$.

5) Rezolvați ecuațiile:

a) $\frac{x^2+3}{x^2+4}=\frac{1}{2}$; b) $\frac{x^2-1}{x^2+1}=-\frac{1}{2}$; c) $\frac{2}{x^2+1}=\frac{3}{x}$; d) $\frac{2x}{x^2+1}=-\frac{1}{2}$.

6) Rezolvați ecuațiile:

a) $\frac{3x+1}{x+2}=\frac{x-1}{x-2}$; b) $\frac{5x+1}{x+1}=\frac{x+2}{x}$; c) $\frac{x+7}{3x+1}=\frac{x}{x-3}$.

7) Rezolvați ecuațiile:

a) $\frac{x^2+1}{2} - x = 2$; b) $\frac{x^2+3}{6} - \frac{x+4}{3} = 5$; c) $\frac{x^2-4}{8} - \frac{2x+3}{5} = 1$.

8) Rezolvați ecuațiile:

a) $\frac{3x+1}{x+2} - \frac{x-1}{x-2} = 1$; b) $\frac{4}{9x^2-1} - \frac{x}{1-3x} = \frac{4}{3x+1}$; c) $\frac{4}{x+3} - \frac{5}{3-x} = \frac{1}{x-3} - 1$; d) $\frac{2x+1}{2x-1} - \frac{3(2x-1)}{2x+1} - \frac{8x}{4x^2-1} = 0$.

9) Justificați de ce ecuațiile următoare nu au soluții:

a) $3(x-9)^2 = 2 - \sqrt{5}$; b) $\frac{1}{x^2+1} = -1$; c) $2(x-2)^2 + 3(x-3)^2 = 0$.

5. RELAȚII ÎNTRE RĂDĂCINILE ȘI COEFICIENȚII TRINOMULUI DE GRADUL AL II-LEA

Să considerăm trinomul de gradul al II-lea

$$P(X) = aX^2 + bX + c, \text{ cu } a \neq 0.$$

Dacă discriminantul său $\Delta = b^2 - 4ac$ este ≥ 0, trinomul are două rădăcini; acestea se calculează în funcție de coeficienții a, b și c cu formulele:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Să presupunem acum că ne sînt cunoscute cele două rădăcini x_1 și x_2 ale unui trinom de gradul al II-lea. Putem oare afla coeficienții săi?

Să calculăm suma și apoi produsul rădăcinilor:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a},$$

$$x_1 x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b)^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Putem scrie astfel:

$$b = -a(x_1 + x_2),$$

$$c = ax_1x_2.$$

Să considerăm că mai multe trinoame de gradul al II-lea au rădăcinile x_1 și x_2. Dar, dacă ne alegem valoarea lui a (de exemplu, dacă luăm $a = 1$), atunci coeficienții b și c sînt *unic determinați* de rădăcini.

Formulele

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1x_2 = \frac{c}{a},$$

poartă numele de **relațiile între rădăcinile și coeficienții** trinomului de gradul al II-lea (sau **relațiile lui Viète***).

Observație. Dacă se cunosc suma s și produsul p ale rădăcinilor unei ecuații de gradul al II-lea, atunci ea este echivalentă cu ecuația:

$$x^2 - sx + p = 0.$$

EXERCIȚII REZOLVATE

1) Calculați suma și produsul soluțiilor ecuației:

$$3x^2 - 7x - 113 = 0.$$

Rezolvare. Ecuația are două soluții, întrucît discriminantul ei este >0. Fără a calcula soluțiile, putem scrie:

$$x_1 + x_2 = -\frac{-7}{3} = \frac{7}{3}, \quad x_1x_2 = \frac{-113}{3} = -\frac{113}{3}.$$

2) Fie ecuația:

$$2x^2 - mx - 3 = 0.$$

a) Demonstrați că pentru orice valoare a parametrului m ecuația are două soluții.

b) Calculați (în funcție de m):

— suma rădăcinilor trinomului $2X^2 - mX - 3$;
— produsul rădăcinilor;
— suma inverselor rădăcinilor;
— suma pătratelor rădăcinilor;
— suma cuburilor rădăcinilor.

Rezolvare. a) Să recunoaștem că $a = 2$, $b = -m$, $c = -3$; deci $\Delta = m^2 + 24 > 0$ pentru orice m real; deci ecuația are două soluții.

b) Aplicînd formulele lui Viète, obținem

$$x_1 + x_2 = \frac{m}{2}, \quad x_1x_2 = -\frac{3}{2}.$$

Apoi:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{b}{c} = -\frac{m}{3};$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(\frac{m}{2}\right)^2 - 2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{m^2 + 12}{4};$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = \left(\frac{m}{2}\right)^3 - 3\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{m}{2} = \frac{m^3 + 18m}{8}.$$

* François Viète (1540–1603), matematician francez, unul dintre creatorii algebrei, s-a ocupat în special cu rezolvarea ecuațiilor.

3) Fie ecuațiile de gradul al II-lea:

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0,$$
$$a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0.$$

Demonstrați că ecuațiile au aceleași soluții dacă și numai dacă:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Rezolvare. Presupunem că ecuațiile au aceleași soluții; fie acestea x_1 și x_2. Relațiile lui Viète pentru prima ecuație sînt

$$x_1 + x_2 = -\frac{b_1}{a_1}, \quad x_1x_2 = \frac{c_1}{a_1},$$

iar pentru a doua ecuație sînt:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b_2}{a_2}, \quad x_1x_2 = \frac{c_2}{a_2}.$$

Rezultă $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2}$ și $\frac{c_1}{a_1} = \frac{c_2}{a_2}$, de unde, folosind proprietățile proporțiilor deducem că: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

Reciproc, presupunînd că cele două ecuații au coeficienții proporționali, să notăm cu r valoarea comună a rapoartelor $\frac{a_1}{a_2}$, $\frac{b_1}{b_2}$ și $\frac{c_1}{c_2}$. Atunci $a_1 = a_2r$, $b_1 = b_2r$ și $c_1 = c_2r$. Evident $r \neq 0$. Astfel ecuațiile sînt echivalente, deoarece prima se obține din a doua prin înmulțirea ambilor membri cu numărul r.

4) Un dreptunghi are aria de 60 cm² iar perimetrul de 38 cm. Aflați dimensiunile sale.

Rezolvare. Semiperimetrul dreptunghiului este de 19 cm; deci dimensiunile L și l ale dreptunghiului au suma 19 și produsul 60. Formăm ecuația de gradul al II-lea ale cărei soluții sînt L și l:

$$x^2 - 19x + 60 = 0.$$

Rezolvînd ecuația, găsim $x_1 = 4$ și $x_2 = 15$; deci dimensiunile dreptunghiului sînt: $L = 15$ (cm), $l = 4$ (cm).

EXERCIȚII

1) Calculați suma, produsul și suma pătratelor rădăcinilor polinoamelor:

a) $2X^2 - 4X + 1$; b) $3X^2 - 8X + 5$; c) $-X^2 - 6X - 1$; d) $3X^2 - 36X + 5$; e) $2X^2 - 16X + 19$; f) $-9X^2 + 16X - 27$.

2) Formați ecuații de gradul al II-lea ale căror soluții sînt:

a) 1 și 2; b) 4 și 5; c) -1 și -3; d) -4 și 5; e) $\frac{2}{5}$ și $-\frac{1}{3}$; f) -4 și 4; g) 3,5 și 5,5; h) $7 - \sqrt{3}$ și $7 + \sqrt{3}$; i) $-3 - \sqrt{3}$ și $-3 + \sqrt{3}$; j) $2 + \sqrt{3}$ și $2 - \sqrt{3}$; k) $1 - \sqrt{3}$ și $2\sqrt{3}$.

3) Rezolvați ecuațiile de mai jos, cunoscînd cîte o soluție (scrisă în dreptul fiecăreia). Aflați și coeficientul necunoscut:

a) $x^2 - mx + 36 = 0$, $x_1 = 12$;
b) $2x^2 + mx - 5 = 0$, $x_1 = 5$;
c) $5x^2 - 8x + m = 0$. $x_2 = 0{,}6$.

4) Aflați două numere, cunoscînd că au suma 337 iar produsul 8086.

5) Aflați două numere pozitive, știind că media aritmetică a lor este 133,5, iar media geometrică a lor este 120.

6) Aflați dimensiunile unui dreptunghi, cunoscînd că are:
a) perimetrul de 84 m, aria de 185 m²;
b) perimetrul de 108 m, aria de 729 m²;
c) perimetrul de 108 m, aria de 542 m².

7) Pentru ce valori ale lui m și n, ecuațiile

$$x^2 + mx + 1 = 0,$$
$$2x^2 - nx + m = 0$$

sînt echivalente?

8) Fie ecuația $x^2 - \sqrt[3]{2}x - \sqrt[3]{4} = 0$. Calculați $x_1^2 + x_2^2$ și $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$, fără a rezolva ecuația.

9* Pot fi echivalente ecuațiile:

$$mx^2 + (m - 4)x + 4m = 0,$$
$$(3 + m)x^2 + 5(5 + 3m)x + 8 = 0?$$

Dacă da, rezolvați-le în acest caz.

6. DESCOMPUNEREA ÎN FACTORI A TRINOMULUI DE GRADUL AL II-LEA

Să ne reamintim cîteva exemple de descompuneri în factori ale unor trinoame de gradul al II-lea:

$X^2 + 2X = X(X + 2)$;
$X^2 - 6 = (X + \sqrt{6})(X - \sqrt{6})$;
$X^2 - 4X + 4 = (X - 2)^2$;
$X^2 - 4X + 3 = (X - 2)^2 - 1 = (X - 1)(X - 3)$;
$X^2 - 5X + 6 = X^2 - 2X - 3X + 6 = X(X - 2) - 3(X - 2) =$
$= (X - 2)(X - 3)$.

Metodele cunoscute se aplică mai greu în cazul în care coeficienții sînt numere „mari", ca de exemplu în cazul trinomului:

$$41X^2 + 205X - 8364.$$

Formulele lui Viète ne permit să găsim o metodă generală de descompunere în factori a trinomului de gradul al II-lea. Fie trinomul:

$$P(X) = aX^2 + bX + c, \quad a \neq 0.$$

Distingem trei cazuri:

1) Discriminantul $\Delta = b^2 - 4ac$ este < 0. În acest caz orice încercare de descompunere a trinomului în factori de gradul I nu conduce la nici un rezultat. Trinomul este *ireductibil*.

2) $\Delta = 0$. În acest caz trinomul se poate descompune astfel:

$$P(X) = a\left(X + \frac{b}{2a}\right)^2,$$

deci se poate scrie ca pătrat al unui binom de gradul I.

3) $\Delta > 0$. În acest caz, dacă x_1 și x_2 sînt rădăcinile trinomului, atunci folosind relațiile lui Viète obținem:

$$P(X) = a\left(X^2 + \frac{b}{a}X + \frac{c}{a}\right) = a(X^2 - (x_1 + x_2)X + x_1x_2) =$$

$$= a(X - x_1)(X - x_2).$$

Așadar trinomul se descompune ca produs de doi factori de gradul I.

De exemplu, să descompunem în factori trinomul

$$41X^2 + 205X - 8364.$$

Discriminantul său este $\Delta = 205^2 - 4 \cdot 41 \cdot (-8364) = 1\,413\,721$. Deci trinomul se descompune ca produs de doi factori de gradul I.

$$x_{1,2} = \frac{-205 \pm \sqrt{1\,413\,721}}{82} = \frac{-205 \pm 1\,189}{82}$$

deci $x_1 = \dfrac{-205 - 1\,189}{82} = \dfrac{1\,394}{82} = -17$, $x_2 = \dfrac{-205 + 1\,189}{82} = 12$.

Rezultă

$$41X^2 + 205X - 8364 = 41(X + 17)(X - 12) = (41X + 697)(X - 12).$$

EXERCIȚII

1) Descompuneți în factori de gradul I:

a) $X^2 - 13X + 30$; b) $X^2 + 36X + 323$; c) $2X^2 - 5X - 12$; d) $-X^2 + 5X - 4$; e) $X^2 - 2\sqrt{2}X - 5$; f) $X^2 - 4X - 5$; g) $10X^2 - 43X + 12$; h) $X^2 - 2X - 1$; i) $2X^2 - 2\sqrt{2}X - 3$.

2) Simplificați fracțiile:

a) $\dfrac{X^2 + 10X - 39}{2X^2 - 21X + 45}$; b) $\dfrac{X^2 + X - 12}{2X^2 - X - 15}$; c) $\dfrac{6X^2 - 5X + 1}{6X^2 + X - 1}$; d) $\dfrac{X^2 + X - 90}{8X^2 + 83X + 30}$;

e) $\dfrac{3X^2 - 7X + 2}{2X^2 + 5X - 18}$; f) $\dfrac{X^2 + 7X - 8}{2X^2 - 3X + 1}$; g) $\dfrac{2X^2 - 5X - 3}{6X^2 - X - 2}$.

3*. Demonstrați că pentru orice valoare nenulă a parametrului m, trinomul $P(X) = X^2 + 2X + m^2 + 1$ este ireductibil.

7. ECUAȚII CARE SE REZOLVĂ CU AJUTORUL UNOR ECUAȚII DE GRADUL AL II-LEA

Exemplul 1. Să rezolvăm ecuația:

$$\frac{x^2 - 6x}{x - 5} = \frac{5}{5 - x}.$$

Nu putem înlocui necunoscuta x prin numărul 5. Fie s o soluție a ecuației; înmulțind ambii membri ai egalității $\frac{s^2 - 6s}{s - 5} = \frac{5}{5 - s}$ cu $s - 5$ (care este diferit de 0), obținem $s^2 - 6s = -5$, sau $s^2 - 6s + 5 = 0$. Deci s este soluție a ecuației de gradul al II-lea:

$$x^2 - 6x + 5 = 0.$$

Soluțiile acestei ecuații, calculate cu formulele obișnuite, sînt 1 și 5; dar numai prima aparține mulțimii $\mathbf{R}-\{5\}$. Deci ecuația $\frac{x^2 - 6x}{x - 5} = \frac{5}{5 - x}$ are o singură soluție, anume numărul 1.

Exemplul 2. Să rezolvăm ecuația:

$$\sqrt{x} = 6 - x.$$

Să presupunem că numărul s este soluție a ecuației; atunci $\sqrt{s} = 6 - s$. Pentru a putea extrage rădăcina pătrată, numărul s trebuie să fie evident $\geqslant 0$. Pe de altă parte, $\sqrt{s}$ este un număr $\geqslant 0$; deci $6 - s \geqslant 0$, adică $s \leqslant 6$. Așadar s va trebui să aparțină intervalului $[0; 6]$.

Să ridicăm la pătrat egalitatea $\sqrt{s} = 6 - s$; obținem $s = (6 - s)^2$, sau $s^2 - 13s + 36 = 0$. Așadar numărul s este soluție a ecuației de gradul al II-lea

$$x^2 - 13x + 36 = 0.$$

Această ecuație de gradul al II-lea are ca soluții numerele 4 și 9. Dintre acestea, doar 4 aparține intervalului $[0; 6]$. Putem constata și prin înlocuire directă că 9 nu verifică ecuația $\sqrt{x} = 6 - x$. Deci ecuația $\sqrt{x} = 6 - x$ admite o singură soluție: 4.

Ce legătură există între ecuația $\sqrt{x} = 6 - x$ și ecuația $x = (6 - x)^2$? A doua se obține din prima „ridicînd ambii membri la pătrat". Cele două ecuații **nu sînt echivalente.** Mulțimea soluțiilor primei ecuații este inclusă în mulțimea soluțiilor celei de-a doua, dar nu coincide cu ea.

De ce se întîmplă așa? Evident, dacă $u = v$, atunci $u^2 = v^2$; dar reciproca nu este adevărată. Într-adevăr, dacă $u^2 = v^2$, atunci $(u + v)(u - v) = 0$, de unde concluzia „$u = v$ sau $u = -v$". Deci, pentru ca relația $u^2 = v^2$ să implice $u = v$, este necesar ca u și v să aibă același semn.

Exemplul 3. Fie ecuația

$$\sqrt{x-2}+\sqrt{2-x}=0.$$

Putem înlocui necunoscuta x cu numere s astfel încît $s-2\geqslant 0$ (primul radical) și $2-s\geqslant 0$ (al doilea radical). Deci $s\geqslant 2$ și $s\leqslant 2$ adică $s=2$. Necunoscuta x poate lua valori doar în mulțimea $\{2\}$. Observăm că 2 este soluție a ecuației.

Exemplul 4. Rezolvați ecuația

$$\sqrt{x-2}+\sqrt{2-x}=3.$$

Ca și exemplul 3, necunoscuta x poate lua valori doar în mulțimea $\{2\}$. Înlocuind în ecuație necunoscuta x cu 2, obținem o propoziție falsă, deci ecuația nu are nici o soluție.

Exemplul 5. Să rezolvăm ecuația

$$\sqrt{x+2}+\sqrt{11-x}=5.$$

Putem înlocui necunoscuta x cu numere s astfel încît $s+2\geqslant 0$ și $11-s\geqslant 0$; deci necunoscuta x poate lua valori doar în intervalul $[-2, 11]$.

Fie s un număr din acest interval; atunci numărul $\sqrt{s+2}+\sqrt{11-s}$ este pozitiv (ca sumă a doi radicali); ecuația este deci echivalentă cu:

$$(\sqrt{x+2}+\sqrt{11-x})^2=25,\ x\in[-2;\ 11]$$

adică cu:

$$x+2+2\sqrt{(x+2)(11-x)}+11-x=25,\ x\in[-2;\ 11]$$

sau

$$\sqrt{(x+2)(11-x)}=6,\ x\in[-2;\ 11].$$

Și această ecuație, atît membrul stîng, cît și cel drept sînt pozitivi; deci ecuația este echivalentă cu

$$(x+2)(11-x)=36,\ x\in[-2;\ 11]$$

sau cu:

$$-x^2+9x-14=0,\ x\in[-2\ 11].$$

Ecuația de gradul al II-lea:

$$-x^2+9x-14=0,\ x\in \mathbf{R},$$

are două soluții: 2 și 7. Amîndouă aparțin intervalului $[-2;\ 11]$, deci sînt soluții ale ecuației $\sqrt{x+2}+\sqrt{11-x}=5$.

Exemplul 6. Fie ecuația de gradul al IV-lea:

$$x^4-27x^2+50=0.$$

Prin substituția $y=x^2$ obținem ecuația de gradul al II-lea (în necunoscuta y);

$$y^2-27y+50=0,$$

ale cărei soluții sînt 2 și 25. Deci $x^2=2$ sau $x^2=25$.

Ecuația $x^2 = 2$ are soluțiile $-\sqrt{2}$ și $\sqrt{2}$, iar ecuația $x^2 = 25$ are soluțiile -5 și 5. Deci ecuația de gradul al IV-lea are patru soluții: -5, $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ și 5.

Exemplul 7. Fie ecuația de gradul al IV-lea:

$$4x^4 + 3x^2 - 1 = 0.$$

Substituim (înlocuim) pe x^2 cu y; obținem ecuația de gradul al II-lea:

$$4y^2 + 3y - 1 = 0,$$

ale cărei soluții sînt $y_1 = -1$, $y_2 = \frac{1}{4}$.

Ecuația $x^2 = -1$ nu are soluții; ecuația $x^2 = \frac{1}{4}$ are soluțiile $-\frac{1}{2}$ și $\frac{1}{2}$.

Așadar ecuația de gradul al IV-lea

$$4x^4 + 3x^2 - 1 = 0$$

are două soluții, numerele $-\frac{1}{2}$ și $\frac{1}{2}$ (verificați!)

Metoda aplicată în cele două exemple de mai sus se poate folosi pentru a rezolva orice ecuație de gradul al IV-lea de forma:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

cu $a \neq 0$. O astfel de ecuație se numește *ecuație bipătrată.*

Exemplul 8. Fie ecuația:

$$x^2 + x = \frac{4}{x^2 + x}, \quad x \in R - \{-1, 0\}.$$

Să înlocuim pe $x^2 + x$ cu y; obținem

$$y = \frac{4}{y},$$

$$y^2 = 4,$$

ecuație ce are două soluții: -2 și 2.

Ecuația $x^2 + x = -2$ nu are soluții; ecuația $x^2 + x = 2$ are soluțiile -2 și 1. Așadar ecuația

$$x^2 + x = \frac{4}{x^2 + x}, \quad x \in R - \{-1, 0\}$$

are două soluții: -2 și 1.

EXERCIȚII

1) Rezolvați ecuațiile:

a) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=\frac{5}{6}$; b) $\frac{x}{x^2+1}=\frac{1}{2}$; c) $\frac{x}{x^2-1}=\frac{1}{1-x^2}$; d) $\frac{x+1}{x}=\frac{x}{x-1}-1$;
e) $\frac{x^2-4x+3}{x^2-3x+2}=1$; f) $\frac{x^2-4x+3}{x^2-3x+2}=2$.

2) Rezolvați ecuațiile:

a) $\sqrt{x}=x$; b) $\sqrt{x}=x+1$; c) $\sqrt{x}=-x$; d) $\sqrt{x^2+1}=2$; e) $\sqrt{x^2+4}=2\sqrt{x}$;
f) $\sqrt{x(x-5)}=6$; g) $\sqrt{x^2-5x}=x-3$; h) $\sqrt{2-x}+\sqrt{x-3}=7$; i) $\sqrt{3-x}+\sqrt{2-x}=1$;
j) $\sqrt{3-x}+\sqrt{x-2}=1$; k) $\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}=\frac{1}{3}$; l) $\sqrt{x^2-2x+1}=5$.

3) Rezolvați ecuațiile:

a) $x^4-21x^2+110=0$; b) $x^4+12x^2+20=0$; c) $x^4-12x^2+20=0$;
d) $x^4-x^2+1=0$; e) $x^4-x^2-12=0$.

8. PROBLEME

Multe probleme de geometrie, fizică, tehnică etc., conduc la ecuații de gradul al doilea.

Formule ca $A=\pi r^2$ (aria cercului de rază r), $V=\pi r^2 h$ (volumul cilindrului circular de rază r și înălțime h), $P=I^2R$ (puterea în funcție de intensitate și rezistență) devin ecuații de gradul al II-lea atunci cînd necunoscuta este r respectiv I. Să rezolvăm cîteva probleme care conduc la ecuații de gradul al II-lea.

Problema 1. Fie ABC un triunghi. Determinați pe segmentul BC (de lungime a) un punct M astfel încît ducînd paralela MN la latura AB, aria trapezului ABMN să fie de 4 ori mai mare decît aria triunghiului MNC (vezi figura 1).

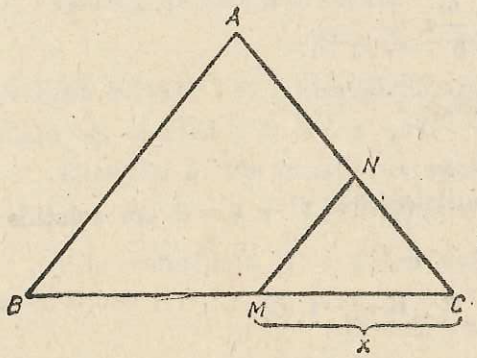


Fig. IV.1

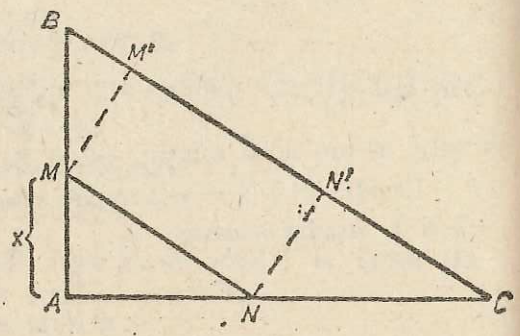


Fig. IV.2

Rezolvare. Să notăm cu x lungimea segmentului CM. Faptul că punctul M aparține segmentului BC impune condiția $0 \leqslant x \leqslant a$.

Din faptul că $S_{ABMN} = 4 \cdot S_{MNC}$ rezultă că $S_{ABC} = S_{ABMN} + S_{MNC} = 5 \cdot S_{MNC}$.

Însă cele două triunghiuri sînt asemenea; deci raportul ariilor lor este pătratul raportului de asemănare:

$$\frac{S_{ABMN}}{S_{MNC}} = \left(\frac{BC}{MC}\right)^2.$$

Obținem astfel ecuația: $\left(\frac{a}{x}\right)^2 = 5$; rezolvînd-o, găsim că are două soluții: $x_1 = -\frac{a}{\sqrt{5}}$ și $x_2 = \frac{a}{\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{5}}{5}$. Prima soluție nu corespunde (nu aparține intervalului $[0; a]$). Poziția punctului M trebuie aleasă deci în așa fel încît $MC = \frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Problema 2. O paralelă la ipotenuza unui triunghi dreptunghic ABC taie laturile AB, AC în punctele M, respectiv N. Construim perpendicularele MM′, NN′ pe BC (vezi figura 2). Determinați poziția punctului M astfel încît aria dreptunghiului MNN′M′ să fie s.

Rezolvare. Fie x lungimea segmentului AM; evident $0 \leqslant x \leqslant c$.

Segmentul MB are lungimea $c - x$. Din asemănarea triunghiurilor BMM′ și ABC obținem $\frac{c-x}{MM'} = \frac{a}{b}$, adică lungimea segmentului MM′ este $\frac{b(c-x)}{a}$.

Din asemănarea triunghiurilor AMN și ABC obținem $\frac{x}{c} = \frac{MN}{a}$, adică lungimea segmentului MN este $\frac{ax}{c}$.

Așadar, aria dreptunghiului MNN′M′ este $\frac{b(c-x)}{a} \cdot \frac{ax}{c} = \frac{b(c-x)x}{c}$.

Impunînd ca această arie să fie s, obținem ecuația:

$$\frac{b(c-x)x}{c} = s,$$

sau:

$$bx^2 - bcx + cs = 0.$$

Aceasta este o ecuație de gradul al II-lea în necunoscuta x; ea poate avea două, una sau nici o soluție. Discriminantul ecuației se scrie $\Delta = (bc)^2 - 4b \cdot cs = (bc - 4s)bc$.

Să analizăm cazurile ce pot apărea. Vom ține seamă de faptul că $b, c > 0$.

Cazul 1. Dacă $s > \frac{bc}{4}$ (adică o jumătate din aria triunghiului ABC!), ecuația nu are soluții.

Cazul 2. Dacă $s = \frac{bc}{4}$, ecuația are o singură soluție: $x = \frac{c}{2}$. Ce poziție are punctul M în acest caz?

Cazul 3. Dacă $0 \leqslant s < \frac{bc}{4}$, ecuația are două soluții:

$$x_1 = \frac{bc - \sqrt{bc(bc - 4s)}}{2b}, \quad x_2 = \frac{bc + \sqrt{bc(bc - 4s)}}{2b}.$$

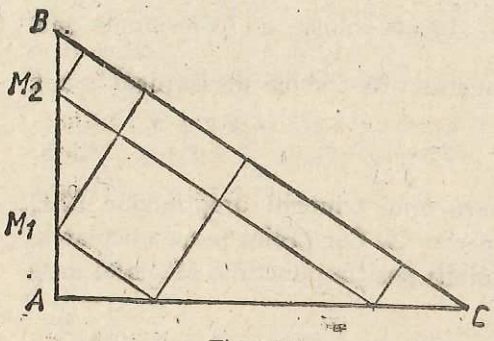


Fig. IV.3

Amîndouă corespund unor soluții ale problemei: punctele M_1 și M_2 (vezi figura 3).

Cazul 4. Dacă $s < 0$, ecuația încă are două soluții x_1 și x_2, dar ele nu corespund vreunei soluții a problemei. Problema nu are soluție (aria nu poate fi negativă!).

Problema 3. Aflați laturile unui triunghi dreptunghic, știind că sînt numere naturale consecutive.

Rezolvare. Fie x, $x + 1$, $x + 2$ lungimile laturilor triunghiului, ipotenuza avînd lungimea $x + 2$. Să aplicăm teorema lui Pitagora: $(x + 2)^2 = x^2 + (x + 1)^2$. Rezolvînd această ecuație, obținem $x_1 = -1$, $x_2 = 3$. Prima soluție a ecuației nu convine (nu este număr natural!). Problema are o singură soluție: triunghiul cu laturile de lungimi 3, 4 și 5.

Problema 4. Demonstrați că nu există două numere întregi consecutive al căror produs să fie 588.

Rezolvare. Să presupunem prin absurd că produsul numerelor întregi consecutive x și $x + 1$ este 588. Deci numărul x este soluție a ecuației:

$$x(x + 1) = 588,$$

sau a ecuației de gradul al II-lea

$$x^2 + x - 588 = 0.$$

Discriminantul acestei ecuații nu este pătratul unui număr întreg (numărul $\sqrt{2353}$ este irațional). Așadar ecuația nu are soluții întregi. Obținem o contradicție.

Problema 5. Două autocamioane pleacă în același moment într-o cursă de 440 km; primul circulă cu o viteză mai mare cu 15 km/h decît viteza celui de-al doilea. Aflați vitezele medii cu care au circulat, știind că al doilea autocamion a sosit la trei ore după primul.

Rezolvare. Să notăm cu x și y vitezele celor două autocamioane. Relația $x=y+15$ este imediată. Durata călătoriei primului este de $\frac{440}{x}=\frac{440}{y+15}$ ore, iar a celui de-al doilea de $\frac{440}{y}$ ore. Obținem ecuația: $\frac{440}{y+15}+3=\frac{440}{y}$.

Rezolvarea acestei ecuații se reduce la rezolvarea ecuației de gradul al II-lea:

$$y^2+15y-2200=0.$$

ale cărei soluții sînt $y_1=-55$, $y_2=40$.

Prima soluție nu convine (viteza nu poate fi negativă!). Vitezele celor două autocamioane au fost de 40 și respectiv 55 km/h.

Problema 6. Un tablou are dimensiunile de 30 cm și 40 cm. Tabloul împreună cu rama are o suprafață de 2184 cm². Aflați lățimea ramei.

Rezolvare. Fie x (cm) lățimea ramei; atunci tabloul înrămat are forma unui dreptunghi cu lungimea de $40+2x$ cm și lățimea de $30+2x$ cm, adică avînd suprafața de $(2x+40)(2x+30)$ cm². Obținem lățimea x a ramei rezolvînd ecuația:

$$(2x+40)(2x+30)=2184.$$

Acceptăm o singură soluție: $x=6$ cm.

Problema 7. Doi conductori electrici legați în serie au rezistența de 15 ohmi, iar legați în paralel au rezistența de 3 ohmi. Aflați rezistența fiecărui conductor.

Rezolvare. Se știe că după legarea în serie a doi rezistori ce au rezistențele x (ohmi), respectiv y (ohmi), ansamblul lor are rezistența $x+y$ (ohmi); după legarea în paralel, ansamblul are rezistența $\frac{xy}{x+y}$, adică $\frac{xy}{15}$ ohmi. Cunoscînd suma și produsul numerelor x și y, le putem afla rezolvînd ecuația de gradul al II-lea

$$R^2-15R+45=0.$$

Cele două rezistențe sînt de aproximativ 4,1 respectiv 10,9 ohmi.

Problema 8. O lege a fizicii afirmă că un corp aruncat pe verticală (în sus), cu viteza inițială v m/s, se va afla după t secunde de la aruncare la înălțimea $h(t)=vt-\frac{g}{2}t^2$; în această formulă g este „accelerația gravitațională" determinată de atracția Pămîntului; valoarea ei este de aproximativ 10 m/s². Aflați după cît timp de la aruncare corpul se va afla la înălțimea de 100 m, dacă a fost aruncat cu viteza inițială de 45 m/s.

Rezolvare. Va trebui să rezolvăm ecuația:

$$100=45t-5t^2$$

în necunoscuta t; obținem soluțiile $t_1=4$ și $t_2=5$. Deci corpul se va afla de două ori la înălțimea de 100 m: prima dată, în urcare, după 4 secunde de la aruncare; a doua oară, în coborîre, după 5 secunde de la aruncare.

PROBLEME

1) Dintr-un punct aflat la 50 m de centrul unui cerc se trasează tangentele la acest cerc. Aflați distanțele pînă la punctele de tangență, știind că raza cercului este de 30 m.

2) Dimensiunile unui dreptunghi de arie 6320 cm² sînt exprimate prin două numere naturale consecutive. Aflați aceste dimensiuni.

3) Orice patrulater are 2 diagonale. Orice pentagon are 5 diagonale. Orice hexagon are 9 diagonale. Puteți stabili cîte diagonale are un poligon cu n laturi? Cîte laturi are un poligon ce are un număr de 170 de diagonale?

4) Aflați numărul real a, știind că punctul $A(a;\ a)$ aparține graficului funcției $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 + x - 12$.

5) Într-un apartament, două camere au aceeași suprafață, anume de 16 m². Una dintre camere are lungimea cu 1 m mai mare, iar lățimea cu 0,8 m mai mică decît cealaltă. Aflați dimensiunile fiecărei camere.

6) Aflați rezistențele a doi rezistori, știind că legați în serie au rezistența totală de 20 ohmi, iar legați în paralel au rezistența de 4,8 ohmi.

7) Dintr-o bucată dreptunghiulară de tablă zincată, avînd suprafața de 8000 cm² s-a tăiat o bucată de 1600 cm². Aflați dimensiunile bucății inițiale, știind că bucata rămasă are forma unui pătrat.

LUCRĂRI PENTRU VERIFICAREA ÎNSUȘIRII UNOR CUNOȘTINȚE DE BAZĂ

LUCRAREA I

1) Rezolvați ecuațiile:

$$x^2 - 14x = 0;\quad 4x^2 - 1 = 0;\quad x^2 - 17x + 42 = 0;\quad 9x^2 + 6x + 1 = 0.$$

2) Găsiți rădăcinile trinoamelor:

$$X^2 + 13X - 30;\quad 2X^2 - 3X + 0{,}5.$$

3) Formați ecuațiile de gradul al II-lea ale căror soluții sînt:

5 și −8; 7 și −7; 3 și 18; 4 și 10.

LUCRAREA A II-A

1) Descompuneți în factori ireductibili trinoamele:

$$X^2 + 17X + 72;\quad 2X^2 - 27X + 13.$$

2) Simplificați fracțiile:

$$\frac{4X^2 - 1}{2X^2 - 3X + 1};\quad \frac{4X^2 - 5X + 1}{5X^2 - 4X + 1}.$$

3) Produsul a două numere întregi consecutive este 210. Aflați numerele.

4) Două numere au suma 13,7 și produsul 46,8. Aflați numerele.

Capitolul V
EXERCIȚII ȘI PROBLEME

1. EXERCIȚII ȘI PROBLEME SUPLIMENTARE

1) Știm că $\frac{1}{t} = -1{,}024$. Care este inversul lui $-t$?

2) Fie numărul $u = \frac{2{,}2}{1{,}5}$. Scrieți pe u^{-1}, u^2, u^{-2} sub formă de fracție.

3) Fie $v = \frac{1{,}6}{3{,}5}$ și $u = \frac{4{,}1}{-2{,}6}$. Scrieți pe $\frac{u}{v}$, apoi pe $\frac{v}{u}$ sub formă de fracție.

4) Aflați numărul întreg m care îndeplinește condiția:

a) $2^{m-1} \leqslant \frac{2}{23} < 2^m$; b) $3^m \leqslant \frac{3}{49} < 3^{m+1}$;

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^m \leqslant \frac{2}{65} < \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}$.

5) Calculați: $\frac{5{,}23 \cdot 10^3}{1{,}5 \cdot 10^{-2}}$; $\sqrt{\frac{4{,}46 \cdot 10^{-1}}{3{,}14 \cdot 10^3}}$; $18{,}5 \cdot 0{,}96$.

Scrieți rezultatele obținute în formă standard.

6) Aflați lungimea a (vezi fig. 1).

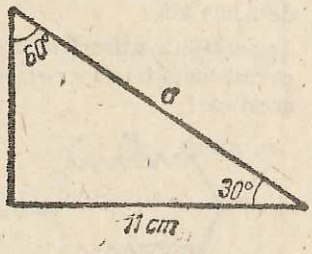


Fig. V.1

7) Triunghiurile dreptunghice din figura 2 sînt asemenea. Aflați a, b și c.

8) Estimați aria hașurată din figura 3, știind că: $1{,}6 < r < 1{,}7$.

9) Razele a două cercuri sînt de 5 cm, respectiv 3 cm. Aflați raza cercului a cărui arie este egală cu suma ariilor celor două cercuri.

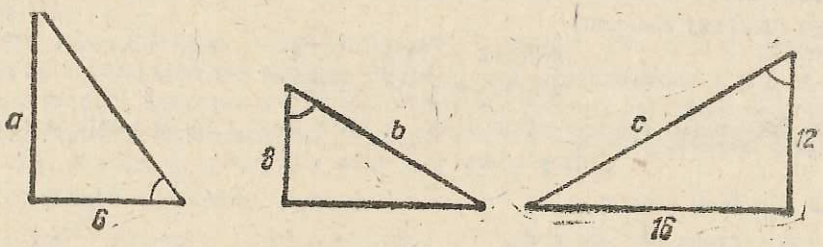


Fig. V.2

10) Comparați numerele $4\sqrt{3}$ și $5\sqrt{2}$. Ce semn are diferența $4\sqrt{3}-5\sqrt{2}$? Ce semn are diferența $14-4\sqrt{11}$?

11) Simplificați:

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}.$$

12) Calculați $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$ și $\sqrt{\sqrt[3]{1296}}$. Calculați apoi $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$ și $\sqrt[3]{\sqrt{1296}}$. Ce observați?

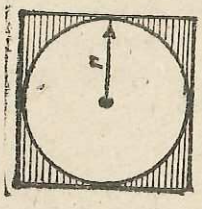


Fig. V.3

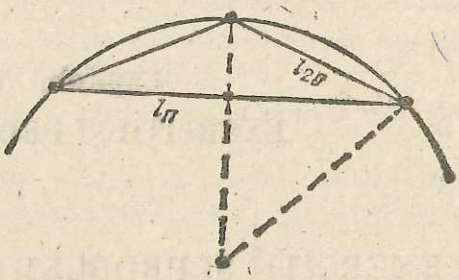


Fig. V.4

13) Știind că pătratul înscris în cercul de rază 1 are laturile de lungime $\sqrt{2}$, aflați lungimea laturii octogonului regulat înscris în cercul de rază 1.

14*) Fie l_n lungimea laturii poligonului regulat cu n laturi înscris în cercul de rază 1. Aflați l_{2n} în funcție de l_n (vezi figura 4).

15) Planeta Jupiter este de 5,203 ori mai depărtată de Soare decît Pămîntul și are diametrul de 11,06 ori mai mare decît diametrul Pămîntului. Aflați distanța de la Soare la Jupiter, apoi volumul planetei Jupiter. Știm că raza medie a Pămîntului este de 6 300 km.

16) Ce valoare trebuie să aibă rezistorul R din circuitul desenat în figura 5 pentru ca rezistența totală a circuitului să fie de 3kΩ? Cu ce ar putea fi înlocuit circuitul în acest caz?

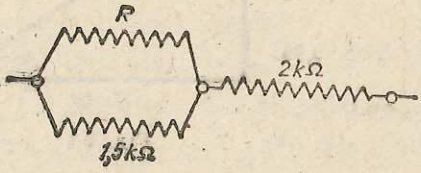


Fig. V.5

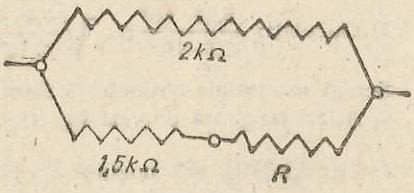


Fig. V.6

17) Ce valoare trebuie să aibă rezistorul R din circuitul din figura 6 pentru ca rezistența totală a circuitului să fie de 1 kΩ?

18) Rezolvați sistemul:

$$\begin{cases} 6751x+3249y=26751 \\ 3249x+6751y=23249. \end{cases}$$

19) Determinați valoarea parametrului m astfel încît 1 să fie soluție a ecuației:

$$(2x+m)(2x-5)-(2x+1)^2=6.$$

20) Rezolvați ecuația:

$$\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2x+2}-\frac{1}{3x+3}-\frac{1}{6x+6}=0.$$

21) Aflați valoarea parametrului a astfel încît ecuația $(4 - x)^3 - ax + \frac{12}{x} = 0$ să admită soluția 2.

22) Împărțind numărul natural a la 113, obținem cîtul c și restul 11. Împărțind numărul a la 108, cîtul este din nou c, dar restul este 41. Aflați numerele a și c.

23) Exercitînd o forță de f N asupra unui resort, el își mărește lungimea cu $l(f)$ cm. Știind că alungirea este direct proporțională cu forța și că la o forță de 60 N corespunde o alungire de 24 mm, reprezentați grafic funcția $l : [0; 80] \to \mathbf{R}$ care descrie dependența alungirii de forță. Ce forță provoacă o alungire a resortului de 14 mm?

24) Două automobile pleacă în același moment unul spre celălalt din localitățile A și B situate la distanța de 440 km. Viteza automobilului care pleacă din A este de 60 km/h, iar a celui care pleacă din B de 50 km/h. Exprimați distanța dintre cele două automobile în funcție de timpul t scurs începînd cu momentul plecării; luați $t \in [0; T]$, unde cu T notăm timpul necesar automobilului plecat din B pentru a ajunge la destinație.

25) Care număr trebuie adunat împreună cu 15, 21 și 18, astfel încît să le ridice media aritmetică cu 1,5?

26) Determinați valorile lui m și n, știind că polinoamele $P(X, Y) = 5X^2Y + mXY^2 - XY^2 + 2XY$ și $Q(X, Y) = -X^2Y + 3XY^2 + 2XY + nX^2Y$ au aceeași formă canonică.

27) Fie $Q(X) = 4X^3 - 8X^2 - 9X + 18$. Calculați $Q(2)$. Descompuneți în factori.

28) Fiind date polinoamele $P(X) = X^3 - 2aX + a^2$ și $Q(X) = X^2 - (3a + 1)X + a^2$, determinați valoarea lui a astfel încît $P(2) = Q(2)$.

29) Arătați că polinomul $P_n(X) = X^n - a^n$ se divide cu $X - a$, oricare ar fi $n \geq 1$, $n \in \mathbf{N}$. Puteți afla cîtul?

30) Arătați că dacă $P(1 + x) = P(1 - x)$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$, atunci polinomul $P(X) = X^2 + aX + 1$ este pătratul unui binom.

31) Determinați a, b, c știind că polinomul:
$P(X) = 2X(aX + b) - 3X(bX + 2c) + c(X^2 + 1) + a(X - 1) + b$ are forma canonică $3X^2 - 7X + 2$.

32*) Determinați a, b, c astfel încît polinomul $P(X) = 12X^3 - 40X^2 + 27X - 5$ să poată fi scris sub forma $P(X) = (3X - 1)(aX^2 + bX + c)$.

33) Descompuneți în factori polinoamele: $P(X) = 2X^2 - 4X + 2$, $Q(X, Y) = XY + 2 - 2X - Y$, $R(X, Y) = -XY^2 + X^2Y^2 + Y - XY$, apoi polinomul $S(X, Y) = P(X) - Q(X, Y) - R(X, Y)$.

34) Descompuneți în factori polinomul $X^3 - 6X^2Y + 12XY^2 - 8Y^3$.

35) Descompuneți în factori $P(X, Y) = X^2 + XY + 2Y - 4$.

36) Descompuneți în factori ireductibili polinomul $P(X) = (X^3 - 5X^2 + 4X)(X^2 + 7X + 12)$.

37*) Fie polinoamele $P(X) = X^3 + 4X^2 + a$, $Q(X) = X^2 - X - 2$. Determinați valoarea lui a astfel încît cel mai mare divizor comun al polinoamelor P și Q să fie un polinom de gradul I. Am putea cere ca acest cel mai mare divizor comun să fie de gradul II?

38) Pentru ce valori ale lui s, trinomul $X^2 + sX + 36$ este produsul binoamelor a) $X - 3$ și $X - 12$; b) $X + 4$ și $X + 9$; c) $X + 5$ și $X - 5$?

39) Simplificați fracțiile raționale:

a) $\frac{5X^2 - 4X - 1}{5X - 5}$; b) $\frac{Y^2 - 2Y - 3}{Y^2 - 9}$; c) $\frac{5Y + 10}{2Y^2 + 13Y + 18}$; d) $\frac{5X^2 - 11X + 2}{X - 2}$.

40) Simplificați:

a) $\dfrac{6XZ - 4YZ - 21X + 14Y}{3X - 2Y}$; b) $\dfrac{X^2Y - XY + Y - X^2 + X - 1}{XY - X}$;

c) $\dfrac{2X^2 + 16X - 18}{X^2 + 5X - 6}$; d) $\dfrac{X^4 + 2X^3 + 5X^2 + 4X - 12}{X^3 + 4X^2 + X - 6}$.

41) Simplificați:

a) $\dfrac{(X^2 - 1)(X^2 - 3) + 1}{(X^2 - 1)(X^2 - 4) + 2}$; b) $\dfrac{(X^2 + X)(X^2 + X + 1) - 2}{(X^2 + X)(X^2 + X + 3) + 2}$.

42) Efectuați:

a) $\dfrac{1}{(X - 2)^2} - \dfrac{1}{(X + 2)^2}$; b) $\dfrac{8X}{X^2 - 16} + \dfrac{4}{X - 4}$; c) $\dfrac{2X - Y}{X^2 + XY} + \dfrac{1}{X - Y} + \dfrac{1}{X}$;

d) $\dfrac{X^2 + Y^2}{XY} - \dfrac{X^2}{XY + Y^2} - \dfrac{Y^2}{XY + X^2}$; e) $\dfrac{X + Y + Z}{YZ} + \dfrac{-X + Y + Z}{XY} + \dfrac{-X + Y - Z}{XZ}$.

43) Efectuați înmulțirile:

a) $\dfrac{2X + 1}{X + 1} \cdot \dfrac{1 - X^2}{1 - 4X^2}$; b) $\dfrac{16X^2 - 25}{(2X + 3)^2} \cdot \dfrac{6X + 9}{4X - 5}$; c) $\dfrac{2(X^2 - Y^2)}{3X} \cdot \dfrac{6X^2}{4(X - Y)}$.

44) Efectuați împărțirile:

a) $\dfrac{X^2 - 9Y^2}{XY} : \dfrac{(X + 3Y)^2}{X^2}$; b) $\dfrac{X^2 - Y^2}{X^2 + 2XY + Y^2} : \dfrac{X - Y}{X + Y}$; c) $\left(\dfrac{1}{X} + \dfrac{1}{Y}\right) : \left(\dfrac{1}{X} - \dfrac{1}{Y}\right)$.

45) Scrieți ca fracție rațională, apoi simplificați:

a) $\dfrac{\dfrac{(2X + 5)(X + 2)}{16X^2 - 9}}{\dfrac{4X + 10}{4 - 3X}}$; b) $\dfrac{\dfrac{X + 1}{X - 1} - 1}{\dfrac{X + 1}{X - 1} + 1}$;

c) $\dfrac{1}{1 + \dfrac{X}{Y + Z}} + \dfrac{1}{1 + \dfrac{Y}{X + Z}} + \dfrac{1}{1 + \dfrac{Z}{X + Y}}$.

46) Dacă $2X^2 + 3X - 5 = (X - a)(2X - b)$, atunci: a) $a = -1$, $b = -1$; b) $a = 1$, $b = 5$; c) $a = 1$, $b = -5$. Cum este corect?

47) Rezolvați ecuațiile:

a) $x^2 - 0{,}4x - 0{,}12 = 0$; b) $7x^2 + 25x - 12 = 0$; c) $(3 - 2x)^2 - 36 = 0$; d) $8x^2 - 6x + 1 = 0$; e) $x^2 - x - 1 = 0$.

48) Fie polinomul $X^3 - 3X^2 + 2X$. Puteți găsi un număr real a astfel încît valorile polinomului în $a - 1$ și a să fie egale?

49) Formați o ecuație de gradul al II-lea ce are ca soluții pe:

a) $\dfrac{3}{4}$ și $\dfrac{1}{4}$; b) $\dfrac{1}{4}$ și $-\dfrac{2}{3}$; c) $\dfrac{2}{11}$ și $-\dfrac{9}{11}$; d) $4 - \sqrt{17}$ și $4 + \sqrt{17}$.

50) Formați o ecuație de gradul al II-lea ce are soluțiile:

a) $a + b$ și $a - b$. b) $a + b$ și $\dfrac{1}{a + b}$; c) $\dfrac{a + b}{a}$ și $\dfrac{a - b}{b}$.

51) Fie ecuația $ax^2 + bx + c = 0$, despre care știm că are soluțiile x_1 și x_2. Formați ecuația de gradul al II-lea ce are ca soluții pe: a) $-x_1$ și $-x_2$; b) $2x_1$ și $2x_2$; c) $x_1 + 2$ și $x_2 + 2$; d) $\frac{1}{x_1}$ și $\frac{1}{x_2}$.

52) În ecuația $x^2 - mx + 36 = 0$, determinați pe m astfel încît $x_2 = x_1$, apoi astfel încît $x_2 = -x_1$.

53) În ecuația $x^2 - 8x + m = 0$, determinați pe m astfel încît:

a) $x_2 = 3x_1$; b) $x_2 = -\frac{1}{x_1}$; c) $3x_1 - 4x_2 = 3$.

54) Arătați că ecuația $\frac{4+x}{1+x} - \frac{1+x}{4+x} = m$ are cel puțin o rădăcină reală, oricare ar fi $m \in \mathbf{R}$.

55) Fie ecuația $x^2 - 10x + m + 3 = 0$. Care este cea mai mare valoare a lui m pentru care ecuația are soluții? Rezolvați-o în acest caz.

56) Știm că graficul funcției $f(x) = ax + b - a^2$ trece prin punctele $A(1;1)$ și $B(3;1)$. Trece oare acest grafic și prin punctul $C(4;5)$?

57) Fie propozițiile:

a) $(2x+3)^2 = 16$; b) $(2x+3)^2 = 2x(2x+6) + 8$; c) $(2x+3)^2 = 2x(2x+6) + 9$; d) $2(x+1)(2x+4) = (2x+3)^2$. Una este întotdeauna adevărată, alta este adevărată doar pentru două valori ale lui x. Identificați-le!

58) Numerele a, b și c sînt diferite între ele. Poate avea ecuația $(x-a)^2 + (x-b)^2 + (x-c)^2 = 0$ soluții reale? Scrieți ecuația de gradul al II-lea echivalentă cu ea. Arătați apoi că $(a+b+c)^2 < 3(a^2+b^2+c^2)$ și că $a^2+b^2+c^2 > ab+bc+ac$.

59) Rezolvați ecuațiile:

a) $(x+1)^2 = 10 + 2x$; b) $(x+5)^2 = 3(x+2)^2 + 13$; c) $(9+x)(7-x) + (9-x)(7+x) = 100$; d) $\frac{4x-3}{x-4} = x + 12$; e) $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{1-x} = \frac{1}{12}$.

60) Rezolvați ecuațiile (în care m este un parametru real):

a) $x^2 - 3mx - 4m^2 = 0$; b) $x^2 + 2mx + m^2 - 1 = 0$; c) $x^2 - 4m^2 = 9 - 12m$; d) $\frac{x-m}{x-1} + \frac{x-1}{x-m} + 2 = 0$;

61) Rezolvați ecuațiile:

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$; b) $25x^4 - 20x^2 + 4 = 0$; c) $x^4 - x^2 - 12 = 0$; d) $6x + \sqrt{24x+40} = 70$; e) $x + \sqrt{x} = 12$; f) $\sqrt{x-4} = x - 4$.

62) Arătați că oricare ar fi m, n, p cu $m \neq n$, ecuația

$$(m-n)x^2 + 2(n-p)x + p - m = 0$$

are soluții. Ce se întîmplă dacă $m = n$?

63) Fie ecuațiile

$$ax^2 + 3x + a^2 + 1 = 0 \text{ și } ax^2 + 2x + a^2 + 2 = 0$$

Arătați că dacă ecuațiile au o soluție comună, atunci această soluție este 1. Rezolvați ecuațiile în acest caz, dacă este posibil.

64) La un turneu de șah, fiecare participant a jucat o partidă cu toți ceilalți. Știind că au avut loc 45 partide, aflați numărul participanților.

65) În arhivă filmele se păstrează în interiorul unor cutii metalice cu diametrul de 30 cm înfășurîndu-se pe role avînd diametrul de 3 cm. Ce lungime poate avea o peliculă de film pentru a încăpea, înfășurată, într-o cutie? Grosimea peliculei este de 0,1 mm.

66) Decupați, dintr-o bucată de tablă triunghiulară, o bucată dreptunghiulară de arie maximă.

2. EXERCIȚII ȘI PROBLEME RECAPITULATIVE

1) Calculați: a) $(-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + \ldots + (-1)^{99} + (-1)^{100}$;

b) $(-1)^1 \cdot (-1)^2 \cdot (-1)^3 \cdot \ldots \cdot (-1)^{99} \cdot (-1)^{100}$.

2) Rezolvați ecuația:

$$(x+1) + (x+2) + (x+3) + \ldots + (x+100) = 15050.$$

3) Arătați că numerele $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ și $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ sînt mai mici decît 2.

4) O tonă de nisip umed ocupă un volum de 0,2 m³, iar o tonă de pietriș ocupă un volum de 240 dm³. Un autocamion este încărcat cu 3 m³ de nisip umed, iar alt autocamion cu pietriș, cîntărind cu 4q mai puțin decît nisipul din primul autocamion. Care autocamion transportă un volum mai mare de materiale de construcție?

5) Demonstrați că pentru orice $n \in \mathbf{N}$, numerele $2^n \cdot 5^{n+1} + 1$ și $2^{n+1} \cdot 5^n + 1$ nu sînt prime.

6) Pentru confecționarea unei cămăși cu mînecă lungă se folosesc 2 m de pînză, iar pentru o cămașă cu mînecă scurtă doar 1,5 m de pînză. Un croitor are o bucată de pînză de 53 m din care vrea să confecționeze cît mai multe cămăși. Cum trebuie folosită bucata de pînză, astfel încît să nu rămînă material nefolosit? Dar dacă este permis să rămînă un rest de material nefolosit?

7) Cîte numere naturale de 4 cifre au cifra miilor egală cu 6 iar cifra zecilor egală cu 3? Cîte dintre acestea sînt divizibile cu 2? Dar cu 9? Dar cu 4?

8) Găsiți toate numerele naturale de 4 cifre care sînt divizibile cu toate numerele naturale mai mari decît 2 și mai mici decît 21.

9) Dați exemple de perechi de numere reale a și b pentru care: a) $|a+b| = |a| + |b|$; b) $|a+b| = |a| - |b|$; c) $|a-b| = |a| - |b|$.

10*) a) Numerele naturale x, y și z sînt numite *pitagoreice* dacă $x^2 + y^2 = z^2$. Găsiți tripletele de numere pitagorice ce au una dintre componente numărul 4.

b) Suma a 7 numere naturale consecutive este 126. Care sînt numerele?

c) Suma a x numere naturale consecutive este $22x + 2$; care sînt numerele?

11) În magazia unei uzine se află oțel de două tipuri: unul conține 5% nichel, iar celălalt, 25% nichel. Din aceste două tipuri de oțel trebuie să se obțină un aliaj care să conțină cel puțin 10% nichel și cel mult 15% nichel. Între ce valori trebuie să fie cuprins raportul cantităților de oțel ce intră în aliaj?

12) Un pieton pleacă din localitatea A la ora 9 și 15 minute și ajunge în localitatea B la ora 10 și 6 minute. La ce oră trebuie să plece din A un biciclist a cărui viteză este de 3 ori mai mare decît viteza pietonului, pentru a ajunge în B înaintea acestuia?

13) Media aritmetică a 80 de numere este 47,5. Două dintre numere sînt 101, respectiv 43. Aflați media aritmetică a celorlalte 78 de numere.

14) O conductă poate umple rezervoarele unui petrolier în 15 ore, o alta în 20 de ore, iar o a treia în 30 de ore. Aflați în cît timp pot fi umplute rezervoarele petrolierului dacă toate conductele sînt deschise simultan.

15) Un grup de tineri face o plimbare cu o barcă cu motor, pe un lac, parcurgînd $2a$ km. A doua zi, cu aceeași barcă, grupul face o plimbare pe un rîu, parcurgînd a km, apoi se întoarce imediat înapoi. Aflați care plimbare a durat mai mult timp.

16) Directorul unei întreprinderi află de existența a două inovații. Una determină o creștere a productivității muncii cu 10%, iar a doua cu 20%. Directorul apreciază că prin aplicarea simultană a celor două inovații productivitatea muncii va crește.
Cu cît va crește productivitatea muncii?

17) Două cercuri exterioare unul altuia sînt situate în interiorul unui al treilea cerc, mai mare. Fiecare dintre aceste cercuri este tangent celorlalte două iar cele trei centre sînt pe o aceeași dreaptă. Aflați aria interioară cercului mare dar exterioară celor două cercuri mici. Se cunosc razele celor două cercuri mici.

18) Găsiți o funcție al cărei grafic să fie segmentul AB, unde $A(2; -5)$ și $B(5; 2)$.

19) Demonstrați că triunghiul ale cărui laturi satisfac relația

$$\frac{c-b}{a}+\frac{a-c}{b}+\frac{b-a}{c}=0 \text{ este isoscel.}$$

20) Calculați: $(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{3}-1)^2$; $(\sqrt{3}+1)^4+(\sqrt{3}-1)^4$; $(\sqrt{3}+1)^8+(\sqrt{3}-1)^8$.

21) Descompuneți în factori polinomul:

$$X^3+Y^3+Z^3+3(X+Y)(X+Z)(Y+Z).$$

22) Efectuați:

$$\frac{(-1)^n}{X+Y-1}+\frac{(-1)^{n+1}}{X-Y+1}, \quad n\in\mathbb{N}.$$

23) Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ descrisă de $f(x)=x^2$. Arătați că oricare ar fi numerele reale a și b, avem:

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}\geqslant f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

24) Știm că $5a^2-13ab+6b^2=0$. Aflați raportul $\frac{a}{b}$.

25*) Demonstrați că dintre toate dreptunghiurile cu același perimetru, pătratul are aria cea mai mare.

26) Un poligon are 4850 de diagonale. Cîte laturi are poligonul?

27) Rezolvați sistemele:

a) $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=0{,}7\\ \frac{3}{x}-\frac{5}{y}=0{,}5\end{cases}$; b) $\begin{cases}\sqrt{x}-2\sqrt{y}=-6\\ 2\sqrt{x}-3\sqrt{y}=-7\end{cases}$; c) $\begin{cases}|x|+3y=-1\\ 2|x|+y=3\end{cases}$.

28*) Pe ecranul unui automat de examinare a cunoștințelor apar 5 întrebări, la care Ionică trebuie să răspundă prin „da" sau „nu". Știm că: a) prima și ultima întrebare au răspunsurile contrare; b) a doua și a patra au același răspuns; c) sau prima, sau a doua întrebare are răspunsul „da"; d) dacă răspunsul la a patra este „da", atunci răspunsul la a cincea întrebare este „nu"; e) la a treia întrebare răspunsul este „da". Ce răspunsuri trebuie să dea Ionică pentru a obține nota 10?

3. PROBLEME DEOSEBITE ŞI CURIOZITĂŢI

1) Priviţi:

$$\frac{1}{2} + \frac{38}{76} + 49 + 50 = 100$$

$$74 + 25 + \frac{3}{6} + \frac{9}{18} = 100.$$

Puteţi scrie numărul 100 folosind, la fel ca mai sus, doar o singură dată fiecare cifră, astfel încît în scriere să apară şi radicali?

2) Fie numerele naturale impare 1, 3, 5 şi 7. Calculaţi suma lor. Calculaţi suma numerelor 1, 3, 5, 7, 9, 11, apoi suma numerelor 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15. Ce observaţi? Puteţi spune care este suma numerelor 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, fără a efectua adunările?

3) Priviţi: $1^2 = 1$;

$$3^2 = 2 + 3 + 4;$$

$$5^2 = 3 + 4 + 5 + 6 + 7.$$

Puteţi continua? Completaţi $19^2 = \ldots$ Care este cel mai mic termen al sumei din membrul drept? Dar cel mai mare?

4) Arătaţi că:

$$-\sqrt[3]{10 - \sqrt{108}} = \sqrt{3} - 1; \quad \sqrt[3]{7 - \sqrt{50}} = 1 - \sqrt{2}.$$

5) Este adevărat că $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ aproximează pe π cu eroare de cel mult 0,005? Dar cu eroare de cel mult 0,001?

6) Fie egalitatea $a = b$. Deci $a^2 = ab$, de unde

$$a^2 - b^2 = ab - b^2.$$

Descompunem cei doi membri în factori:

$$(a - b)(a + b) = (a - b)b,$$

de unde $a + b = b$, sau (ţinînd seamă că $a = b$) $2b = b$. Aşadar $2 = 1$. Unde este greşeala?

7) Verificaţi că $4 - 2 \cdot 2 \cdot \frac{5}{2} = 9 - 2 \cdot 3 \cdot \frac{5}{2}$. Completăm în ambii membri cîte un pătrat perfect:

$$2^2 - 2 \cdot 2 \cdot \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2.$$

Aşadar:

$$\left(2 - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(3 - \frac{5}{2}\right)^2,$$

de unde $2 - \frac{5}{2} = 3 - \frac{5}{2}$, adică $-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Unde este greşeala?

8) Care număr este mai mare:

a) $2^{2^{2^2}}$, $2^{2^{22}}$, $2^{2^{2^2}}$, $2^{2^{22}}$, 22^{2^2}, 22^{22}, 222^2 sau 2222;

b) 9^{9^9}, 9^{99}, 99^9 sau 999?

9) Priviți:

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2 + (ay - bx)^2;$$

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (ax + by + cz)^2 + (ay - bx)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2.$$

Puteți scrie produsul $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2 + z^2 + t^2)$ ca sumă de pătrate? Dar de patru pătrate?

10) Rezolvați sistemele de ecuații:

$$\begin{cases} x^2 - 3x = 0, \\ x^2 - 2x - 2 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - 2x = 0, \\ x^2 - x - 2 = 0. \end{cases}$$

Rezolvați ecuația $\sqrt{x^2 - 2x} + \sqrt{x^2 - x - 2} = 0$.

11) Arătați că dacă $x + y = 2$, atunci $x^2 + y^2 > 2$ și $x^3 + y^3 > 2$.

12) Ce formă are patrulaterul ale cărui vîrfuri sînt punctele de intersecție ale dreptelor:

$$x - y - 2 = 0,\ x - y + 2 = 0,\ x + y - 2 = 0 \text{ și } x + y + 2 = 0?$$

13) Descompuneți în factori:

$$2a^2 - ab + 4ac - b^2 - bc + 2c^2.$$

14) (După „Aritmetica" lui Diofant — sec III.) Aflați două numere, știind că suma lor și suma pătratelor lor sînt legate între ele. Să presupunem că suma lor este a zecea parte din suma pătratelor lor. Fie x numărul mai mic, iar cel mai mare fie $2x$; atunci suma lor este $3x$, iar suma pătratelor lor este $5x^2$. Deci $3x$ trebuie să fie a 10-a parte din $5x^2$. Care sînt numerele în acest caz?

15) (Problemă veche chineză — înainte de sec. III.) La mijlocul fiecărei laturi a unui oraș de formă pătrată există cîte o poartă. La 20 bu (unitate de lungime) spre nord de poarta nordică se află un stîlp. Dacă de la poarta sudică ne deplasăm cu 14 bu spre sud, apoi spre apus cu 1775 bu, stîlpul devine vizibil. Ce lungime are zidul orașului?

16) (După Bhaskara — matematician indian, sec. XII.) Niște maimuțe se distrează; din tot cîrdul, o optime la pătrat se cațără prin copaci, iar 12 strigă toate-odată în vîrful colinei. Cîte maimuțe erau în cîrd?

17) (După „Liber Abaci" a lui Leonardo Fibonacci, sec. XIII.) Un țăran a cumpărat 30 de păsări cu 30 de monede; pentru 5 potîrnichi a plătit 3 monede, pentru un porumbel 2 monede, iar pentru fiecare pereche de vrăbii cîte o monedă. Cîte păsări de fiecare fel a cumpărat?

18) (După „Culegerea de probleme" a lui Chuquet — anul 1484.) Un zidar s-a înțeles cu un țăran să-i ridice casa în 30 de zile; în fiecare zi în care lucrează să cîștige 5 scuzi (monedă veche franceză) iar în fiecare zi în care nu lucrează să plătească țăranului 6 scuzi. La capătul celor 30 de zile casa e terminată; zidarul a muncit și s-a odihnit în așa fel încît a cîștigat 18 scuzi. Aflați cîte zile a muncit și cîte s-a odihnit.

19) Iepurele alb spune că pisica minte. Pisica spune că Alice minte. Alice spune că iepurele alb și pisica mint. Cine minte și cine spune adevărul? (După Lewis Carroll.)

20) Două rachete se îndreaptă una spre cealaltă prima cu 9000 km/h, a doua cu 21000 km/h. Ele decolează din două puncte situate la o distanță de 1317 km unul de altul. Care este distanța dintre rachete, cu un minut înainte de ciocnire? (După Martin Gardner.)

4. OLIMPIADE ȘI CONCURSURI

Textele problemelor au fost parțial modificate.

1) Se consideră ecuațiile $x^2 - 4x + 3 = 0$ și $x^2 - (a^2 + 1)x + 3a = 0$, unde a este un număr real. Pentru ce valori ale lui a ecuațiile au o soluție comună?

(Olimpiada 1973)

2) Se dă polinomul $P(X) = aX^2 + bX + c$, în care coeficienții a, b și c sînt numere reale.

a) Determinați coeficienții astfel încît $P(1) = P(2) = 0$ și $P(-1) = 18$.

b) Pentru $a = 3$, $b = -9$, $c = 6$, descompuneți polinomul în factori; determinați apoi valorile reale ale lui m pentru care fracția $F(X) = \dfrac{P(X)}{X^2 - 2X + m}$ este ireductibilă.

(Olimpiada 1974, jud. Iași)

3) Arătați că polinomul $P(X) = X^3 + aX^2 - a^2X + 2a^3$ se divide cu $X^2 - aX + a^2$ apoi rezolvați ecuația $P(x) = 0$.

(Olimpiada 1974, mun. București)

4) Arătați că polinomul $X^3 + aX^2 + bX + c$ se divide cu $X^2 + aX + b$ numai dacă $c = 0$.

(Olimpiada 1974, mun. București)

5) Fie polinomul $P(X) = 4X^4 + 4X^3 + X^2 + 1$.

a) Aflați cîtul și restul împărțirii lui $P(X)$ la $2X^2 + X$.

b) Care dintre următoarele afirmații sînt adevărate, oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$: $P(x) < 0$; $P(x) = 0$; $P(x) > 0$?

c) Pentru ce valori ale lui $x \in \mathbf{R}$ valoarea $P(x)$ este cea mai mică posibilă? Care este această valoare?

(Olimpiada 1975, mun. București)

6) Fie ecuația $\dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{2x}{x^2-4}$. Care dintre numerele $\sin 2°$; $\sqrt[3]{5}$; $1 + \sqrt{2}$; $4 \sin 30°$ sînt soluții ale ecuației?

(Olimpiada 1975, mun. București)

7) Dacă x și y sînt două numere pozitive, arătați că $xy \leqslant \dfrac{(x+y)^2}{4}$. Arătați că dacă $x + y = k$, atunci cea mai mare valoare a produsului xy este $\dfrac{k^2}{4}$. În aceleași condiții, arătați că cea mai mică valoarea a lui $x^2 + y^2$ este $\dfrac{k^2}{2}$.

(Olimpiada 1975)

8) Arătați că dacă $x + y = s$ și $xy = p$, atunci $x^2 + y^2 = s^2 - 2p$, $x^3 + y^3 = (s^2 - 3p)s$ și $x^4 + y^4 = s^4 - 4s^2p + 2p^2$.

(Olimpiada 1975, Bistrița-Năsăud)

9) Se dă fracția

$$F(X) = \frac{4X^3 - 32}{X^3 + (X+2)^3}.$$

a) Arătați că $F(X) = 2 - \dfrac{6}{X+1}$. b) Pentru ce numere reale x, fracția este definită în x?

c) Pentru ce valori ale lui x, numărul $F(x)$ este întreg? d) Pentru ce valori ale lui x avem $F(x) = 2$?

(Olimpiada 1975, jud. Bistrița-Năsăud)

10) Fie polinomul $P(X) = X^2 - 2X - 8$.

a) Aflați restul împărțirii polinomului prin $X + 2$ și $X - 4$ fără a efectua împărțirile.

b) Simplificați $\dfrac{X^3 + 8}{X^2 - 2X - 8}$.

(Olimpiada 1976, jud. Constanța)

11) Dacă polinomul $X^4 + 4aX^3 + 6bX^2 + 4cX + d$ este divizibil cu $X^3 + 3aX^2 + 3bX + c$, arătați că primul este un pătrat, iar al doilea cubul unui binom.

(Olimpiada 1976, mun. București)

12) Pentru ce valori ale lui a, b, c polinomul $P(X) = 12X^3 - 40X^2 + 27X - 5$ poate fi scris descompus $P(X) = (3X - 1)(aX^2 + bX + c)$? Aflați rădăcinile polinomului.

(Concurs treaptă 1976, mun. București)

13) Descompuneți în factori $(X + Y + Z)^3 - X^3 - Y^3 - Z^3$.

(Concurs treaptă 1976, jud. Constanța)

14) Fe $P(X) = aX^n + bX^m + cX^p$, $Q(X) = bX^n + cX^m + aX^p$ și $R(X) = cX^n + aX^m + bX^p$, unde $a + b + c \neq 0$ și $abc \neq 0$.

a) Arătați că polinoamele $P(X)$, $Q(X)$ și $R(X)$ dau același rest la împărțirea cu $X - 1$.

b) Arătați că polinomul $P(X) + Q(X) - 2R(X)$ se divide cu $X - 1$.

c) Arătați că polinomul $P(X) + Q(X) + R(X)$ nu se divide cu $X + 1$.

(Olimpiada 1977, mun. București)

15) Rezolvați ecuațiile: a) $-9x^2 + 16x - \dfrac{13}{3} = 0$; b) $\dfrac{a-b}{x+1} - \dfrac{a+b}{x-1} = 0$ $(x \neq \pm 1, b \neq 0)$.

(Concurs treaptă 1977, jud. Dolj)

16) Rezolvați ecuația:

$$\frac{x^2}{x^2 - 1} + \frac{6}{x + 1} + \frac{4}{x - 1} = 2.$$

(Concurs treaptă 1977, jud. Arad)

17) a) Arătați că polinomul $P(X) = X^4 - X^3 - 6X^2 + 4X + 8$ este divizibil cu polinoamele $Q(X) = X - 2$ și $R(X) = X + 2$.

b) Folosind eventual rezultatul de la a), simplificați fracția:

$$F(X) = \frac{X^4 - X^3 - 6X^2 + 4X + 8}{X^4 - 16}$$

(Concurs treaptă 1977, jud. Neamț)

18) Reprezentați grafic funcția $f(x) = x^2$ definită pe $[-2; 4]$ apoi aflați coordonatele punctelor de pe grafic care au abscisa egală cu ordonata.

(Concurs treaptă 1977, jud. Vaslui)

19) Simplificați fracția

$$F(X) = \frac{8X^2 + 2X - 3}{4X^2 - X - 3}.$$

(Concurs treaptă 1976, jud. Brăila)

20) Fie ecuația $x^2 - mx + m - 1 = 0$. Determinați valoarea lui m astfel încît ecuația să admită o singură soluție.

(Concurs treaptă 1976, jud. Brăila)

21) Reprezentați grafic funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, descrisă de:

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 \text{ pentru } x \in (-\infty; 1). \\ -2x + 1 \text{ pentru } x \in [1; +\infty). \end{cases}$$

(Concurs treaptă 1979, mun. București)

22) Rezolvați sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} \dfrac{2x - 3y}{5} - \dfrac{2y - 3x}{11} = \dfrac{112}{55}, \\ (x - 5)^2 - (3 - y)^2 = (x - y)(x + y) - 48. \end{cases}$$

(Concurs treaptă 1979, mun. București)

23) Rezolvați sistemul de inecuații:

$$\begin{cases} 2x < 4x - 6. \\ 4x + 3 < 3x + 1. \end{cases}$$

(Concurs treaptă 1979, jud. Prahova)

24) Se dă ecuația:

$$\frac{x + a + 1}{x + a} = \frac{x + a - 1}{x - a} - \frac{a^2 + 1}{x^2 - a^2}.$$

a) Pentru ce valoare a lui a ecuația are soluția 4?

b) Pentru ce valoare a lui x ecuația în a are soluția 5?

(Concurs treaptă 1979, jud. Constanța)

25) Fie f și g două funcții liniare.

a) Determinați funcțiile, știind că:

$$2f(x + 1) + g(x - 1) = 2x + 14$$

și $f(x + 1) - 2g(x - 1) = 6x - 18$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) Reprezentați grafic funcțiile $f(x) = 2x$ și $g(x) = -2x + 8$, apoi aflați coordonatele punctului de intersecție a celor două grafice.

(Concurs treaptă 1979, jud. Arad)

26) Fie polinoamele $P(X) = X^2 - 3X + 2$ și $Q(X) = X^2 + 3X + 2$. Arătați că $P(Q(X))$ se divide cu $X^2 + 3X + 1$.

(Olimpiada 1977, jud. Dolj)

27) Se dă polinomul $P(X) = X^4 + mX^3 - 7X^2 + nX + p$. Determinați m, n, p astfel încît $P(X)$ să se dividă cu $X - 1$, $X - 2$ și $X - 3$, apoi rezolvați ecuația $P(x) = 0$.

(Olimpiada 1979, jud. Timiș)

28) Un triunghi isoscel are perimetrul de 160 m, iar baza este cu 20 m mai mică decît oricare dintre laturile egale. Aflați lungimile laturilor.

(Concurs treaptă 1980, jud. Dolj)

29) Determinați parametrul m astfel încît polinomul $2X^4 - mX^3 + X^2 - 7$ să dea restul 4 prin împărțire la $X + 2$.

(Concurs treaptă 1980, jud. Dolj)

30) Numerele reale x, y, a și b verifică relațiile: $x + \dfrac{1}{x} = y + \dfrac{1}{y} = a$, $xy = b$. Ce relație există între a și b?

(Olimpiada 1979, mun. București)

Capitolul VI

CUNOȘTINȚE PREGĂTITOARE PENTRU FOLOSIREA TEHNICII DE CALCUL

I. DIN NOU DESPRE INTRODUCEREA DATELOR

Pentru a folosi calculatorul trebuie să întocmim programe; aceste programe sînt formate din instrucțiuni. Reamintim instrucțiunile învățate în clasa a VII-a: LET, READ/DATA, IF... THEN..., GOTO, PRINT, STOP. Dintre acestea, instrucțiunea READ servește în scopul introducerii datelor în calculator. Dar, în același scop există și o altă instrucțiune, ce poate fi mult mai utilă.

Fie, de exemplu, următoarele instrucțiuni (ce formează, de fapt, o parte dintr-un program):

```
20 LET P = N * N
30 PRINT N; P
```

Ne dăm seama ușor că prima instrucțiune (cea cu eticheta 20) are ca efect obținerea pătratului P al numărului N. Dar care este acest număr N? Dacă am completa cu instrucțiunile

```
10 READ N
40 DATA 153
```

atunci numărul N ar fi luat egal cu 153. Să renunțăm la aceste două instrucțiuni, completînd în schimb cu instrucțiunea*,

```
10 INPUT N
```

Ce se va întîmpla acum, dacă vom executa programul obținut? În primul rînd se va executa această ultimă instrucțiune (căci ea are eticheta cea mai mică); ca rezultat, pe ecran va apare afișat un semn de întrebare

*) Cuvîntul *input* are, în limba engleză, sensul de „intrare" sau „admitere"; am putea citi, în loc de INPUT N, „introdu numărul N". Spre deosebire de READ, instrucțiunea INPUT întrerupe execuția programului, pînă la introducerea (de la tastatură) a valorilor cerute.

(?). Aceasta înseamnă că mașina „așteaptă" să introducem, de la tastatură, un număr. Să tastăm cifrele 1, 5, apoi 3; pe ecran apar scrise, succesiv, numerele 1, 15, apoi 153. Apăsînd acum tasta CR*, vom indica mașinii că acesta este numărul dorit; în acest moment calculatorul va „ști" că numărul N este 153 și va trece la executarea următoarelor două instrucțiuni. După executarea celei cu eticheta 20 va determina că P are valoarea 23409, apoi după executarea ultimei instrucțiuni (cea cu eticheta 30) va afișa pe ecran valorile 153 și 23409.

Să analizăm acum programul următor:

```
10 LET C = 0
20 LET C = C + 1
30 IF C = 10 THEN GOTO 80
40 INPUT N
50 LET P = N * N
60 PRINT N; P
70 GOTO 20
80 STOP
```

Observăm că în program se folosește, ca un „contor", variabila C; aceasta va lua succesiv valorile 0, 1, 2, ..., 9, 10. Pentru cele nouă valori între 1 și 9 (inclusiv), calculatorul așteaptă (afișînd ? pe ecran) introducerea valorii lui N, apoi calculează pătratul, apoi tipărește (afișează) valorile lui N și P. Insistăm: aceasta se întîmplă de nouă ori!

Instrucțiunea INPUT permite, ca facilitate suplimentară (la fel ca și instrucțiunea PRINT) afișarea pe ecran, înainte de semnul ?, a unui mesaj explicativ (prin care să ne putem da seama ce număr urmează să introducem).

Analizînd programul

```
10 PRINT "CALCULAM PATRATUL UNUI NUMAR"
20 INPUT "INTRODUCETI NUMARUL"; N
30 LET P = N * N
40 PRINT "NUMARUL"; N; "PATRATUL"; P
```

constatăm că, lăsînd la o parte mesajele ce apar pe ecran, obținem același efect ca și folosind primul program (cel de la începutul lecției).

Să întocmim un program pentru rezolvarea ecuației

$$ax + b = 0$$

---

*) CR este o prescurtare de la *carriage return*, în traducere „întoarce carul (mașinii de scris) la capătul rîndului"; are sensul de încheiere a rîndului curent și începere a unui rînd nou.

folosind instrucțiunea INPUT și mesaje explicative:

```
1000 PRINT "REZOLVA ECUATIA A * X + B = 0"
1010 INPUT "INTRODUCETI COEFICIENTUL LUI X"; A
1020 INPUT "INTRODUCETI TERMENUL LIBER"; B
1030 IF A = 0 THEN GOTO 1070
1040 LET X = —B/A
1050 PRINT "SOLUTIA ESTE"; X
1060 STOP
1070 IF B = 0 THEN 1100
1080 PRINT "ECUATIA NU ARE SOLUTII"
1090 STOP
1100 PRINT "ORICE NUMAR ESTE SOLUTIE"
1110 STOP
```

EXERCIȚII

1) Sesizați greșelile din următoarele instrucțiuni:

a) 10 LET X = 5,5 b) 20 PRINT X = 2
c) 30 IF A + B THEN GOTO 10 c) 40 LET 1 = A

2) Ce valori va avea variabila C în urma executării următoarelor programe?

a)
```
10 LET A = 5
20 LET B = 6
30 LET A = B
40 LET C = B * B
50 PRINT C
```

b)
```
10 LET A = 5
20 LET B = 6
30 LET B = A
40 LET C = B * B
50 PRINT C
```

3) Completați programul următor

```
10 INPUT A
20 INPUT B
50 LET B = C
60 PRINT A; B
```

în așa fel încît să se afișeze pe ecran numerele introduse, dar în ordine inversă.

4) Fiecare dintre programele următoare

a)
```
10 INPUT N
20 LET A = N/10
30 LET C = A — 10 * N
40 PRINT C
```

b)
```
10 INPUT N
20 LET M = N
30 IF M > 0 THEN GOTO 50
40 LET M = —M
50 PRINT M
```

are cîte un scop precis. Determinați, după cîteva încercări, care sînt acestea.

2. FACILITĂȚI DE AFIȘARE A REZULTATELOR

Să privim din cînd în cînd, în timp ce lucrăm, ecranul monitorului. Constatăm că semnele ce se afișează pe ecran sînt aliniate atît pe orizontală, cît și pe verticală. Este ca și cum ecranul ar fi „împărțit" în căsuțe dreptunghiulare, iar în fiecare dintre aceste căsuțe se poate afișa cîte un semn (literă, sau cifră, sau alt semn).

De fapt așa și este. La calculatorul (HC-85) ecranul este organizat în 704 căsuțe, aranjate în 22 de linii de cîte 32 de căsuțe fiecare (sau în 32 de coloane de cîte 22 de căsuțe fiecare — vezi figura VI.1).

(Numărătoarea liniilor, ca și a coloanelor, începe cu 0, anume din colțul din stînga sus.)

Dacă dorim, putem face să apară afișat pe ecran, exact în poziția dorită, rezultatul unui calcul. În acest scop putem folosi instrucțiunea PRINT AT*).

De exemplu, instrucțiunile

```
10 LET X = 7
20 PRINT AT 4, 10; X
```

vor avea ca efect afișarea în căsuța aflată pe linia 4 și coloana 10 a numărului 7, care este valoarea variabilei X. Iar instrucțiunea

```
30 PRINT AT 5, 13; 157
```

are ca efect afișarea, începînd cu căsuța aflată pe linia 5 și coloana 13, numărului 157 — vezi figura VI.1.

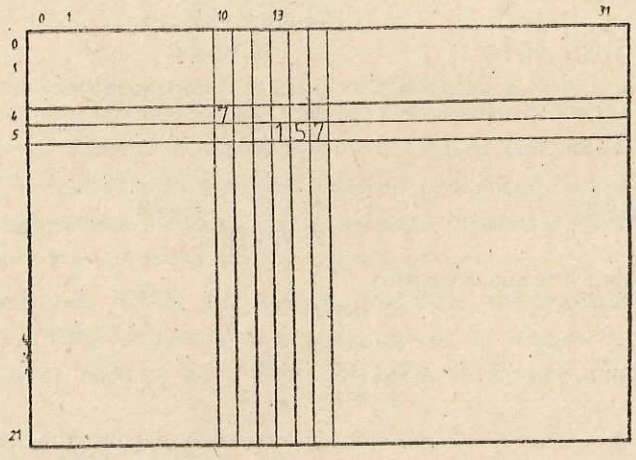


Fig. VI.1

Acest mod de folosire a ecranului este cunoscut sub numele de **modul text.** Dacă privim mai îndeaproape semnele afișate pe ecran, vom constata că ele sînt formate din „puncte" mici negre. Astfel, cifra 7 și litera N arată că în figura VI-2.

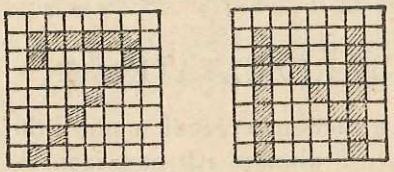


Fig. VI.2

Există și un **mod grafic** de folosire a ecranului, în care putem „înnegri" orice „punct" de pe ecran. În acest mod de lucru ecranul este organizat ca o rețea de 176 de linii orizontale, pe fiecare aflîndu-se 256 de „puncte".

*) Cuvintele englezești *print at* ar putea fi interpretate astfel: „tipărește (afișează) la locul".

Instrucțiunea*)

30 PLOT 168, 89

are ca efect înnegrirea „punctului" ce are coordonatele (168, 89), vezi figura VI-3.

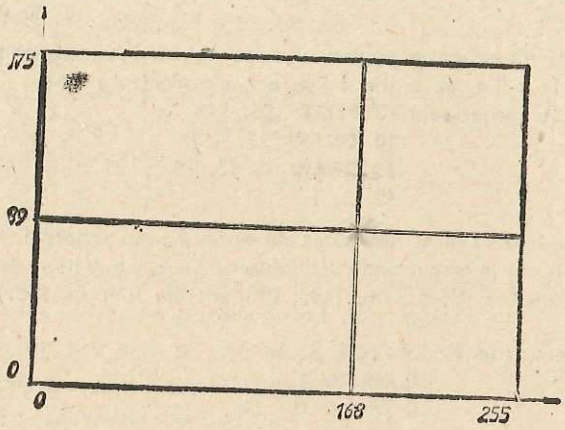


Fig. VI.3

Instrucțiunea**)

31 DRAW 10,20

are ca efect desenarea pe ecran a unui „segment" ce pleacă din punctul (168, 89) în care ne aflăm și ajunge în punctul (168 + 10, 89 + 20), adică în (178, 109).

Instrucțiunea

40 CIRCLE 168,89,30

are ca efect desenarea pe ecran a unui „cerc" cu centrul în (168, 89) și avînd raza de 30 de „puncte".

Secvența de instrucțiuni

```
10 PLOT 121,43
20 DRAW 102,15
30 DRAW — 40,28
40 DRAW — 62, — 43
```

are ca efect desenarea „triunghiului" ce are vîrfurile în punctele de coordonate (121, 43), (223, 58) și (183, 86).

---

*) În limba engleză, verbul *to plot* înseamnă „a reprezenta grafic".

**) În limba engleză, verbul *to draw* înseamnă și „a trasa o linie", iar *circle* înseamnă cerc.

EXERCIȚII

1) Ce va apare pe ecranul monitorului, la intersecția liniei 8 cu coloana 12, în urma executării următoarelor instrucțiuni?

a)
```
10 LET X = 8
20 PRINT AT 8, 12; X
```

b)
```
10 LET A = 21
20 PRINT AT 8, 11; A
```

c)
```
10 LET X = 31
20 LET Y = X * X
30 PRINT AT 8, 11; Y
```

2) Întocmiți un program pentru afișarea valorilor variabilelor A, B respectiv C, începînd cu coloana a 5-a, pe liniile a 3-a, a 8-a respectiv a 12-a.

3) Completați programul
```
10 PLOT 105, 118
20 DRAW 22, -31
30 DRAW -47, 16
40 ...
```
în așa fel încît să aibă ca efect desenarea pe ecran a unui triunghi.

4) Întocmiți un program pentru desenarea pe ecran a unui dreptunghi ce are trei dintre vîrfuri în punctele (100, 100), (180, 100) și (180, 160). Ce coordonate are al patrulea vîrf?

5) Programul următor
```
10 PLOT X, Y
20 DRAW 25, 0
30 DRAW 0,-28
40 DRAW -25,0
50 DRAW 0,28
```
are ca efect desenarea unui dreptunghi.

a) Ce dimensiuni are dreptunghiul?

b) Ce valori pot lua variabilele X și Y?

3. SALVAREA (PĂSTRAREA) PROGRAMELOR

Atunci cînd lucrăm cu calculatorul trebuie să ținem seamă că „memoria" sa reține datele și programele doar atît timp cît este alimentat cu curent electric. De regulă alcătuirea unui program este o activitate de durată și nu este deloc economic să introducem instrucțiunile, toate odată, de la tastatură.

De exemplu, să întocmim un program pentru rezolvarea unui sistem de două ecuații cu două necunoscute:

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f. \end{cases}$$

În acest program, va trebui mai întîi să introducem coeficienții și termenii liberi, ceea ce vom face folosind instrucțiuni INPUT. Apoi vom calcula, dacă este posibil, soluția sistemului și o vom afișa. (Știm că sistemul are soluție unică dacă și numai dacă $ad - bc = 0$.)

```
1000 PRINT "PENTRU PRIMA ECUATIE"
1010 INPUT "INTRODUCETI COEFICIENTUL LUI X"; A
1020 INPUT "INTRODUCETI COEFICIENTUL LUI Y"; B
1030 INPUT "INTRODUCETI TERMENUL LIBER"; E
```

```
1040 PRINT "PENTRU A DOUA ECUATIE"
1050 INPUT "INTRODUCETI COEFICIENTUL LUI X"; C
1060 INPUT "INTRODUCETI COEFICIENTUL LUI Y"; D
1070 INPUT "INTRODUCETI TERMENUL LIBER"; F
1100 LET H = A * D — B * C
1110 IF H< >O THEN GOTO 1140
1120 PRINT "CAZ DE EXCEPTIE"
1130 STOP
1140 LET I = E * D — B * F
1150 LET J = A * F — E * C
1160 LET X = I/H
1170 LET Y = J/H
1180 PRINT "SOLUTIA ESTE"; X; Y
```

Introducerea acestui program, de la tastatură, în calculator durează destul de mult timp (chiar presupunînd că, apăsînd pe taste, nu am greşit deloc). Dacă acum am scoate din priză calculatorul, sau doar l-am stinge, toată munca depusă s-ar pierde! La redeschiderea calculatorului ar trebui să reluăm toate apăsările pe taste!

Este destul de limpede că trebuie să acţionăm în alt mod. Să ne amintim că, pe lîngă memoria *internă*, calculatorul (HC-85) dispune şi de o memorie *externă*, în cazul nostru de o bandă magnetică (casetă) aflată în casetofon. Să folosim această bandă, pentru a ne salva de la distrugere programul. Aceasta se face folosind comanda SAVE*) comandă ce trebuie însoţită de numele programului (în cazul nostru, să-l numim REZSIS — de la „*rez*olvă *sis*teme"). Deci,

SAVE "REZSIS"

ne asigură copierea pe banda magnetică a programului nostru.

Pe viitor vom putea refolosi, ori de cîte ori dorim, acest program, încărcîndu-l de pe casetă, ceea ce putem face folosind comanda LOAD**). Deci,

LOAD "REZSIS"

după care programul va putea fi executat (cu comanda RUN), sau doar afişat pe ecran (cu comanda LIST).

Dat fiind că am învăţat şi cîteva instrucţiuni „grafice" (anume PLOT, DRAW, CIRCLE), am dori să ne completăm programul nostru cu o parte grafică, prin care să trasăm pe ecran dreptele corespunzătoare celor două ecuaţii, în acest mod soluţia sistemului apărînd ca punct de intersecţie al celor două drepte. Instrucţiunile corespunzătoare sînt destul de complicate, avînd în vedere că ecranul este destul de „limitat" (pot fi reprezentate doar

*) În limba engleză, verbul *to save* înseamnă şi „a salva" (aici, „de la distrugere", de la ştergerea programului prin deconectarea calculatorului de la sursă).

**) În limba engleză, verbul *to load* înseamnă "a încărca".

„puncte avînd coordonatele întregi, cu abscisa între 0 și 255, iar ordonata între 0 și 175). De aceea vom prezenta o formă (mult) simplificată:

```
1200 LET S = E/B   (presupunem că B ≠ C)
1210 PLOT 0,S
1220 LET T = — A * 255/B
1230 DRAW 255, T
1240 LET S = F/D
1250 PLOT 0, S
1260 LET T = — C * 255/B
1270 DRAW 255, T
```

Așadar, pentru completarea programului REZSIS cu instrucțiunile de mai sus vom proceda în felul următor: vom da banda magnetică înapoi, după care vom introduce comenzile

```
LOAD "REZSIS"
LIST
```

vom introduce de la tastatură instrucțiunile cu etichetele 1200—1270 după care vom da comanda

```
RUN
```

sau vom salva noua variantă a programului (folosind un alt nume dacă dorim să nu distrugem vechea variantă) cu comanda SAVE.

EXERCIȚII

1) Programul următor:

```
10 INPUT "CÎTE NUMERE?"; N
20 LET C = 0
30 LET S = 0
40 LET C = C + 1
50 INPUT X
60 LET S = S + X
70 IF C < N THEN GOTO 40
90 PRINT "SUMA ESTE"; S
```

are ca scop calculul sumei a N numere, ce trebuie introduse succesiv, folosind instrucțiunea INPUT (cu eticheta 50).

a) Indicați comenzile ce trebuie date calculatorului pentru a salva acest program, apoi a-l reîncărca și a-l executa.

b) Modificați-l așa încît să calculeze media aritmetică a celor N numere introduse.

2 Ionel și-a salvat pe casetă programul UNU, avînd următorul conținut:

```
10 INPUT A
20 LET B = A/2
30 LET A = A + 1
```

A doua zi a tastat următoarele:

```
LOAD "UNU"
LIST
40 LET P = A * B
50 PRINT "P="; P
SAVE "DOI"
RUN
```

a) Ce va fi afișat mai întîi pe ecranul monitorului?
b) Care va fi rezultatul afișat, dacă Ionel va introduce numărul 4?
c) Dar dacă Ionel va introduce numărul 10? Numărul 20?

8) Ionel și-a salvat pe casetă și programul TREI, avînd următorul conținut:

```
10 INPUT A
20 LET C = 0
30 LET S = 0
40 LET C = C + 1
50 LET S = S + C
60 IF C < A THEN GOTO 40
70 PRINT "S="; S
```

a) Executați acest program de trei ori, introducînd pe rînd, ca date de intrare, numerele 4, 10, 20. Ce rezultate se obțin?

b) (Executați programul TREI de încă trei ori, cu datele de intrare pe care le doriți, apoi executați programul DOI cu aceleași date de intrare.) Comparați rezultatele obținute cu cele corespunzătoare ale programului DOI; ce observați?

9) Salvați pe casetă programul următor:

```
10 PLOT 100, 90
20 LET A = 0
30 LET S = 2
40 LET T = 2
50 LET B = 0
60 IF A < > 0 THEN GOTO 90
70 LET A = T
80 GOTO 150
90 LET A = 0
100 LET B = T
110 LET S = S + 2
120 LET T = S
130 IF B < 0 THEN GOTO 150
140 LET T = - T
150 DRAW A, B
160 GOTO 50
```

a) Ce se întîmplă în urma execuției programului?
b) Modificați-l în așa fel încît să se termine după 10 (20, 30) etape.
c) Salvați forma pe care o considerați definitivă.

4. SUBPROGRAME

Pînă acum am întocmit și folosit doar programe simple, formate din puține instrucțiuni. De regulă, cei ce folosesc intens calculatorul creează programe mult mai mari (formate din sute, chiar mii de instrucțiuni). Ei își organizează munca în așa fel încît în cadrul unui program să nu existe secvențe (mari) de instrucțiuni care să se repete, folosind în acest scop *subprograme*.

Un astfel de subprogram este apelat și executat ori de cîte ori este nevoie de el; în felul acesta se economisește munca de programare. Subprogramele au rolul de a evita scrierea aceleiași secvențe de instrucțiuni de mai multe ori.

Să considerăm, de exemplu, următoarea problemă: se cere să se rezolve sistemul de ecuații

$$\begin{cases} ax + by = u \\ cx + dy = v, \end{cases}$$

unde (u, v) este soluția sistemului de ecuații

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f, \end{cases}$$

iar a, b, c, d, e, f sînt numere date.

Programul nostru va trebui deci ca, după citirea numerelor A, B, ..., F, să obțină soluția (X, Y) a celui de-al doilea sistem, apoi să considerăm pe X, Y ca termeni liberi ai ecuațiilor ce formează primul sistem și să rezolvăm acest prim sistem.

În lecția anterioară am prezetat un program pentru rezolvarea unui sistem de două ecuații cu două necunoscute (programul REZSIS). Vom putea folosi parte din el ca subprogram, în felul următor:

```
  10 PRINT "INTRODUCETI COEFICIENTII"
  20 INPUT A, B, E
  30 INPUT C, D, F
  40 GOSUB 1100
  50 LET E = X
  60 LET F = Y
  70 GOSUB 1100
  80 PRINT "SOLUTIA ESTE"; X; Y
  90 STOP
1100 LET H = A * D — B * C
       :
1170 LET Y = J/H
1180 RETURN
```

Să observăm apariția a două noi instrucțiuni: GOSUB și RETURN*). Prima dintre ele este analoagă cu instrucțiunea GOTO; ea are forma:

etichetă GOSUB etichetă

și are ca efect saltul la eticheta indicată în dreapta.

De exemplu, instrucțiunea 40 GOSUB 1100 are ca efect saltul la instrucțiunea 1100 LET.... După executarea instrucțiunilor 1100—1170, urmează o instrucțiune 1180 RETURN, care are ca efect saltul înapoi la instrucțiunea 50 LET... . În continuare întîlnim o nouă instrucțiune 70 GOSUB 1100, care provoacă reluarea executării instrucțiunilor 1100—1170. Întîlnind iarăși instrucțiunea 1180 RETURN, va avea loc un alt salt înapoi, de data aceasta la instrucțiunea 80 PRINT.... .

Felul în care se procedează poate fi schematizat în figura VI.4. Se observă limpede că instrucțiunile cu etichetele 1100—1180 se execută de

---

*) Verbul *to return* înseamnă, în limba engleză, „a se înapoia", sau „a reveni la locul de plecare"; *gosub* este compus din două cuvinte: *go* („du-te") și prescurtarea *sub* de la *subprogram*.

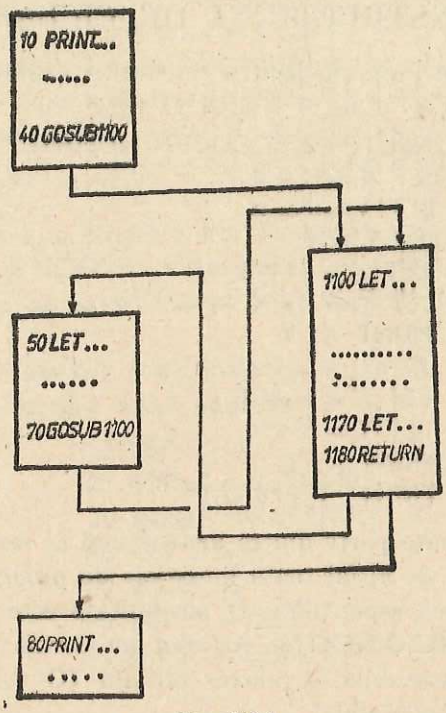


Fig. VI.4.

două ori. Instrucțiunile RETURN urmează întotdeauna, în execuție, unor instrucțiuni GOSUB și realizează un salt la instrucțiunile ce urmează direct acelor GOSUB.

EXERCIȚII

1) Programul următor:

```
10 INPUT A, B
20 LET X = A
30 IF A <= B THEN GOTO 50
40 LET X = B
50 PRINT X
```

are ca scop determinarea celui mai mic dintre numerele A și B. Modificați-l în așa fel încît:

a) să aibă ca rezultat determinarea celui mai mare dintre numerele A și B introduse;

b) să apară mesaje explicative suficiente.

2) Întocmiți un program pentru aflarea restului împărțirii unui polinom $P(X)$ la $(X - a)(X - b)$, cunoscînd valorile a, b, $c = P(a)$ și $d = P(b)$.

3) Întocmiți un program pentru aflarea numerelor u și v din relația

$$\frac{aX + b}{(X - c)(X - d)} = \frac{u}{X - c} + \frac{v}{X - d}$$

cunoscînd valorile a, b, c și d.

5. INSTRUCȚIUNI DE CICLARE

Să întocmim un program pentru calculul și afișarea pătratelor numerelor N + 1, N + 2, N + 3, N + 4 și N + 5:

```
10 INPUT "INTRODUCETI NUMARUL N"; N
20 LET X = N + 1
30 BET Y = X * X
40 PRINT X; Y
50 LET X = N + 2
60 LET Y = X * X
70 PRINT X; Y
   :
140 LET X = N + 5
150 LET Y = X * X
160 PRINT X; Y
170 PRINT "TERMINAT"
```

Observăm că mare parte dintre instrucțiuni se repetă, chiar de 5 ori. Limbajul BASIC, ca de altfel toate limbajele de programare a calculatoarelor, permite evitarea repetițiilor. O posibilitate este folosirea instrucțiunilor de ciclare FOR-TO/NEXT*). Acestea au forma:

etichetă FOR variabilă = valoare inițială TO valoare finală

etichetă NEXT variabilă.

Să rescriem programul de mai sus, folosind aceste instrucțiuni noi:

```
10 INPUT "INTRODUCETI NUMARUL N"; N
20 FOR C = 1 TO 5
30 LET X = N + C
40 LET Y = X * X
50 PRINT X; Y
60 NEXT C
70 PRINT "TERMINAT"
```

Programul este acum mult mai scurt; a apărut în schimb o variabilă nouă, C, care joacă rolul de „contor". Această variabilă ia pe rînd, valorile întregi 1, 2, 3, 4, 5, numărînd de cîte ori se reia execuția grupului de instrucțiuni 30—50. Observăm că grupul de instrucțiuni care se repetă (se reia) este încadrat între instrucțiunile 20 FOR... și 60 NEXT...

La fiecare reluare deci, valoarea variabilei C crește cu 1. Atunci cînd valoarea lui C este 6, deci depășește valoarea finală 5, execuția programului va continua cu prima instrucțiune de după NEXT, adică cu 70 PRINT....

Să analizăm cum se execută programul:

```
10 FOR C = 1 TO 2
20 LET C = C — 1
30 NEXT C
```

*) În limba engleză, *for* înseamnă „pentru", *to* înseamnă „pînă la", iar *next* înseamnă „următorul".

La prima vedere s-ar părea că instrucțiunea 20, ce se află între FOR și NEXT, se execută de două ori (pentru valorile 1 și 2 ale contorului C). Nu este însă așa! Întrucît creșterea cu 1 a valorii contorului C, asigurată de către instrucțiunea FOR, este compensată de scăderea cu 1 a valorii lui C provocată de instrucțiunea 20, constatăm că variabila C nu va lua niciodată o valoare mai mare decît valoarea finală 2; execuția programului va continua la nesfîrșit!

S-a întîmplat așa deoarece am modificat valoarea contorului, între instrucțiunile FOR și NEXT. Pe viitor evitați să faceți aceasta! Ca o regulă, valoarea contorului nu trebuie modificată necontrolat între instrucțiunile FOR și NEXT.

Să rescriem, folosind noile instrucțiuni învățate, programul pentru calculul mediei aritmetice a 10 numere:

```
10 LET S = 0
20 FOR C = 1 TO 10
30 INPUT "NUMARUL"; X
40 LET S = S + X
50 NEXT C
60 LET M = S/10
70 PRINT "MEDIA ESTE"; M
```

EXERCIȚII

1) Întocmiți un program pentru calculul sumei și mediei aritmetice a 5 numere, cu afișarea mesajelor corespunzătoare.

2) Întocmiți un program pentru calculul pătratelor numerelor naturale cuprinse între 11 și 99, folosind instrucțiunea FOR, cu afișarea corespunzătoare a rezultatelor.

3) Întocmiți un program pentru calculul sumei cuburilor numerelor naturale cuprinse între 1 și 30, folosind instrucțiunea FOR.

6. ALTE FACILITĂȚI ALE LIMBAJULUI BASIC

Cum am putea să extragem rădăcina pătrată dintr-un număr X, folosind calculatorul? Dacă ne mulțumim să obținem rezultatul cu 8—9 cifre exacte (ceea ce de obicei este suficient), atunci acest lucru este foarte simplu: limbajul BASIC dispune în acest scop de o funcție, notată SQR*). Un program simplu ar putea fi următorul:

```
10 INPUT "NUMARUL X"; X
20 LET Y = SQR(X)
30 PRINT "RAD. PATRATA ESTE"; Y
```

*) SQR este o prescurtare de la *square root*, ceea ce în limba engleză înseamnă „rădăcină pătrată".

Cuvîntul „funcție" este folosit aici într-un sens diferit de cel utilizat în partea I a manualului.

Avem la dispoziție și alte funcții, dintre care amintim: a) funcția sinus SIN; b) funcția cosinus COS; c) funcția tangentă TAN (în aceste funcții argumentul, adică mărimea unghiului, trebuie exprimat în radiani, nu în grade!); d) funcția parte întreagă INT; e) funcția modul ABS.

Limbajul BASIC este creat relativ recent (în anul 1960), după mai mulți ani de experiență de programare în limbaje mai vechi (FORTRAN, COBOL etc.). Datorită experienței acumulate, s-a decis să se permită o serie de facilități, care să ușureze munca programatorului. Prezentăm numai o parte dintre acestea:

1) Pe aceeași linie de program (identificată de o etichetă) se permite scrierea mai multor instrucțiuni, separate prin semnul: (două puncte). De exemplu, iată trei instrucțiuni scrise cu o singură etichetă

```
10 FOR C = 1 TO 7 : LET X = X + C : NEXT C
```

2) Se permite operarea și cu cuvinte, nu numai cu numere. De exemplu

```
"BAS" + "IC" = "BASIC"
```

Regulile de lucru cu operațiile cu cuvinte nu sînt complicate, dar depășesc cadrul manualului.

3) Se permite salvarea datelor și rezultatelor, nu numai a programelor, în fișiere speciale, pe banda magnetică.

4) Există și alte funcții, instrucțiuni și comenzi, pe care nu le putem prezenta în acest manual. Citiți și alte cărți, din care să învățați tehnica de programare structurată; totodată însușiți-vă aritmetica binară (în baza 2).

Să prezentăm, în încheiere, cîteva programe utile.

a) Program pentru rezolvarea ecuației de gradul al doilea

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

```
10 PRINT "INTRODUCETI COEFICIENTII A, B, C"
20 INPUT A; B; C: IF A<>0 THEN GOTO 40
30 PRINT "ATI INTRODUS A = 0. REPETATI": GOTO 10
40 LET D = B * B — 4 * A * C: IF D >= 0 THEN GOTO 60
50 PRINT "NU ARE SOLUTII REALE" :STOP
60 LET Y = — B/(2 * A) : IF D <> 0 THEN GOTO 80
70 PRINT "O SOLUTIE, X ="; Y : STOP
80 LET D = SQR(D) : LET Z = D/(2 * A)
90 LET X1 = Y — Z : LET X2 = Y + Z
100 PRINT "DOUA SOLUTII, X1 ="; X1; "X2 ="; X2 : STOP
```

Schema logică este următoarea:

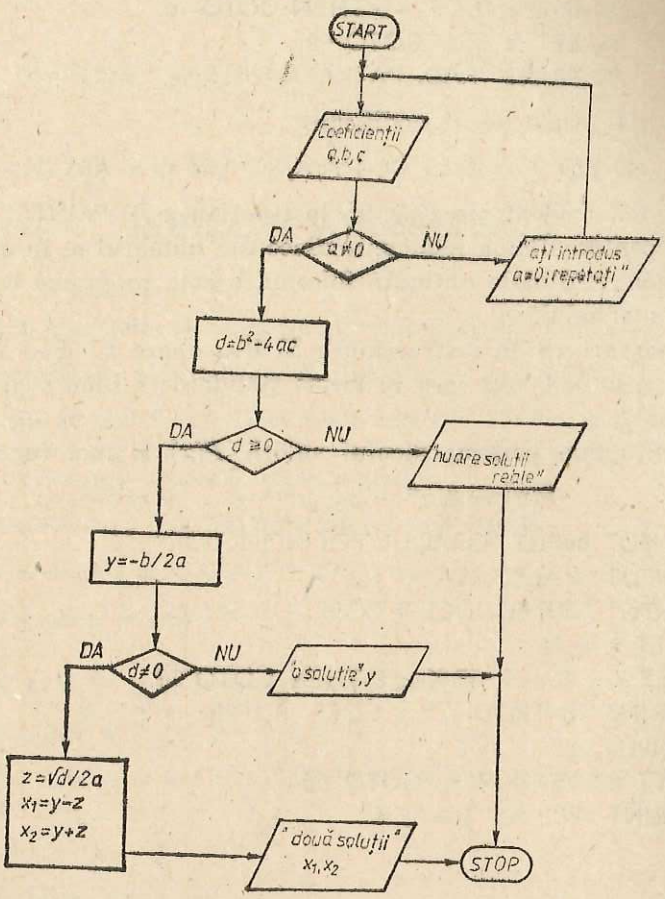


Fig. VI.5.

b) Program pentru determinarea celui mai mare divizor comun d a două numere naturale a și b, prin algoritmul lui Euclid.

```
10 INPUT "INTRODUCETI NUMERELE A, B"; A, B
20 LET X = A : LET Y = B : IF B > 0 THEN GOTO 40
30 PRINT "ATI INTRODUS B = 0. REPETATI" : GOTO 10
40 LET C = INT (X/Y) : LET R = X — C * Y : IF R = 0 THEN GOTO 60
50 LET X = Y : LET Y = R : GOTO 40
60 PRINT "CMMDC AL LUI"; A;" SI"; B;" ESTE"; Y
```

c) Program pentru aflarea rădăcinii pătrate din numărul pozitiv a, cu 5 cifre zecimale exacte după virgulă.

```
10 INPUT "INTRODUCETI NUMARUL A"; A : IF A < 0 THEN GOTO 10
20 LET X = 0 : IF A = 0 THEN GOTO 70
30 LET X = 1
```

```
40 LET Y = 0. 5 * (X + A/X) : LET D = ABS(X — Y)
50 IF D < 0. 1E — 5 THEN GOTO 70
60 LET X = Y : GOTO 40
70 PRINT "RAD. PATRATA DIN"; A;" ESTE"; X
```

Făcînd următoarea modificare:

```
40 LET Y = 0. 5 * (X + A/X/X) : LET D = ABS (X — Y)
```

și modificînd evident mesajul din instrucțiunea 70 PRINT..., se obține un program pentru aflarea rădăcinii cubice din numărul a, în aceleași condiții (Comparați rezultatele obținute folosind aceste programe cu tabelul de la sfîrșitul manualului.)

Observați că în instrucțiunea 50 IF... apare 0.1 E — 5 care este de fapt numărul 0.000001 scris în forma standard (E fiind o prescurtare de la „exponent").

d) Program pentru calculul valorii $P(x)$ a unei funcții polinomiale

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

```
10 INPUT INPUT "GRADUL POLINOMULUI?"; N
20 INPUT "VALOAREA X?"; X
30 INPUT "INTRODUCETI COEF. LUI X↑N"; B
40 LET K = N
50 LET K = K — 1 : IF K < 0 THEN GOTO 90
60 PRINT "INTRODUCETI COEF. PUTERII X↑"; K
70 INPUT A
80 LET B = B * X + A : GOTO 50
90 PRINT "P("; X; ") = "; B
```

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

Pag. 3. 3) Adevărate: a); b); c); e); g); h); i); j); l); n); o).

4) Adevărate: a); b); c); d); e); f); g); h); i).

5) Se știe că: $A \cup B = \{x \mid x \in A$ sau $x \in B\}$; $A \cap B = \{x \mid x \in A$ și $x \in B\}$; $A - B = \{x \mid x \in A$ și $x \notin B\}$, în **N**; **Z**; **Q**; **R**; **R** − **Q** reprezintă respectiv mulțimile de numere: naturale; întregi; raționale; reale; iraționale.

6) Adevărate: a) i; ii; b) $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ și deci $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.

11) Se reprezintă pe axă $\{-3; 0; 3\}$.

12) Prin patru puncte.

Pag. 4. 1) h); i); j); k) se scoate factorul comun.

2) Adevărate: a); d); e); h); i); j); l).

3) a) $a = 27$; b) $a = 2\,000$; c) 1 989; d) $a = 101$; e) $a = 8$; f) $a = 0$; g) $a = 0$; h) $a = 9$.

4) $A = \{7\}$; $B = \emptyset$.

6) Adevărate: a); c).

7) a) $a = 124$; b) $a = -271$; c) $a = -25$; d) $a = 1\,989$; e) $a = 2$.

8) $A = \{-7\}$; $B = \emptyset$.

10) Se știe că $a^0 = 1$ și $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

11) a) $a = -6$; b) $a = -1$; c) $a = 3$; d) $a = 2$; e) $a = 12$; f) $a = 3$.

12) $A = \left\{\dfrac{5}{12}\right\}$; $B = \emptyset$.

14) a) $a = -1$; b) $a = 3$; c) $a = 1$; d) $a = 2$; e) $a = \sqrt{3} + 1$; f) $a = \sqrt{7} + 1$; g) $a = -10$; h) $a = \pm 5$; i) $a = \pm 10$.

15) $A = \{\pm 5\}$; $B = \emptyset$.

16) b) $b \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$; c) $a = x + \sqrt{2}\,y$; $b = x - \sqrt{2}\,y$, unde $(x, y) \in \mathbf{Z}$,

d) $a = \sqrt{3}$ și $a = \sqrt{5}$ imposibil, deci $a = 0$.

Pag. 6. 1) Se știe că $|a| = \begin{cases} +a & \text{dacă } a \geq 0 \\ -a & \text{dacă } a < 0. \end{cases}$

3) Spre exemplu $|a| = 4$ înseamnă $a = +4$ și $a = -4$.

5) Adevărate: b); c); d); e); f).

6) a) $x \leq 0$; b) $x \leq 0$; c) $x \in \mathbf{R}$; d) $x \leq 0$; e) $x \leq 0$; f) $x \leq 0$.

9) $A = \{1\}$; $B = \{0\}$; $C = \{-1, 1\}$; $D = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$.

11) a) -2; b) $-\frac{3}{5}$; c) 5; d) $|\sqrt{3} - 2|$; e) Dacă $x \neq 0$, $|x|$; dacă $x = 0$, 0; f) $|x|$; g) $x \leq 0$.

Pag. 11. 4) $A = [-1, 4]$; $B = (3, 7]$; $C = [-3; 0)$; $D = (-3; 3)$; $C = [0; \infty)$, $F = (2; \infty)$;

$G = (-\infty; 0]$; $H = (-\infty; -3)$; $I = (-\infty; -2]$; $J = [-3; \infty)$; $K = (-\infty; 1]$;

$L = [5; \infty)$; $M = (0{,}5; 2{,}5]$; $N = (-\sqrt{2}; +\sqrt{2}]$; $O = \left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]$;

$P = [-1{,}(6); -1{,}(5)]$.

5) Adevărate: i); iii).

6) a) $I_1 = [0, \infty)$; b) $I_2 = (-\infty; -1]$; c) $I_3 = (0; 0{,}9]$; $I_4 = (0; 1]$; $I_5 = [0; 1]$

14) a) $I_2 \supset I_1$.

Pag. 12. 1) a) $[-2; 7]$; b) $[-5; 3]$; c) $[-2; 9]$; e) $[-3; 8]$; f) $[-3{,}5; 5]$; g) $[-2{,}(16); 1{,}41]$.

4) Interval: a); b); e).

5) a) $[1; \infty)$; b) $(-1; \infty)$; c) $\mathbf{R}$.

7) c) $\{1; 2; 3; 4\}$; d) $\{-2; -1; 0\}$; e) $[-\sqrt{5}; \sqrt{2})$; f) $\left(0; 2\frac{1}{3}\right)$.

12) Intervale: a); e)

Reuniuni de intervale: restul.

13) a) $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$; b) $(-\infty; -1] \cup [3; \infty)$; c) $(-\infty; -5) \cup (+5; \infty)$; d) $(-\infty; -5) \cup (3; +\infty)$.

Pag. 19. 3); 4); 5); 6); 7): Se rezolvă direct, prin înlocuirea în ecuația respectivă a necunoscutei cu valoarea numerică respectivă, sau rezolvînd ecuația propusă și apoi confruntînd soluția ecuației cu numărul respectiv.

8) Se rezolvă ecuația și apoi se cercetează dacă S aparține mulțimii date.

9) Analog.

13) a) $S = \{1\}$; b) $S = \{40\}$.

14) O singură soluție sau mai multe (soluție unică sau identități). a), b) identități; c) o singură soluție; c) și d) nu au soluții (ecuații imposibile).

15) Nici o soluție sau o soluție (Imposibilă sau soluție unică) a), c) soluție unică; b) imposibilă; restul, nedeterminări.

16) În a), b), c), d) se face $x = 2$ și apoi se rezolvă ecuațiile în necunoscuta a

17) Analog.

18) $m = n = 0$.

20) 1) a) $m \in \mathbf{R}^*$; b) $m \in \mathbf{R}$; c) $m \in \mathbf{R} - \{-1; 0\}$; d) $m \in \mathbf{R}^*$; e) $m \in \mathbf{R}$; f) $m \in \mathbf{R} - \{-2, 2\}$; g) $m \in \mathbf{R}$; h) $m \in \mathbf{R}^*$; i) ecuație imposibilă; 2) a) $m \in \mathbf{R}^*$; b) $m \in \mathbf{R}$; c) $m \in \mathbf{R} - \{-1; 0\}$; d) $m \in \mathbf{R}^*$; e) $m \in \mathbf{R}$; f) $m \in \mathbf{R} - \{-2; 2\}$; g) $m \in \mathbf{R} - \{-1; 1\}$; h) $m \in \mathbf{R}^*$; i) ecuație imposibilă;

3) și 4) se deduc din precedentele.

22) a) $m \cdot x = -a$; $a \neq m \neq 0$, o singură soluție; $a = m = 0$ identitate; $a \neq 0$ și $m = 0$ imposibilă.

b) $x(a + m) = 2am$; $a = -m$ o singură soluție: $S = \left\{\frac{2am}{a + m}\right\}$; $a = m = 0$ ecuație nedeterminată $S = \mathbf{R}$;

c) $m \neq a$, $S = \left\{\frac{1}{a - m}\right\}$; $m = a$, ecuație nedeterminată $S = \mathbf{R}$;

d) $a \neq m$, $S = \{a + m\}$; $m = a$, ecuație nedeterminată, $S = \mathbf{R}$.

Pag. 27. 3) a) $x \in [-3; \infty)$; b) $x \in [3; \infty)$; c) $x \in (-\infty; 1]$.; d) $x \in (-\infty; -2]$; e) $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right]$; f) $x \in (-\infty; 1]$; g) $x \in \left[\frac{5}{4}; +\infty\right)$; h) $x \in [-2; +\infty)$.

7) a) $5x - 2x > 2 - 1$; $x \in \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

8) a) $5(x + 1) - 2 \cdot x \geqslant 20$; $3x \geqslant 15$; $x \in [5; +\infty)$.

9) b) $-4(x - 1) \geqslant -15x$; $11x \geqslant -4$; $x \in \left[-\frac{4}{11}; +\infty\right)$.

10) a) $x \geqslant 0$; b) $-x \geqslant 0$; c) $x + 1 \geqslant 0$; d) $-x - 1 \geqslant 0$; e) $\frac{x - 1}{2} \geqslant 0$; f) $\frac{-x - 1}{3} \geqslant 0$.

11) a) $x \leqslant 0$.

13) A. $2x - 1 \geqslant 2$; $2x \geqslant 3$; $x \geqslant \frac{3}{2}$ și $x \in \mathbf{N} \cap \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$; $x \in \mathbf{N} - \{0, 1\}$, deci $A = \{x \in \mathbf{N} \mid x \geqslant 2\}$.

14) a) Se rezolvă sistemul $\begin{cases} x + 1 \geqslant -2 \\ x + 1 \leqslant 3 \end{cases}$, apoi intervalul obținut se intersectează cu $\mathbf{Z}$.

15) Se rezolvă în $\mathbf{R}$ sistemul: $\begin{cases} 2y - 5 > -3{,}5 \\ 2y - 5 < \frac{5}{2} \end{cases}$.

16) Pentru A. $|x + 1| \leqslant 7 \Leftrightarrow -7 \leqslant x + 1 \leqslant +7$.

17) $x = \frac{-2}{2a - 1}$; $x \geqslant 0$; atunci $2a - 1 < 0$; $a < \frac{1}{2}$.

19) a) Se rezolvă sistemul $\begin{cases} x - 2 \leqslant 3 \\ x + 1 \geqslant -2 \end{cases}$.

20) f) $\begin{cases} 3x - x > -2 - 2 \\ x + 2x > 6 - 15 \\ 5x - x > -14 - 14 \end{cases}$; $\begin{cases} x > -2 \\ x > -3 \\ x > -7 \end{cases}$; $x \in (-2; +\infty)$.

22) Se rezolvă în $\mathbf{Z}$ sistemul $\begin{cases} \frac{2x - 3}{3} \geqslant x - 2 \\ \frac{2x - 3}{3} < x \end{cases}$.

23) Se va ține cont de inegalitatea triunghiului.

Pag. 29. 1) Prin înlocuire directă se rezolvă respectivele inecuații și apoi se verifică dcaă elementele mulțimilor date aparțin respectivelor intervale.

2) b) Se formează sistemele 1) $\begin{cases} x + 1 > 0 \\ 3 - x > 0 \end{cases}$ sau 2) $\begin{cases} x + 1 < 0 \\ 3 - x < 0 \end{cases}$;

Se rezolvă sistemele 1) și 2) și apoi se reunesc intervalele obținute.

3) a) $4x(2x - 1) \geqslant 0$; b) $(2x - 1)(2x + 1) < 0$; c) $(x - 2)^2 \leqslant 0$; d) $(x - 3)^2 > 0$; e) $(5x - 1)^2 < 0$.

4) a) $2 - x > 0$; *b)* $x + 5 < 0$; c) $2x - 1 < 0$; d) fracția nu poate deveni egală cu zero; $x + 2 > 0$.

Pag. 32. *1) c)* $x = 0{,}5$; $y = 0{,}2$; *2) d)* $x = -1$, $y = 1$; *e)* Soluția este $(5; -3)$; *f)* $\left(\frac{27}{14}; -\frac{19}{14}\right)$.

3) a) $\left(\frac{47}{22}; -\frac{7}{22}\right)$; *b)* $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{5}\right)$; *c)* $\left(\frac{5}{8}; -\frac{1}{20}\right)$; *d)* $(4; 0{,}5)$; *e)* $(60; 36)$.

Pag. 34. *1) c)* $\left(\frac{60}{7}; \frac{22}{7}\right)$; *e)* $x = \frac{609}{590}$, $y = \frac{1117}{1770}$. *2) a)* $(2{,}25; 3{,}2)$; *b)* $(9; -3)$; *c)* $\left(\frac{2}{8}; -1\right)$. *3) a)* $(3; 6)$; *b)* $\left(-\frac{5}{8}; -\frac{1}{2}\right)$.

Pag. 36. *1) a)* $x = 5$, $y = 11$, $z = 17$; *b)* $(18; 12; 10)$; *c)* $(5; 3; 8)$. *2) a)* $\left(\frac{108}{17}; \frac{126}{17}; \frac{252}{17}\right)$; *b)* $(9; 9; 6)$.

Pag. 39. *1)* 20,5 m, 24,5 m, 27,5 m, *2)* 17,5 cm, 25 cm, 22,5 cm. *3)* BM și BP au lungimea $\frac{a-b+c}{2}$. *4)* 253 kg, 14 kg. *5)* 81, 16, 3; *6)* 45, 15 respectiv 5 litri pe minut; în 33 min. 20 sec. 100 min., respectiv 300 min.

Pag. 49. *1)* $a = -5$. *3)* Graficele sînt drepte paralele. *6)* Graficele sînt semidrepte. *8)* *a)* $f(x) = -14x + 24$; *b)* $g(x) = 2x + 2$; *c)* Nu. *9)* *a)* $T = 20 + \frac{1}{30,5}a$, a fiind adîncimea în metri, iar T temperatura în °C.

Pag. 51. *5)* $g(x) = 2x^2 - 4x$. *6)* $f(x) = x^2 - 4x + 7$. *8)* Nu.

Pag. 54. *4)* *b)* 44 ohmi.

Pag. 55. *3)* $X^4 - X^3 - 2X + 4$.

Pag. 56. *1)* *a)* $-4X^2$; *b)* $-\frac{3}{2}X^2$; *c)* $5X^4$.

Pag. 58. *1)* *a)* $X^2 - 2X + \frac{2}{3}$; *b)* $-3X^3 + \frac{5}{2}X^2 - 2X$.

2) *a)* Cîtul $X + 2$, restul -1; *b)* cîtul $3X + 9$, restul 47; *c)* Restul 0. *3)* *a)* Cîtul $X - 1$, restul 2; *b)* Cîtul $X^2 - X + 1$, restul 0. *5)* Cîtul la prima împărțire este împărțitorul la cea de-a doua. *8)* *a)* $X^3 - YX^2 + Y^2X - Y^3$; *b)* $5X + 2Y$; *c)* Cîtul $2X + 3Y$, restul $4YX + 2Y^2$; *9)* *a)* $-6YX + 18Y^2$; *b)* $-6XY + 2X^2$.

Pag. 60. *1)* *a)* Nu; *b)* da; *c)* da; *d)* nu; *e)* da; *f)* da. *3)* $m = 44$.

Pag. 61. *1)* *e)* $(X-1)(X+1)(X^2+1)(X^2-2X+1)(X^2+2X+1)$; *f)* $(X-1)\cdot(X^2+X+1)\cdot(X^6+X^3+1)$. *2)* Reductibile sînt $X^2 - 4$, $X^2 - 2 = (X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})$, $X^2 - 4X + 4$, $X^3 + 8 = (X+2)(X^2 - 2X + 4)$, $X^3 + 2 = (X + \sqrt[3]{2})(X^2 - \sqrt[3]{2}X + \sqrt[3]{4})$ și $X^4 + 1 = (X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1)$. *4)* Valorile $P(a)$ și $Q(a)$ sînt egale pentru orice a; de fapt avem același polinom, scris în două moduri diferite.

Pag. 62. *1)* *a)* rest -9; *b)* rest 3; *c)* rest -9; *e)* rest -14, *d)* 0,869. *6)* $m = -\frac{2}{3}$, $n = -\frac{46}{3}$, restul $-\frac{2}{3}$.

Pag. 63. *3)* *a)* $-3, -1$ și 3; *b)* $-3, -2$ și 2; *c)* -1, 1 și 3.

Pag. 64. *2)* *c)* $(3X-1)(3X+4)$; *d)* $(6X+1)^3(6X+4)$. *3)* *a)* $9X^4 + 30X^2 + 25$; *b)* $9X^4 - 60X^2 + 100$. *4)* *a)* $(X^3 + 0,5)^2$; *b)* $(3X^2 - 2)^2$. *5)* *a)* $(7X^3 - 4)(7X^3 + 4)$; *b)* $(X - 1)(5X + 5)$; *e)* $X^3(5X - 4)(5X + 4)$. *6)* *b)* $X^2(X - \sqrt{3})(X + \sqrt{3})$; *c)* $X(\sqrt{2}X - 1)(\sqrt{2}X + 1)$.

Pag. 65. *1)* *a)* $(2X-3)(4X^2+6X+9)$; *b)* $2X(X^2+12)$; *c)* $X\left(\frac{1}{2}X-1\right)\cdot\left(\frac{1}{4}X^2+\frac{1}{2}X+1\right)$. *2)* *c)* $(X-1)(X+1)^2(X^2-X+1)$. *3)* *a)* $(X - \sqrt[3]{2})(X^2 + \sqrt[3]{2}X + \sqrt[3]{4})$; *c)* $(X - \sqrt[3]{4})(X^2 + \sqrt[3]{4}X + 2\sqrt[3]{2})$.

Pag. 66. *1) a)* $(X-3)(X+2)$; *b)* $(X+3)(X-2)$; *f)* $(3X-1)(X-2)$. *3) a)* $(X-1)(X-2)(X^2+3X-18)$; *b)* $(X-1)(X+4)(X^2+3X+6)$; *c)* $(X-1)\cdot(X+1)(X-2)^2$; *d)* $(X-1)(X+1)(X-2)(X+2)$; *f)* $(X-1)(X+1)(X-2)(X^2+2X+4)$.

Pag. 67. *1) a)* $(X-Y)(X^2+Y^2)$; *b)* $(A+B)(A^2+B^2)$; *c)* $(X+A)(X+B)$; *d)* $(X+5)(Y+3)$; *e)* $(XY-a^2)(X+Y+a)$; *f)* $(X+a)(X^2+3a^2)$. *2) a)* $(X-Y)(X+Y)(X^2+3Y^2)$; *b)* $(X-Y)(X+Y)(X^2-XY+Y^2)(X^2+XY+Y^2)$; *c)* $(3X-2Y)^2$; *d)* $3(X-Y)(3X-Y)$; *e)* $X^2(9Y-4X)(9Y+4X)$; *f)* $(3X-4Y)(9X^2+12XY+16Y^2)$. *3) a)* $(X+1)(Y+1)(X^2Y^2-X^2Y-XY^2+X^2+4XY+Y^2-X-Y+1)$; *b)* $(X-Y)(X-Z)(2X+Y+Z)$; *c)* $(X-a+b)(X+a-b)$; *d)* $(a^2+b^2)(X^2+Y^2)$; *e)* $(X-Y)(X^2+XY-Y^2)$; *g)* Completați pînă la un pătrat perfect: $(X^3+3Y^2)^2-(2XY)^2$.

Pag. 69. *2) a)* X^2+X; *b)* $X+1$; *c)* $2X+3$; *d)* $X-2$; *e)* $X-2$; *f)* $X-4$; *g)* $X+2$; *h)* $X-2$. *4) a)* $X-Y$; *b)* $(X-Y)^2$. *5) a)* X^2-X+1 nu se divide nici cu $X-1$, nici cu $X+1$; *b)* X^2+X+1 nu se divide nici cu $X-1$, nici cu $X+2$.

Pag. 71. *2) a)* X^2-4X+3 sau $2X^2-8X+6$, *b)* X^2+3X+5; *c)* Sînt prime între ele; *g)* X^3+X^2+X+1; *h)* $X-1$.

Pag. 72. *2)* $(X-a)(X-b)(X-c)=X^3-(a+b+c)X^2+(ab+ac+bc)X-abc$. *3) a)* $X(X-4)^2$; *b)* $X(X^3-8)$; *c)* $X(X^2+1)$; *d)* $(3X+2)(27X^3+8)$; *e)* $X(X^3-1)$. *5) b)* $X^8+X^6-X^2-1$.

Pag. 74. *1) c)* $P(\sqrt{2})$ este aproximativ 5,1. *2)* $a=-54$. *4) a)* $-4X^2+X$; *b)* $-X^2+1$.

Pag. 75. *3)* $y=\frac{9}{7}$; $y=0$.

Pag. 76. *2) a)* $\frac{9X}{4}=\frac{9}{4}X$; *f)* $\frac{X^3+8}{X^2+X}$ (nu se simplifică!). *4) a)* $X-3$; *b)* $\frac{X-Y-Z}{-X+Y-Z}$; *c)* $\frac{18X(X-Y)}{X+Y}$.

Pag. 78. *2) a)* 1; *b)* $-\frac{1}{2}$; *c)* -2; *d)* -5; *e)* 0.

Pag. 80. *2) a)* 5; *b)* $\frac{X^2-X+1}{X}$; *c)* $\frac{2}{X-1}$.

Pag. 83. *2) c)* $\frac{X^2+1}{X^2+X}$; *f)* $\frac{2X}{X^2-1}$. *4) a)* $\frac{1}{X^2+X}$; *b)* $\frac{9X+2}{X^3-4}$. *5) b)* și *c)* $\frac{1}{1-X}$.

Pag. 84. *2) a)* $\frac{1}{X^2+X}$; *b)* $\frac{1}{X-2}$. *4) a)* $\frac{2X}{X+Y}$.

Pag. 87. *3) b)* $\frac{X^2+XY}{2Y}$; *c)* $\frac{4Y}{X-1}$. *4) a)* $3X^2(X+Y)^2$; *c)* $\frac{X^2}{(X+Y)(X^3-Y^3)}$. *7) a)* $X-1$; *b)* $\frac{X^2-2X+4}{X^2+2X+2}$. *8)* Transformați mai întîi în fracții raționale, apoi simplificați-le pe cît posibil!

Pag. 91. *3)* Toate. *5) b)* Nici o valoare.

Pag. 94. *2) b)* și *f)* nu au soluții; *k)* Dacă $a = 9$, atunci are soluția 0; dacă $a \neq 9$, nu are soluții; *l)* nu are soluții; *m)* Dacă $m = 0$, atunci are soluția 0; dacă $m \neq 0$, ecuația are două soluții; *5) h)* 0 și $\frac{\sqrt{2}}{2}$. *6) a)* Soluții -26 și 24; *c)* nu are soluții; *d)* o singură soluție: -2; *g)* soluții $-\sqrt{2}$ și $-\sqrt{5}$; *l)* dacă $m = n$, o singură soluție! *8)* Indicație: analizați posibilitățile $a = 0$; $a \neq 0$. *9)* Obținem ecuația $\sqrt{2l^2} = 1$; aproximați soluțiile ei.

Pag. 99. *2) a)* 2 și 12; *b)* -2 și -12. *4)* Ecuațiile au aceleași soluții; ce puteți deduce? *6)* Nu. *7)* $m = -92$ sau $m = 92$. *9)* Folosiți tabelul de la sfîrșitul manualului. *10)* $m = -9$; a doua soluție este 25.

Pag. 103. *6) c)* nu are soluții. *8) a)* $3 - \sqrt{5}$ și $3 + \sqrt{5}$; *c)* $-4 - \sqrt{22}$ și $-4 + \sqrt{22}$; *d)* o singură soluție: 2.

Pag. 106. *3)* Folosiți relațiile lui Viète, după caz. *b)* $x_2 = -\frac{1}{2}$, $m = -9$; *c)* $x_1 = 1$, $m = 3$. *4)* 311 și 26. *5)* 192 și 75. *7)* Pentru $m = 2$ și $n = -4$. *8)* $3\sqrt[3]{4}$; -3. *9)* Da, pentru $m = -1$.

Pag. 108. *2) a)* $\frac{X+13}{2X-15}$; *b)* $\frac{X+4}{2X+5}$; *e)* $\frac{3X-1}{2X+9}$. *3)* Discriminantul este negativ doar pentru $m \neq 0$. Pentru $m = 0$ trinomul este reductibil!

Pag. 112. *1) a)* Soluții 2 și $\frac{-3}{5}$; *c)* nu are soluții; *e)* nu are soluții. *2) b)* Nu are soluții; *i)* o singură soluție; 2: *k)* 1; *l)* 6. *3) a)* Patru soluții: $\pm\sqrt{10} \cdot \pm\sqrt{11}$; *b)* nu are soluții.

Pag. 116. *1)* 40 m. *2)* 79 și 80 cm². *3)* $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonale; 20 laturi. *4)* $a = \pm 2\sqrt{3}$. *5)* 4 m și 4 m; 5 m și 3,2 m. *6)* 12 și 8 ohmi. *7)* 80 cm și 100 cm

Pag. 117. *1)* Evident, 1,024; *2)* $u^{-1} = \frac{15}{22}$; $u^2 = \frac{484}{225}$. *3)* $\frac{u}{v} = \frac{-1435}{416}$. *4) a)* $m = -3$; *b)* $m = -3$; *c)* $m = 4$. *5)* Aproximativ $0{,}34866 \cdot 10^6$ și $0{,}142 \cdot 10^{-3}$; $0{,}1776 \cdot 10^2$. *6)* $a = \frac{22\sqrt{3}}{3}$, adică aproximativ 12,8 cm. *7)* $a = 8$, $b = \frac{40}{4}$, $c = 20$. *8)* Între 2,2016 și 2,56054. *9)* $\sqrt{34}$ cm, adică aproximativ 5,8 cm. *10)* Negativ; pozitiv. *11)* 2. *12)* 2 și aproximativ 3,3. *13)* $\sqrt{2-\sqrt{2}}$. *14)* Indicație. Aplicați teorema lui Pitagora celor două triunghiuri dreptunghice neasemenea din fig. 4; $l_{2n} = \sqrt{2 - 2\sqrt{1-(l_n/2)^2}}$. *15)* Volumul este de aproximativ $0{,}14 \cdot 10^{16}$ km³. *16)* $R = 3$ kΩ; circuitul poate fi înlocuit prin rezistorul R. *17)* 0,5 kΩ. *18)* Adunăm, apoi scădem cele două ecuații. Soluția este (3; 2). *19)* $m = -7$. *20)* Soluții: orice număr real diferit de -1. *21)* $a = 5$. *23)* 35 N. *25)* 24. *26)* $m = 4$, $n = 6$. *27)* $Q(X) = (X-2)(2X-3)(2X+3)$. *28)* $a = -3$. *29)* Câtul este $X^{n-1} + aX^{n-2} + a^2X^{n-3} + \ldots + a^{n-2}X + a^{n-1}$. *30)* $a = -2$. *31)* $a = 7$, $b = 5$, $c = 4$. *32)* Trebuie ca $P\left(\frac{1}{3}\right) = 0$; $a = 4$, $b = -12$, $c = 5$. *33)* $R = Y(X-1)(XY-1)$; $S = X(X-1)(2-Y^2)$. *34)* $(X-2Y)^3$. *35)* $(X+Y-2)(X+2)$. *36)* $X(X-1)(X-4)(X+3)(X+4)$. *37)* $a = -3$ sau $a = -24$; nu, deoarece în acest caz ar trebui să fie Q. *38) a)* $s = -15$; *b)* $s = 13$; *c)* pentru nici o valoare.

39) a) $X+\frac{1}{5}$; *b)* $\frac{Y+1}{Y+3}$; *c)* $\frac{5}{2Y+9}$; *d)* $5X-1$. *40) a)* $2Z-7$; *b)* $\frac{X^2-X+1}{X}$; *c)* $\frac{2X+18}{X+6}$; *d)* $\frac{X^2+X+6}{X+3}$. *41) a)* Este de preferat să notăm $X^2-1=Y$; $\frac{X^2-2}{X^2-3}$; *b)* La fel, notăm $X^2+X=Y$; $\frac{X^2+X-1}{X^2+X+1}$. *42) a)* $\frac{8X}{(X^2-4)^2}$; *b)* $\frac{12X+16}{X^2-16}$; *c)* $\frac{4}{X+4}$; *d)* 1; *e)* $\frac{X^2+Y^2+Z^2}{XYZ}$. *43) a)* $\frac{X-1}{2X-1}$; *b)* $\frac{12X+15}{2X+3}$; *c)* X^2+XY. *44) a)* $\frac{X^2-3XY}{XY+3Y^2}$; *b)* 1; *c)* $\frac{Y+X}{Y-X}$. *45) a)* $\frac{8-2X-3X^2}{32X^2-18}$; *b)* $\frac{1}{X}$; *c)* 2; *46)* Corect c). *47) a)* $-0{,}2$ și $0{,}6$; *b)* -4 și $\frac{3}{7}$; *c)* $-\frac{3}{2}$ și $\frac{9}{2}$; *d)* $\frac{1}{4}$ și $\frac{1}{2}$; *e)* $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ și $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. *48)* $a=1$ sau $a=2$. *49) a)* $x^2-x+\frac{3}{16}=0$ sau $16x^2-16x+3=0$; *b)* $x^2+\frac{5}{12}x-\frac{1}{6}=0$; *c)* $x^2+\frac{7}{11}x-\frac{18}{121}=0$; *d)* $x^2-8x-1=0$. *50) a)* $x^2-2ax+a^2-b^2=0$. *51) a)* $ax^2-bx+c=0$; *b)* $ax^2+2bx+4c=0$; *c)* $ax^2+(b-4a)x+(c-2b+4a)=0$; *d)* $cx^2+bx+a=0$. *52)* $m=-12$ sau $m=12$; $m=0$. *53) a)* $m=12$; *b)* $m=-1$; *c)* $m=15$. *54)* Notăm $y=\frac{4+x}{1+x}$, de unde $x=\frac{4-y}{y-1}$; ecuația de gradul al II-lea $y^2-my-1=0$ are discriminantul pozitiv, oricare ar fi m real. *55)* $m=22$; soluția 5. *56)* Nu. *57) c)* și *a)*. *58)* Nu. Prima inegalitate se deduce din faptul că discriminantul este negativ. *59) a)* Soluții -3 și 3; *e)* soluții 5 și -2. *60) a)* Soluții $-m$ și $4m$; *b)* soluții $-m-1$ și $-m+1$; *d)* o singură soluție: $\frac{m+1}{2}$. *61) a)* Soluții -2, -1, 1, și 2; *d)* o soluție: 9; *e)* o soluție: 3; *f)* 4 și 5. *62)* Discriminantul se poate scrie $\frac{1}{2}(m-n)^2+\frac{1}{2}(n-p)^2+\frac{1}{2}(p-m)^2$, deci nu poate fi negativ. *63)* Dacă x este soluția comună, atunci x este soluție a ecuației $(ax^2+3x+a^2+1)-(ax^2+2x+a^2+2)=0$, adică $x=1$. Dar 1 nu poate fi soluție a primei ecuații, orice valoare ar avea parametrul a. Presupunerea că ecuațiile au soluție comună este deci falsă. *64)* Dacă p este numărul participanților, numărul partidelor jucate este $\frac{p(p-1)}{2}$; 10 participanți. *65)* Lungimea celei de a n-a înfășurări este aproximativ $(3+2n\cdot 0{,}1)\pi$. Încap aproximativ 2700 înfășurări; filmul are lungimea de aproximativ 1398 m. *66)* Tăiați bucata mai întîi paralel cu o bază. Determinați la ce distanță de bază!

Pag. 122. *1) a)* 0; *b)* 1. *2)* 100. *3)* Numerele sînt pozitive. Comparăm pătratele lor cu 2^2. *4)* Al doilea este încărcat cu peste 3,5 m³ pietriș. *5)* Indicație: arătați că numerele se divid cu 3. *6)* 34 cu mînecă scurtă și 1 cu mînecă lungă; la fel, sau 35 cu mînecă scurtă. *7)* 100 numere; 50 numere; 12 numere; 20 numere. *8)* Nu există astfel de numere naturale; ele ar trebui să fie divizibile cu $16\cdot 9\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19$. *9) a)* $a=b=1$; $a=1$; $b=-1$, *c)* $a=b=1$. *10) a)* $x^2+y^2=16$ e posibil doar dacă $x=0$, $y=4$.

Rămîne $x^2 + 16 = y^2$, care se mai scrie $16 = (y - x)(y + x)$. Observați că apar doar posibilitățile $y - x = 1$, $y - x = 2$ și $y - x = 4$; *b)* 15, 16, ..., 21; *c)* Dacă $a + 1$ este primul număr, obținem că $x(2a + x - 43) = 4$, de unde $x = 1$, $x = 2$ sau $x = 4$. Cazul $x = 1$ este banal. Cazul $x = 2$ nu convine. Numerele sînt 21, 22, 23 și 24. *11)* Între $\frac{1}{3}$ și 1. *12)* Cel tîrziu la ora 9 și 49 minute. *13)* Aproximativ 47. *14)* În 6 ore și 40 minute. *15)* Plimbarea pe rîu. *16)* Nu, ci doar cu 32%. *17)* $2\pi r_1 r_2$. *18)* $f:[2; 5] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{7}{3}x - \frac{29}{3}$. *19)* Relația se scrie $\frac{(b-a)(c-b)(a-c)}{abc} = 0$. *20)* 8; 56; 3104. *21)* $(X + Y + Z)^3$. *22)* $\frac{(-1)^{n+1}(2Y-2)}{X^2 - (Y-1)^2}$. *24)* Împărțiți cu b^2; $\frac{3}{5}$ sau 2. *25)* Notăm cu x lungimea unei laturi; atunci aria va fi $x\left(\frac{p}{2} - x\right) = -x^2 + \frac{p}{2}x$; aria este maximă atunci cînd $x = \frac{p}{4}$. *26)* Numărul de diagonale al unui poligon cu n laturi este $\frac{n(n-3)}{2}$; 100 de laturi. *27)* *a)* (2; 5); *b)* (16; 25); *c)* soluții $(-2; -1)$ și $(2; -1)$. *28)* da, nu, da, nu, nu.

Pag. 124. *1)* $1 + 5 + 87 + \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{64}$. *4)* Ridicați ambii membri la puterea a treia. *5)* Da; nu. *6)* Nu este corect să simplificăm cu $a - b$! *7)* Extrăgînd radicalii, nu este corect să neglijăm modulul! *8)* 22^{22} și 9^{99}. *9)* Desfăcînd parantezele, este sumă de 16 pătrate! Cele 4 pătrate sînt $(ax - by - cz - dt)^2$, $(ay + bx + ct + dz)^2$, $(az - bt + cx + dy)^2$ și $(at + bz - cy + dx)^2$. *10)* Primul nu are soluție; al doile a și ecuația au soluția 2. *11)* Deduceți că dacă $x + y = 2$, atunci $xy \leqslant 1$. *12)* Este un pătrat. *13)* $(a + c)^2 - b^2 + (a + c)^2 - b(a + c) = (a + c + b)(a + c - b) - (a + c)(a + c - b) = (2a + b + 2c)(a - b + c)$. *15)* 250 bu. *16)* Două soluții: 16 sau 48. *17)* 10 porumbei și 20 vrăbii și alte soluții! *19)* Doar pisica nu minte. *20)* 500 km.

Pag. 126. *1)* Prima ecuație are ca soluții 1 sau 3. Pentru $a = -1$, 0, 2 sau 3. *2)* *a)* $a = 3$, $c = -9$, $c = 6$; *b)* pentru $m \neq 0$ și $m \neq 1$. *3)* Cîtul este $X + 2a$. Ecuația are o singură soluție, $-2a$. *4)* Cîtul este X, restul c. *5)* *a)* Cîtul este $2X^2 + X$, restul este 1; *b)* a treia; *c)* pentru $x = 0$ sau $x = -\frac{1}{2}$; valoarea minimă este 1. *6)* Doar primele trei! *7)* Formați o ecuație de gradul al II-lea avînd ca soluții pe x și pe y. Discriminantul ei este $\geqslant 0$. *9)* *a)* Simplificăm cu $2X^2 + 4X + 8$; *b)* pentru $x \neq -1$; *c)* pentru $x = -7$, -4, -3, -2, 0, 1, 2 și 5; *d)* pentru nici o valoare a lui x. *10)* *a)* Resturile sînt 0; *b)* $\frac{X^2 - 2X + 4}{X - 4}$. *11)* Anulați restul împărțirii. Rezultă $a = b = c = d = 1$, pătratul fiind $(X^2 + 2X + 1)^2$. *12)* $a = 4$, $b = -12$, $c = 5$; rădăcinile sînt $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ și $\frac{5}{2}$. *13)* $3(X + Y)(X + Z)(Y + Z)$. *14)* *a)* Restul este $a + b + c$; *b)* $(P + Q - 2R)(1) = P(1) + Q(1) - 2R(1) = 0$; *c)* $P(-1) + Q(-1) + R(-1) = (a +$

$+ b + c)[(-1)^m + (-1)^n + (-1)^p] \neq 0$. *15) a)* Soluții $\frac{1}{3}$ și $\frac{13}{9}$, *b)* dacă $a \neq 0$, o soluție, anume $-1 - \frac{a}{b}$. *16)* Soluții 0 și 10. *17) b)* $\frac{X^2 - X - 2}{X^2 + 4}$. *18)* Doar punctele (0; 0) și (1; 1). *19)* $\frac{2X - 1}{X - 1}$. *20)* Scriind că discriminantul ecuației este 0, obținem $m^2 - 4m + 4 = 0$, de unde $m = 2$. *22)* Soluție (10; 6). *23)* Nu are soluții *24) a)* Pentru $a = 1$ sau $a = -9$; *b)* pentru $x = -3$. *25) a)* $f(x) = 2x$, $g(x) = -2x + 8$; *b)* punctul (2; 4). *26)* $P(Q(X)) = (X^2 + 3X + 2)^2 - 3(X^2 + 3X + 2) + 2$; cîtul este $X^2 + 3X$. *27)* $m = -3$, $n = 27$, $p = -18$; rădăcinile polinomului sînt 1, 2, 3 și -3. *28)* 60 m, 60 m și 40 m. *29)* $m = \frac{25}{8}$. *30)* $a^2 = \frac{(b+1)^2}{b}$.

Pag. 131. 1) Greșeli sînt: a) apariția virgulei (reamintim că în scrierea fracțiilor zecimale se folosește punctul, nu virgula); b) = 2 (putem tipări valoarea unei variabile, dar nu relația X = 2); c) A + 0 (după IF trebuie să urmeze o condiție, ce poate fi adevărată sau falsă); d) după LET trebuie să urmeze numele unei variabile, nu o constantă sau altceva.

2) a) 36; b) 25.

3) 30 LET C = A | 40 LET A = 0.

4) a) Programul determină și afișează ultima cifră (cifra unităților) a numărului introdus N; b) programul determină și afișează modulul numărului N.

Pag. 134. 1) a) cifra 8; b) cifra 1 (numărul 21 este afișat pe linia 8, coloanele 11 și 12); c) cifra 6 din numărul 961.

2) 110 PRINT AT 3, 5; A | 120 PRINT AT 3, 8; 8 | 130 PRINT AT 3, 12; C

3) 40 DRAW 25, — 15

4) PLOT 100, 100 | DRAW 80, 0 | DRAW 0, 60 | DRAW — 80, 0 | DRAW 0, — 60
Al patrulea vîrf are coordonatele (100, 160).

5) Dreptunghiul are lungimea de 25 și înălțimea de 28. Întrucît din punctul (X, Y) ne deplasăm în punctul (X + 25, Y), apoi în (X + 25, Y — 28), iar aceste puncte sînt pe ecran, va trebui ca $0 \leqslant X$, $X + 25 \leqslant 255$ și $0 \leqslant Y$, $Y - 28 \leqslant 175$. Așadar X, Y sînt numere întregi și $0 \leqslant X \leqslant 230$, $28 \leqslant Y \leqslant 175$.

Pag. 136. 1) a) Evident, SAVE "PROGRAM", dat banda magnetică înapoi, LOAD "PROGRAM" și RUN. b) Adăugăm 80 LET M = S/N | 100 PRINT "MEDIA ESTE"; M. Atenție! Programul ar trebui completat cu o instrucțiune care să nu permită introducerea unui număr N negativ sau zero! Aceasta ar putea fi 15 IF N<=0 THEN GOTO 10.

2) a) Un semn de întrebare, întrucît se „așteaptă" introducerea valorii lui A; b) P = 10; c) P = 55, apoi P = 210.

3) a) Rezultatele sînt S = 10, S = 55, S = 210. b) Programele DOI și TREI au același efect. Încercați să explicați de ce.

4) a) Apare desenat un model, însă programul nu se oprește! b) Se termină după 20 de etape dacă-l completăm cu instrucțiunile:

15 LET I = 0 | 155 LET I = I + 1 | 160 IF I < 20 THEN GOTO 50 | 165 STOP

Pag. 139. 1) a) 30 IF A > = ...; b) 10 INPUT "INTROD. NUMERELE"; A, B
50 PRINT "CEL MAI MARE DINTRE ELE ESTE"; X

2) și 3) Folosiți REZSIS ca subprogram.

Pag. 141. 2) Folosiți FOR C = 11 TO 99; 3) LET S = 0 | FOR C = 1 TO 30 | LET S = S + C * C * C | NEXT C | PRINT S

TABELUL RĂDĂCINILOR PĂTRATE ȘI CUBICE ALE NUMERELOR NATURALE MAI MICI DECÎT 100

n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
1	1,0000	1,0000	51	7,1414	3,7084
2	1,4142	1,2599	52	7,2111	3,7325
3	1,7321	1,4422	53	7,2801	3,7563
4	2,0000	1,5874	54	7,3485	3,7798
5	2,2361	1,7100	55	7,4162	3,8030
6	2,4495	1,8171	56	7,4833	3,8259
7	2,6458	1,9129	57	7,5498	3,8485
8	2,8284	2,0000	58	7,6158	3,8709
9	3,0000	2,0801	59	7,6811	3,8930
10	3,1623	2,1544	60	7,7460	3,9149
11	3,3166	2,2240	61	7,8102	3,9365
12	3,4641	2,2894	62	7,8740	3,9579
13	3,6056	2,3513	63	7,9373	3,9791
14	3,7417	2,4101	64	8,0000	4,0000
15	3,8730	2,4662	65	8,0623	4,0207
16	4,0000	2,5198	66	8,1240	4,0412
17	4,1231	2,5713	67	8,1854	4,0615
18	4,2426	2,6207	68	8,2462	4,0817
19	4,3589	2,6684	69	8,3066	4,1016
20	4,4721	2,7144	70	8,3666	4,1213
21	4,5826	2,7589	71	8,4261	4,1408
22	4,6904	2,8020	72	8,4853	4,1602
23	4,7958	2,8439	73	8,5440	4,1793
24	4,8990	2,8845	74	8,6023	4,1983
25	5,0000	2,9240	75	8,6603	4,2172
26	5,0990	2,9625	76	8,7178	4,2358
27	5,1962	3,0000	77	8,7750	4,2543
28	5,2915	3,0366	78	8,8318	4,2727
29	5,3852	3,0723	79	8,8882	4,2908
30	5,4772	3,1072	80	8,9443	4,3089

n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
31	5,5678	3,1414	81	9,0000	4,3267
32	5,6569	3,1748	82	9,0554	4,3445
33	5,7446	3,2075	83	9,1104	4,3621
34	5,8310	3,2396	84	9,1652	4,3795
35	5,9161	3,2711	85	9,2195	4,3968
36	6,0000	3,3019	86	9,2736	4,4140
37	6,0828	3,3322	87	9,3274	4,4310
38	6,1644	3,3620	88	9,3808	4,4480
39	6,2450	3,3912	89	9,4340	4,4647
40	6,3246	3,4200	90	9,4868	4,4814
41	6,4031	3,4482	91	9,5394	4,4979
42	6,4807	3,4760	92	9,5917	4,5144
43	6,5574	3,5034	93	9,6437	4,5307
44	6,6332	3,5303	94	9,6954	4,5468
45	6,7082	3,5569	95	9,7468	4,5629
46	6,7823	3,5830	96	9,7980	4,5789
47	6,8557	3,6088	97	9,8489	4,5947
48	6,9282	3,6342	98	9,8995	4,6104
49	7,0000	3,6593	99	9,9499	4,6261
50	7,0711	3,6840	100	10,0000	4,6416

CUPRINS

Cap. IV Ecuații de gradul al doilea

Cap. V Exerciții și probleme

Cap. VI Cunoștințe pregătitoare pentru folosirea tehnicii de calcul

Lei 11

ISBN 973-30-0654-8