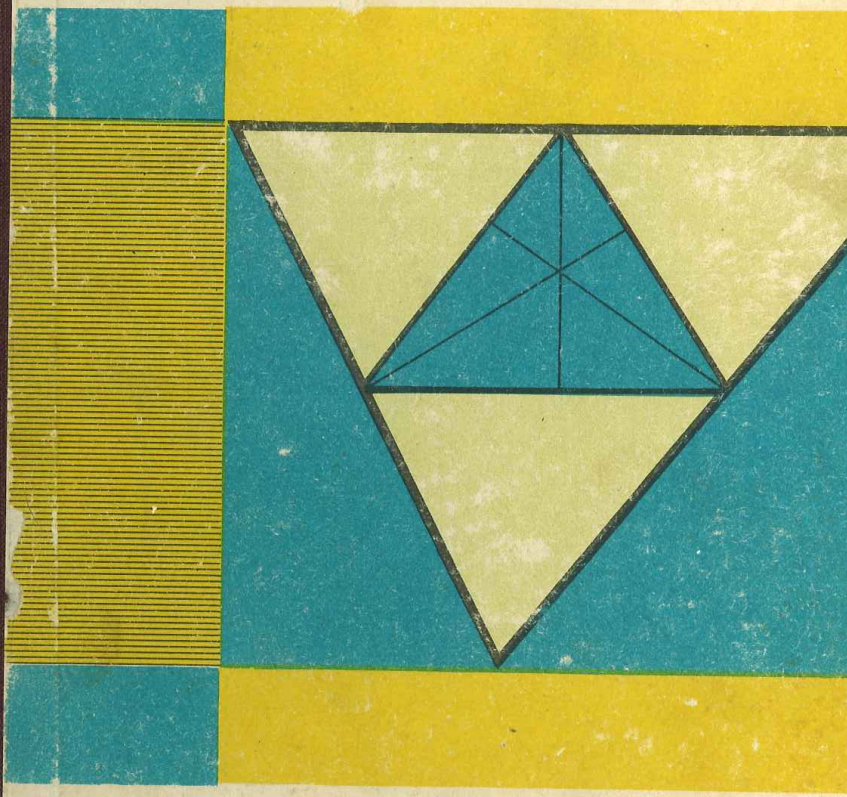
Augustin Coța
Mariana Răduțiu
Marta Radó
Florica Vornices

IX

Matematică

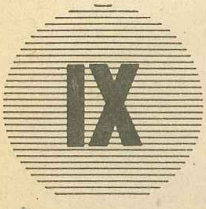
Geometrie și trigonometrie

Manual pentru clasa a IX-a



Editura didactică și pedagogică, București

Augustin Coţa
Mariana Răduţiu
Marta Radó
Florica Vornicescu



Matematică

Manual pentru clasa a IX-a

Geometrie şi trigonometrie

Editura didactică şi pedagogică
Bucureşti

Manualul a fost elaborat în anul 1981 pe baza programei şcolare aprobate de Ministerul Educaţiei şi Învăţămîntului cu nr. 39438/1980.

Referenţi: Prof. univ. **Gheorghe Galbură**
Prof. univ. **Dan Papuc**
Prof. **Ioan Maftei**
Prof. **Liliana Niculescu**
Prof. **Marcel Ţena**
Prof. **Viorel Zaharia**

La definitivarea manualului s-a ţinut seamă şi de propunerile unor colective de cadre didactice din oraşele Alexandria, Craiova şi Timişoara, care au analizat proiectul de manual.

Redactor: Prof. **Valentin Radu**
Tehnoredactor: **Ilinca Prosan**
Coperta: **Nicolae Sîrbu**

Prefață

În multe țări, printre care și în țara noastră, s-a trecut la predarea axiomatică a geometriei în liceu.

Se pune întrebarea: ce fel de axiome să stea la baza manualului de Geometrie pentru clasa a IX-a?

Ținînd seama de dificultățile conceptuale și tehnice legate de axiomatica lui Hilbert, s-au propus și s-au pus în aplicare, în diferite țări, variate sisteme de axiome, mai accesibile pentru elevi. Avem la dispoziție, în limba română: traducerile manualelor Alef zero, care prezintă de fapt un model algebric al geometriei (definind succesiv structurile vectoriale, afine și metrice) și care au la baza lor axiomaticile lui H. Weyl respectiv J. Dieudonné; traducerea din limba rusă a manualului de geometrie pentru clasele VI—VIII, redactat de un colectiv condus de academicianul A.N. Kolmogorov; traducerea din limba engleză a cărții lui E. Moise „Geometrie elementară dintr-un punct de vedere superior", în care se expune într-o formă modificată sistemul de axiome propus de G.D. Birkhoff (în 1932) și care stă la baza noilor manuale de geometrie în S.U.A. Menționăm că se folosesc și sisteme de axiome care modelează grupul generat de simetriile axiale plane, de exemplu cel al lui G. Pickert. În axiomatica lui Kolmogorov simetriile axiale ocupă de asemenea un loc central.

Dintre toate acestea am adoptat axiomele lui G.D. Birkhoff în varianta lui E. Moise cu mici modificări, criteriile noastre fiind următoarele:

a) menținerea unui paralelism între nivelul abstract și cel concret al gîndirii;

b) reflectarea și posibilitatea interpretării cunoștințelor cît mai direct în realitatea fizică;

c) asigurarea unui grad sporit de accesibilitate;

d) posibilitatea participării active a elevilor la lecții;

e) integrarea cunoștințelor de geometrie în ansamblul învățămîntului matematic;

f) valorificarea tradițiilor învățămîntului de geometrie din țara noastră.

La redactarea manualului ne-am bazat pe unele cunoștințe de logică matematică, mulțimi, funcții, numere reale pe care elevii le au din clasele anterioare sau le obțin în primele lecții de la cursul de algebră.

Simplificarea realizată prin axiomatica lui Birkhoff, ca dealtfel și prin aceea a lui Kolmogorov, rezidă în acceptarea distanței printre noțiunile fundamentale ale geometriei și în atragerea în acest mod a numerelor reale în tratarea geometriei.

Menționăm că în acest mod geometria unidimensională va fi algebrizată, tratarea aspectelor bidimensionale rămînînd sintetică, apropiată de cea tradițională. Capitolul cu privire la puținele elemente de geometrie analitică se leagă organic de tratarea sintetică prin punerea în prim plan a teoremei directe și reciproce a lui Pitagora.

Este clar că pentru începători problema independenței axiomelor se situează pe un ultim plan. Totuși menționăm că axiomele noastre sînt independente, ceea ce nu înseamnă însă că nu pot fi înlocuite cu axiome mai slabe. Din axioma riglei, ultima parte poate fi eliminată, axioma de separare a planului poate fi înlocuită cu axioma lui Pasch, iar axioma L.U.L. poate fi restrînsă la formularea lui Hilbert, dar nu fără a cauza unele complicații tehnice. Măsura unghiurilor poate fi scoasă dintre noțiunile fundamentale și atunci axioma U.3. devine superfluă, dar acest lucru creează dificultăți mai mari.

Credem că este un avantaj că noțiunile delicate de „a fi între" și „congruență" au primit definiții directe, proprietățile de ordonare devenind exerciții cu module. De asemenea, s-au eliminat dificultățile legate de aspectul dublu al proprietăților de continuitate (pe dreaptă și în **R**).

Cu privire la capitolul IV dorim să observăm că instrumentul principal este formula distanței între două puncte. Din această formulă decurge imediat condiția de perpendicularitate, iar de aici ecuația dreptei. Cu aceleași mijloace stabilim formula $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ pentru orice $a, b \in \mathbf{R}$, fără a fi necesar să se deosebească mai multe cazuri.

În legătură cu folosirea materialelor bibliografice tradiționale trebuie să arătăm că în geometrie avem proprietăți de: incidență (coliniarități și concurențe), congruență, paralelism și ordonare (poziția unui punct pe un segment, pe o semidreaptă, într-un semiplan sau a unei semidrepte în interiorul unui unghi etc.); soluția tradițională a unei probleme mai complexe constă în rezolvarea riguroasă a aspectelor de incidență, congruență și paralelism și admiterea unor situații de ordonare pe bază intuitivă. De regulă, o asemenea soluție poate fi completată (uneori cu ușurință, alteori mai greu, eventual cu analiza mai multor cazuri posibile). Dacă s-a atins un anumit nivel de pregătire și elevul a înțeles legătura dintre intuiție și deducție, și soluția tradițională poate fi acceptată (sub rezerva posibilității de completare).

De aceste considerații se leagă și o observație cu privire la rezolvarea problemelor de geometrie cu un grad de dificultate mai ridicat. După ce problema a fost abordată la nivel concret, în mod intuitiv, pe baza desenului, soluția întrezărită va fi controlată în mod riguros mai întîi sub aspectul proprietăților de incidență, congruență și paralelism (deci în mod tradițional) și abia după aceea în privința ordonărilor. Într-o ultimă fază rezolvarea se redactează la nivel abstract. Acest procedeu se motivează prin faptul că momentul decisiv în găsirea soluției este cel tradițional, în timp ce aspectele de ordonare sînt mai tehnice.

Părțile din text însemnate cu o linie laterală nu sînt obligatorii.

Se recomandă rezolvarea tuturor exercițiilor însemnate cu ◇, deoarece ele vor fi folosite în demonstrațiile ulterioare. Menționăm că prin aceasta nu se schimbă între ele rolul teoremelor cu cel al exercițiilor. Într-adevăr, teoremele trebuie să fie reținute întocmai, chiar dacă demonstrațiile sînt facultative, căci problemele nu pot fi abordate cu succes decît pe temeiul cunoașterii sigure a teoremelor, în timp ce problemele însemnate cu ◇ au rolul unor teoreme ajutătoare, care nu trebuie memorate. La problemele cu ◇◇ se fac trimiteri repetate.

Problemele cu asterisc sînt mai pretențioase și se adresează elevilor cu un interes sporit pentru matematică. Unele dintre exercițiile și problemele din manual au fost preluate din alte manuale, culegeri de probleme și Gazeta matematică, fără a mai indica sursa.

Ne face o deosebită plăcere să mulțumim profesorului universitar Radó Francisc pentru sprijinul acordat și sugestiile sale la elaborarea acestui manual.

Mulțumim de asemenea colectivelor de cadre didactice din Timișoara, Alexandria, Craiova, Constanța, Galați, referenților și colegilor pentru observațiile făcute, care ne-au fost de un real folos în definitivarea acestui manual.

Autorii

Capitolul I

Incidenţă, ordonare, congruenţă

§ 1. Studiul axiomatic al geometriei

Cunoştinţele de geometrie le obţinem în două moduri: *intuitiv* şi *deductiv*. Cunoştinţele intuitive sînt extrase din observaţii şi experienţe. Din anumite cunoştinţe geometrice putem deduce cu ajutorul logicii alte cunoştinţe; acestea din urmă sînt obţinute pe cale deductivă, prin *demonstraţie*, fără a se recurge la intuiţie.

În tratarea modernă a geometriei se caută a se prezenta cît mai multe proprietăţi pe cale deductivă. Bineînţeles, cunoştinţele intuitive nu pot fi eliminate complet, căci geometria prin ele se ancorează în lumea reală, obiectivă. Pe de altă parte noi trebuie să avem la dispoziţie de la început o colecţie de proprietăţi geometrice, din care apoi să putem deduce altele. Această colecţie se limitează la un minim de propoziţii, care se numesc *axiome*. Axiomele sînt admise fără demonstraţie şi reprezintă punctul de plecare în tratarea geometriei.

În axiome şi în consecinţele lor intervin noţiuni de logică şi de teoria mulţimilor şi noţiunea de număr real, pe care le presupunem cunoscute. Afară de acestea, în axiome apar cîteva noţiuni specifice geometriei, numite *noţiuni geometrice fundamentale*. Aceste noţiuni, extrase din lumea obiectivă, nu primesc în geometrie o definiţie directă, însuşi sistemul de axiome constituind definiţia lor. Celelalte noţiuni geometrice sînt introduse cu ajutorul noţiunilor fundamentale prin definiţii directe. Proprietăţile geometrice demonstrate cu ajutorul axiomelor şi definiţiilor se numesc *teoreme* (cele de importanţă mai mică sau care pregătesc alte teoreme se mai numesc *leme* sau *propoziţii*).

Aşadar, la baza unui studiu modern al geometriei stau noţiunile fundamentale şi axiomele care exprimă proprietăţi ale acestor noţiuni. Există diverse posibilităţi de a alege din multitudinea de noţiuni şi proprietăţi geometrice noţiunile fundamentale şi axiomele. Noi vom considera următoarele noţiuni fundamentale: *punct*, *dreaptă*, *plan*, *distanţă* şi *măsura unghiurilor**.

* În axiomatica lui Hilbert noţiunile fundamentale sînt: punctul, dreapta, planul, incidenţa, relaţia „între" şi congruenţa.

În acest manual vom studia *geometria în plan* în care se consideră existența unui singur plan. Axiomele acestei geometrii le grupăm în axiome de incidență, axioma riglei, axioma de separare a planului, axiomele unghiului, axioma de congruență și axioma paralelelor. Treptat, după ce vom introduce cîte o axiomă, vom defini imediat unele noțiuni și vom demonstra un număr de teoreme. Se recomandă să reținem care dintre teoreme se bazează numai pe o parte dintre axiome, căci astfel vom înțelege mai profund legătura logică dintre proprietățile geometrice și ne vom însuși esența metodei axiomatice în matematică.

Prima prezentare axiomatică a geometriei a fost dată de Euclid (365—300 î.e.n.), care a servit ca model pentru cărțile de geometrie pînă la sfîrșitul secolului trecut. Axiomatica lui Euclid nu este perfectă; în axiome nu se vorbește de pildă despre proprietăți de ordonare și din această cauză în demonstrații se face uz de intuiție în mod tacit. Primul sistem axiomatic complet al geometriei a fost dat de D. Hilbert în 1899. În acest manual, așa cum am arătat și în prefață, se pleacă de la axiomele lui G.D. Birkhoff*, într-o formă ușor modificată.

În țara noastră geometria a stat în atenția multor savanți iluștri, care pe lîngă cercetările lor originale au realizat și valoroase lucrări didactice, impulsionînd învățămîntul geometric românesc. Dintre ei amintim pe Gheorghe Țițeica (1873—1939), Alexandru Myller (1879—1965), Gheorghe Vrănceanu (1900—1979), care au întemeiat o renumită școală de geometrie diferențială, pe Traian Lalescu (1882—1929), Dimitrie Pompeiu (1873—1954), care odată cu cercetările lor de analiză matematică au adus o remarcabilă contribuție și în geometrie. Cu studii de axiomatica geometriei s-a preocupat renumitul algebrist Dan Barbilian (1895—1961), cunoscut și ca poet sub pseudonimul Ion Barbu. Gazeta Matematică (înființată în 1895) antrenează și stimulează tineretul în studiul geometriei.

§ 2. Axiomele de incidență ale geometriei în plan

Primul grup de axiome se enunță astfel:

I.1. Planul este o mulțime de puncte, pe care o notăm cu $\mathcal{P}$.

I.2. Orice dreaptă este o submulțime a lui $\mathcal{P}$.

I.3. Orice dreaptă conține cel puțin două puncte. În plan există trei puncte care nu sînt situate pe aceeași dreaptă.

I.4. Prin două puncte distincte trece o dreaptă și numai una.

Dacă A este un punct și d o dreaptă, relația $A \in d$ se citește astfel: punctul A *aparține* dreptei d sau A este *situat* pe d sau d *conține* pe A sau d *trece* prin A sau punctul A și dreapta d sînt *incidente*. Punctele A, B, C se zic *coliniare*, dacă există o dreaptă d astfel ca $A \in d$, $B \in d$, $C \in d$.

Fie A și B două puncte diferite. Potrivit axiomei I.4 există o singură dreaptă d astfel încît $A \in d$ și $B \in d$; această dreaptă d va fi notată cu AB.

Teoremă. Două drepte diferite au cel mult un punct comun.

Demonstrație. Să presupunem că teorema nu este adevărată. Atunci există două drepte d_1, d_2 și două puncte P, Q astfel încît $d_1 \neq d_2$, $P \neq Q$,

* George David Birkhoff (1884—1944) matematician american.

$P, Q \in d_1$, $P, Q \in d_2$. Conform axiomei I.4 $d_1 = PQ$, $d_2 = PQ$, deci $d_1 = d_2$, în contradicţie cu $d_1 \neq d_2$. Aşadar presupunerea noastră ne-a condus la o contradicţie. Rezultă că teorema este adevărată.

Observaţie. Metoda folosită în această demonstraţie se numeşte *metoda reducerii la absurd.* Ea constă în a arăta că negarea concluziei teoremei conduce la o contradicţie.

Exerciţii

1. Oricare ar fi dreapta d, putem găsi în planul $\mathcal{P}$ un punct nesituat pe d.

Rezolvare. Presupunînd contrariul, toate punctele planului sînt situate pe dreapta d, ceea ce este în contradicţie cu axioma **I.3.**

2. Dacă A, B, C sînt trei puncte necoliniare, dreptele AB, BC, CA sînt distincte două cîte două.

3. Presupunînd că există în $\mathcal{P}$ punctele A, B, C, D dintre care nu avem trei coliniare, să se arate că dreptele AB, AC, AD, BC, BD, CD sînt distincte două cîte două.

4*. Să presupunem că A, B, C, D, E sînt cinci puncte diferite, A, B, C sînt coliniare şi $D, E \notin AB$. Dintre dreptele AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE cîte pot fi distincte cel mult? Arătaţi o situaţie în care avem mai puţine drepte distincte.

5*. Pot exista 5 puncte în $\mathcal{P}$ astfel încît unite două cîte două, să obţinem exact 7 drepte distincte?

§ 3. Distanţa şi axioma riglei

Ştim din experienţă că fixînd o „unitate de măsură" (un „segment etalon") şi folosind procedeul de măsurare, fiecărei perechi de puncte putem face să-i corespundă un număr real (nenegativ) unic, „distanţa între cele două puncte".

În tratarea noastră, *distanţa este o noţiune fundamentală.* Admitem deci că oricare ar fi punctele $A, B \in \mathcal{P}$ există un număr real unic, notat cu $\| AB \|$ sau d (A, B), care se numeşte *distanţa între A şi B.*

Pentru două puncte oarecare A şi B, distanţa $\| AB \|$ este un număr real unic.

Observaţie. În aplicaţiile practice se folosesc mai multe unităţi de măsură, de exemplu 1 m, 1 km, 1 cm etc.; în aceste cazuri trebuie să se indice unitatea respectivă. Spre deosebire de această situaţie, la noi distanţa este un număr real. De exemplu $d(A, B) = \| AB \| = 5$ şi nu 5 cm.

Noţiunea fundamentală este de fapt o funcţie $\delta : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathbf{R}$, numită *funcţie-distanţă.* Într-adevăr, ştim că un element oarecare al produsului cartesian $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$ este o pereche de puncte (A, B) şi deoarece acesteia îi corespunde numărul real $\| AB \|$ determinat în mod unic, avem o funcţie definită pe mulţimea $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$ cu valori în $\mathbf{R}$.

În clasa a VII-a s-a învăţat despre reprezentarea numerelor reale pe o dreaptă, ceea ce permite să definim o funcţie bijectivă f între mulţimea punctelor unei drepte d şi mulţimea numerelor reale $\mathbf{R}$. Intuitiv, punem în evidenţă această funcţie însemnînd unele puncte de pe dreapta d şi scriind sub ele numerele care le corespund, de exemplu punctului A îi corespunde 2, punctului

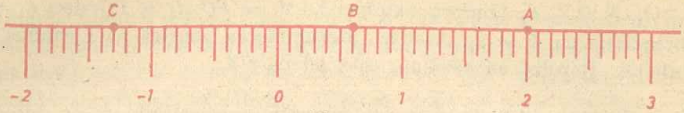


Fig. I.1

B 0,6, punctului C $-1,3$ (fig. I.1). În acest fel dreapta d apare ca o „riglă gradată infinită". Cu ajutorul ei putem cunoaşte distanţa dintre două puncte situate pe dreapta d. Pe figura I.1 avem $\| AB \| = \| BA \| = 1,4$, $\| AC \| = \| CA \| = 3,3$, $\| BC \| = \| CB \| = 1,9$. Observaţi că distanţele sînt pozitive, în timp ce gradaţiile (valorile funcţiei f) pot fi pozitive sau negative.

Prin axioma următoare admitem existenţa şi precizăm proprietăţile acestei funcţii f.

R. (Axioma riglei.) — Fie d o dreaptă oarecare şi A, $B \in d$ două puncte distincte. Fiecărui punct $M \in d$ îi putem face să-i corespundă un număr real unic x_M astfel încît să fie satisfăcute următoarele condiţii:

1) Pentru fiecare număr real a există un singur punct $P \in d$ cu $x_P = a$.

2) $x_A = 0$, $x_B > 0$.

3) Oricare ar fi punctele P, $Q \in d$, avem

$$\| PQ \| = | x_Q - x_P |. \tag{1}$$

Prin această axiomă se mai precizează că **funcţia $f : d \to \mathbf{R}$, definită prin $f(M) = x_M$, este determinată în mod unic de condiţiile** 1), 2) şi 3).

Definiţie. Funcţia $f : d \to \mathbf{R}$ se numeşte *sistem de coordonate pentru dreapta d* (sau *pe dreapta d*), punctul *A originea* lui, iar numărul x_M *abscisa* sau *coordonata* punctului M (în sistemul de coordonate considerat).

Observaţii. Condiţia 1) arată că funcţia $f : d \to \mathbf{R}$ este bijectivă.

Condiţia 2) arată că oricum s-ar da două puncte M şi N pe o dreaptă d, există un sistem de coordonate pentru care abscisa lui M este 0, iar abscisa lui N este pozitivă (M reprezintă originea sistemului de coordonate, iar rolul lui N este de a preciza un sens de parcurgere pe dreaptă) (fig. I.2,*a* şi *b*). Dacă s-ar permite şi modificarea „unităţii de măsură" am putea

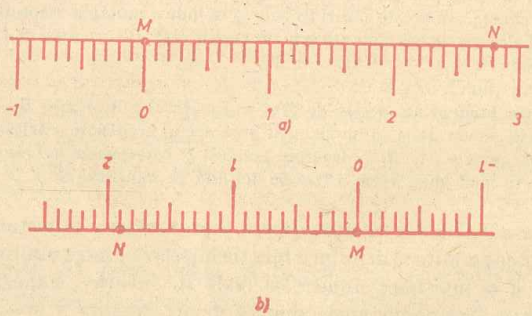


Fig. I.2

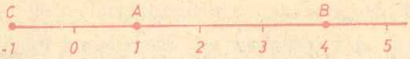


Fig. I.3.

asocia punctului dat N abscisa 1, lucru care în teoria noastră nu este posibil, deoarece — precum s-a precizat — funcţia distanţă este fixată.

Condiţia 3) indică o legătură între distanţe şi abscise. Dacă cunoaştem abscisele a două puncte, putem calcula distanţa dintre ele cu ajutorul formulei (1). De exemplu, în cazul figurii I.3 $x_A = 1$, $x_B = 4$ şi $\| AB \| = 3 = | x_B - x_A |$; sau $x_A = 1$, $x_C = -1$ şi $\| AC \| = 2 = | x_C - x_A | = | -1 - 1 | = | -2 |$.

Teoremă. Oricare ar fi punctele P şi Q, au loc următoarele proprietăţi:

(2) $$\| PQ \| \geqslant 0,$$

(3) $$\| PQ \| = 0 \Leftrightarrow P = Q,$$

(4) $$\| PQ \| = \| QP \|.$$

Oricare ar fi punctele P, Q, R pe o dreaptă d, avem

(5) $$\| PR \| \leqslant \| PQ \| + \| QR \|.$$

Demonstraţie. Fie d o dreaptă ce conţine punctele date P şi Q. Conform axiomei riglei există un sistem de coordonate pe d şi avem

$$\| PQ \| = | x_Q - x_P | \geqslant 0;$$

$$\| PQ \| = | x_Q - x_P | = | x_P - x_Q | = \| QP \|;$$

$$\| PQ \| = 0 \Leftrightarrow | x_Q - x_P | = 0 \Leftrightarrow x_P = x_Q \Leftrightarrow P = Q,$$

ultima echivalenţă rezultînd din condiţia 1) (sau altfel spus din faptul că funcţia $f : d \to \mathbf{R}$, $f(M) = x_M$ este injectivă). În cazul $R \in d$ putem scrie

$$\| PR \| = | x_R - x_P | = | (x_R - x_Q) + (x_Q - x_P) | \leqslant$$

$$\leqslant | x_R - x_Q | + | x_Q - x_P | = \| QR \| + \| PQ \|.$$

Observaţie. Deoarece la baza noţiunii de distanţă stă procedeul de măsurare, s-ar părea că ar fi fost mai natural să definim distanţa ca un număr pozitiv, şi nu ca un număr real. Atragem din nou atenţia asupra faptului că în axiome postulăm cît se poate de puţin; presupunînd numai $\| PQ \| \in \mathbf{R}$, din teoremă rezultă $\| PQ \| \geqslant 0$.

Exerciţii

1. Fie $\| AB \| = 4$. Există un sistem de coordonate pe AB cu $x_A = 5$, $x_B = 8$?

2. $x_A = -2$, $x_B = 3$, $x_C = 10$. Să se afle $\| AB \|$, $\| AC \|$ şi $\| BC \|$.

3. Într-un sistem de coordonate pe dreapta AB, $x_A = 3$, $\| AB \| = 5$, $x_B < 0$. a) Să se afle x_B. b) Să se determine x_C ştiind că $C \in AB$, $\| BC \| = 7$ şi $\| AC \| < \| BC \|$.

4*. $x_A = -2$, $x_B = 5$; să se determine punctele M, $N \in AB$, ştiind că $\| AM \| = 4$, $\| MN \| = 1$, $\| NB \| = 2$.

5*. $x_A = 1$, $x_B = 4$. Să se afle M, $N \in AB$, ştiind că $\| AM \| = 1$, $\| MN \| = 4$, $\| NB \| = 2$.

§ 4. Segmente, semidrepte şi unghiuri

Intuitiv, pe figura I.4 punctul M este „între A şi B". Dăm definiţia acestei noţiuni.

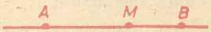


Fig. I.4.

Definiţii. Fie A şi B puncte diferite. Zicem că punctul M *este între* A şi B (sau M *separă* punctele A şi B) dacă

(1) $$A,\ M,\ B \text{ sînt puncte coliniare diferite}$$

şi

(2) $$\| AM \| + \| MB \| = \| AB \|.$$

Prin *segmentul deschis* $| AB |$ înţelegem mulţimea punctelor între A şi B, iar *segmentul închis* $[AB]$ este mulţimea $| AB | \cup \{A, B\}$.

Aşadar

(3) $$[AB] = \{M \in AB \mid \| AM \| + \| MB \| = \| AB \|\},$$

(4) $$| AB | = [AB] - \{A, B\}.$$

Notaţiile $| AB |$ şi $[AB]$ pot fi folosite şi în cazul $A = B$, dar atunci nu înseamnă segmente: $| AA | = \emptyset$, $[AA] = \{A\}$.

Prin *lungimea* segmentului $[AB]$ se înţelege distanţa $\| AB \|$.

Exerciţii

1. Arătaţi că egalitatea (2) este satisfăcută dacă $M = A$ şi dacă $M = B$.

◇2. Demonstraţi: dacă C este între A şi B, atunci C este şi între B şi A.

Indicaţie. Se admit condiţiile (1) şi (2). Trebuie să demonstrăm (1) şi (2) cu literele A şi B schimbate între ele. Se ţine seama de formula (4) de la § 3.

◇3. Să se arate că $[AB] = [BA]$.

4. Fie $C \in AB$, $x_A = 2$, $x_B = 10$, $x_C = 4$. B este între A şi C? dar C între A şi B? dar A între A şi B?

Indicaţie. Deoarece $\| AB \| = | x_B - x_A | = 8$, $\| BC \| = | 4 - 10 | = 6$ şi $\| AC \| = | 4 - 2 | = 2$, condiţia (2) nu este satisfăcută, deci B nu este între A şi C. C este între A şi B. Punctul A nu este între A şi B, căci condiţia (1) nu este satisfăcută.

Segmentele pot fi caracterizate cu ajutorul absciselor:

Teorema 1. Oricare ar fi sistemul de coordonate pe dreapta AB, dacă $x_A < x_B$, avem

(5) $$[AB] = \{M \in AB \mid x_A \leqslant x_M \leqslant x_B\},$$

(6) $$| AB | = \{M \in AB \mid x_A < x_M < x_B\},$$

iar dacă $x_A > x_B$

(7) $$[AB] = \{M \in AB \mid x_B \leqslant x_M \leqslant x_A\},$$

(8) $$| AB | = \{M \in AB \mid x_B < x_M < x_A\}.$$

Demonstrație. Fie $x_A < x_B$. Deoarece (5) este o egalitate între două mulțimi, va trebui să luăm un element din membrul I și să arătăm că el aparține și membrului II, și invers.

Fie $P \in [AB]$. Ținînd cont de (2) avem $\| AP \| + \| PB \| = \| AB \|$, prin urmare

$$|x_P - x_A| + |x_B - x_P| = x_B - x_A. \tag{9}$$

(căci $x_B > x_A$). Considerăm următoarele cazuri:

a) $x_P < x_A$; atunci din $x_A < x_B$ deducem $x_P < x_B$ și egalitatea (9) devine

$$x_A - x_P + x_B - x_P = x_B - x_A.$$

Reducînd termenii asemenea, obținem $2x_A = 2x_P$, deci $x_A = x_P$, în contradicție cu $x_P > x_A$. Așadar, acest caz nu este posibil.

b) $x_P > x_B$; acum relația (9) se scrie

$$x_P - x_A + x_P - x_B = x_B - x_A$$

sau $x_P = x_B$. Nici acest caz nu este posibil.

Rezultă că $x_A \leqslant x_P \leqslant x_B$, deci $P \in \{M \in AB \mid x_A \leqslant x_M \leqslant x_B\}$.

Fie acum M un punct din membrul II al egalității (5). Atunci $M \in AB$ și

$$x_A \leqslant x_M \leqslant x_B. \tag{10}$$

Din (10) rezultă $x_M - x_A \geqslant 0$ și $x_B - x_M \geqslant 0$, deci

$$\| AM \| + \| MB \| = | x_M - x_A | + | x_B - x_M | = x_M - x_A + x_B - x_M =$$
$$= x_B - x_A = | x_B - x_A | = \| AB \|.$$

Prin urmare $M \in [AB]$.

Ținînd seama de (4), formula (6) rezultă imediat din (5). Formulele (7) și (8) se obțin din (5) și (6) observînd că $[AB] = [BA]$ și $| AB | = | BA |$.

Corolar. Punctul $M \in AB$ este între A și B dacă și numai dacă

$$x_A < x_M < x_B \text{ sau } x_B < x_M < x_A. \tag{11}$$

Exerciții

5. Care dintre următoarele relații sînt adevărate, dacă punctele A, B, C au abscisele 8, 2, 7:

$$A \in [BC],\ B \in | AC |,\ C \in | AB |,\ C \in [AB]?$$

6. Punctele coliniare A, B, C au abscisele 6, -3, -2. Unul dintre punctele A, B, C este situat între celelalte două?

Afirmațiile teoremei următoare, numite *proprietăți de ordonare* ale punctelor pe o dreaptă, sînt evidente sub aspect intuitiv. Totuși trebuie să le demonstrăm, deoarece numai axiomele sînt admise fără demonstrație.

Teorema 2. Au loc următoarele proprietăţi:

1) Dacă A, B, C sînt trei puncte diferite pe o dreaptă, atunci unul dintre ele este situat între celelalte două.

2) Dacă B este între A şi C, atunci A nu este între B şi C şi nici C între A şi B.

3) Dacă A şi B sînt puncte diferite, există un punct C între A şi B (segmentul $|AB|$ nu este vid) **şi există un punct D astfel ca B să fie între A şi D** (există pe AB „puncte exterioare" lui $[AB]$).

4) Dacă punctul O separă punctele A şi B şi punctele B şi C, atunci O nu separă A şi C.

5) Dacă punctul O separă punctele A şi B, dar nu separă B şi C, atunci punctul O separă punctele A şi C.

Demonstraţie. Există un sistem de coordonate astfel ca $x_A = 0$, $x_B > 0$.

1) Sînt posibile următoarele cazuri:

a) $x_C < 0$; atunci $x_C < x_A < x_B$ şi în virtutea formulei (11) A este între C şi B.

b) $0 < x_C < x_B$; C este între A şi B.

c) $x_C > x_B$; atunci $x_A < x_B < x_C$ şi B este între A şi C.

2) Cazul c) exclude cazurile a) şi b).

3) Luînd C astfel ca $x_C = \frac{x_B}{2}$, avem $x_A < x_C < x_B$. Dacă $x_D = 2x_B$, atunci $x_A < x_B < x_D$.

4) Luăm sistemul de coordonate pentru AB astfel ca $x_O = 0$, $x_B > 0$. Atunci $x_A < 0$, şi prin urmare $x_C < 0$.

5) Demonstraţie asemănătoare.

Exerciţii

7. $M \in AB$, $A \notin [MB]$, $B \notin [MA] \Rightarrow M \in |AB|$.

8. $M \in AB$, $A \notin |MB|$, $B \notin |MA| \Rightarrow M \in [AB]$.

◇ **9.** $C \in |AB|$, $D \in |AC| \Rightarrow D \in |AB|$.

◇**10.** $C \in |AB| \Rightarrow |AC| \subset |AB|$.

◇**11.** $C, D \in |AB| \Rightarrow [CD] \subset |AB|$.

12. $C \in |AB|$, $B \in |CD| \Rightarrow C, B \in |AD|$.

13. Orice segment conţine o infinitate de puncte.

14. Fie m un număr real > 1. Arătaţi că există un punct $M \in |AB|$ astfel încît $\|AM\| = \frac{\|AB\|}{m}$.

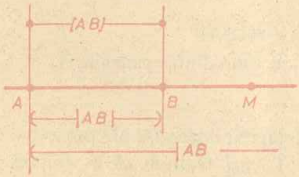


Fig. I.5

Definiţie. Fiind date punctele distincte A şi B, *semidreapta închisă* $[AB$ şi *semidreapta deschisă* $|AB$ se definesc astfel (fig. I.5):

$$[AB \overset{\text{def}}{=} \{M \mid M \in [AB] \text{ sau } B \in |AM|\},$$

$$|AB \overset{\text{def}}{=} [AB - \{A\}.$$

Dreapta AB este *suportul* semidreptelor $[AB$ şi $|AB$, iar punctul A *originea* lor.

Dacă $B \in |AC|$, semidreptele $[BA$ şi $[BC$ se zic *opuse*, la fel $|BA$ şi $|BC$.

Semidreptele pot fi precizate cu ajutorul absciselor:

Teorema 3. Oricare ar fi sistemul de coordonate pe dreapta AB, dacă $x_A < x_B$,

(12) $$[AB = \{M \in AB \mid x_M \geqslant x_A\}$$

(13) $$|AB = \{M \in AB \mid x_M > x_A\},$$

iar dacă $x_A > x_B$:

(14) $$[AB = \{M \in AB \mid x_M \leqslant x_A\}$$

(15) $$|AB = \{M \in AB \mid x_M < x_A\}.$$

Demonstraţie. Presupunînd $a_A < x_B$, din teorema 1 obţinem

$$M \in [AB] \Leftrightarrow x_A \leqslant x_M \leqslant x_B,$$

$$B \in |AM| \Leftrightarrow x_A < x_B < x_M.$$

Aşadar $M \in [AB \Leftrightarrow x_A \leqslant x_M \leqslant x_B$ sau $x_B < x_M$, ceea ce se scrie mai simplu: $M \in [AB \Leftrightarrow x_A \leqslant x_M$, deci are loc egalitatea (12). Egalităţile (13), (14) şi (15) rezultă în mod analog.

Demonstraţi cu ajutorul formulei (13):

Corolar. Dacă $C \in |AB$, atunci $|AB = |AC$ (în notaţia $|AB$, punctul B poate fi înlocuit cu oricare punct al semidreptei $|AB$).

Definiţie. Un *unghi* este reuniunea a două semidrepte închise avînd aceeaşi origine (fig. I.6).

Dacă cele două semidrepte sînt $h = [AB$ şi $k = [AC$, unghiul va fi notat $\widehat{hk}$ sau $\widehat{BAC}$ sau $\hat{A}$ (dacă nu e pericol de confuzie). Punctul A se numeşte *vîrful*, iar semidreptele h, k se numesc *laturile* unghiului $\widehat{hk}$.

Dacă $h = k$, $\widehat{hk}$ se numeşte *unghi nul*, iar dacă h şi k sînt semidrepte opuse, atunci $\widehat{hk}$ este un *unghi alungit*. Un unghi care nu este nici nul, nici alungit, se numeşte *unghi propriu*.

Definiţie. Dacă punctele A, B, C nu sînt coliniare, mulţimea

$$ABC \overset{\text{def}}{=} [AB] \cup [BC] \cup [CA]$$

se numeşte *triunghi*. Punctele A, B, C sînt *vîrfurile*, segmentele $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$ sînt *laturile*, iar unghiurile $\widehat{BAC}$, $\widehat{CBA}$, $\widehat{ACB}$ sînt *unghiurile* triunghiului.

Dacă două (respectiv trei) laturi au lungimi egale, triunghiul se numeşte *isoscel* (respectiv *echilateral*).

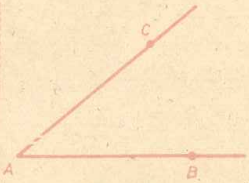


Fig. 1.6

Exerciţii

15. Fie $x_A = 2$, $x_B = 10$, $x_C = 14$. Care dintre următoarele egalităţi sînt adevărate: $[AB = [AC$, $|AB = |AC$, $|BA = |BC$, $|CA = |CB$; $|AC = |BC$?

16. Fie $x_A = -1$, $x_B = 3$, $x_C = 5$, $x_D = 8$. Să se arate că $B \in |AC$, $[BC] \subset |AD$, $B \in |AD$, $D \notin |CA$.

17. Se dau $x_A = -3$, $x_B = 0$, $x_C = 5$, $x_D = 9$. Să se afle $|CA \cap [BD]$ şi $[CA \cap |BD$.

18. Să se arate: $[AB] \subset [AB$ $(A \neq B)$.

19. Dacă $A \neq B$, atunci: a) $|AB \cap |BA = |AB|$, b) $[AB \cap [BA = [AB]$, c) $|AB \cup |BA = AB$.

§ 5. Axioma de separare a planului

Definiţie. Fie d o dreaptă şi A, B două puncte ale planului $\mathcal{P}$, nesituate pe d. Dacă segmentul $[AB]$ are un punct comun cu d, spunem că dreapta d *separă* punctele A şi B sau că A şi B *sînt de o parte şi de alta a dreptei* d. În caz contrar se spune că A şi B *sînt de aceeaşi parte a lui* d. Pe figura I.7 dreapta d separă punctele A şi B, de asemenea punctele A şi C, dar nu separă pe B şi C. Expresiile „d separă A şi B" şi „d nu separă A şi B" au sens numai dacă A şi B nu se află pe d.

Admitem următoarea *axiomă de separare a planului*:

S. Fie d o dreaptă ce separă punctele A şi B. Dacă d nu separă punctele B şi C, atunci d separă A şi C (fig. I.7).

Observaţie. Pentru puncte coliniare A, B, C afirmaţia S face parte din teorema 2 de la § 4 (punctul 5). Aşadar este suficient să se considere în axiomă numai puncte necoliniare. Sub această formă mai slabă axioma S se numeşte *axioma lui Pasch*. Pentru a simplifica referirile, am cuprins în axiomă ambele situaţii.

Exerciţii

◇ **1.** Oricare ar fi dreapta d şi punctul A nesituat pe d, arătaţi că există un punct $B \in \mathcal{P} - d$ astfel ca d să nu separe A şi B şi există un punct C astfel ca d să separe A şi C.

Rezolvare. Luăm un punct P pe dreapta d. Ştim că există B şi C astfel ca $A \in |PB|$ şi $P \in |CA|$ (§ 4, teorema 2,3)). Atunci d nu separă pe A, B şi separă pe A, C.

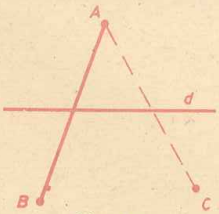


Fig. I.7

◇ ◇ **2.** Dacă dreapta d nu separă A şi B şi nici B şi C, atunci d nu separă punctele A şi C.

Rezolvare. Într-adevăr, în caz contrar d ar separa A şi C şi atunci din axioma S ar rezulta că d separă A şi B (căci nu separă C şi B), în contradicţie cu ipoteza.

Teorema 1. Dacă o dreaptă d separă atît punctele B şi A cît şi punctele A şi C, atunci d nu separă B şi C (fig. I. 7).

Demonstrație. Dacă punctele A, B, C sînt coliniare, teorema revine la punctul 4) din teorema 2, § 4. Vom admite deci că punctele A, B, C nu sînt coliniare. Să presupunem că teorema nu e adevărată. Atunci există pe dreapta d punctele M, N, P astfel încît $M \in |AB|$, $N \in |AC|$ și $P \in |BC|$ (fig. I.8). Cum punctele M, N, P sînt coliniare, unul din aceste puncte va fi situat între celelalte două (teorema 2, § 4 punctul 1). Pentru a face o alegere, să presupunem că M este între N și P.

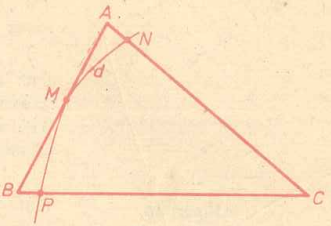


Fig. I.8

Așadar dreapta AB separă N și P; pe de altă parte AB nu separă N și C (căci conform teoremei 2.2), § 4 din $N \in |AC|$ rezultă că A nu este între N și C), deci din axioma S deducem că AB separă punctele P și C, adică $B \in |PC|$. Dar avem și $P \in |BC|$ în contradicție cu punctul 2) al teoremei amintite.

Corolar. O dreaptă care intersectează un triunghi dar nu trece printr-un vîrf al său, intersectează exact două din laturile triunghiului.

Exerciții

3. Dacă dreapta d separă A și B și de asemenea C și D, dar nu separă A și C, atunci d nu separă punctele B și D.

4. Fie A, B, C, D puncte distincte. Dacă A și B sînt de aceeași parte a lui CD, putem afirma că C și D sînt de aceeași parte a lui AB?

Definiție. Fie A un punct nesituat pe dreapta d (fig. I.9). Considerăm toate punctele M de aceeași parte a lui d, ca și A. Mulțimea formată din aceste puncte și punctul A se notează cu $|dA$ și se numește *semiplan (deschis)*. Spunem că dreapta d este *frontiera* lui și că semiplanul $|dA$ este *limitat* de dreapta d.

Avem

$$|dA = \{M \in \mathcal{P} \mid [AM] \cap d = \emptyset\}. \tag{1}$$

Într-adevăr, pentru $M \neq A$, relația $[AM] \cap d = \emptyset$ înseamnă că A și M sînt de aceeași parte a lui d; iar pentru $M = A$ relația $[AA] \cap d = \emptyset$ este verificată, căci $[AA] = \{A\} \not\subset d$.

În notația $|dA$ punctul A poate fi înlocuit cu orice punct al semiplanului $|dA$:

$$B \in |dA \Rightarrow |dA = |dB. \tag{2}$$

Într-adevăr, cum $[AB] \cap d = \emptyset$, exercițiul 2 ne arată că $[AM] \cap d = \emptyset$ și $[BM] \cap d = \emptyset$ sînt condiții echivalente, deci mulțimile de puncte, care le verifică, coincid.

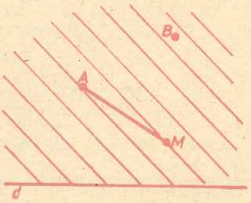


Fig. I.9

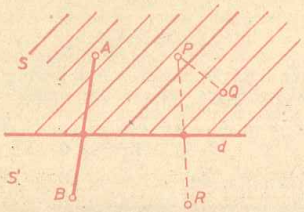


Fig. I.10

Teorema 2. (Teorema de separare a planului.) Fiind dată în planul $\mathcal{P}$ o dreaptă oarecare d, au loc următoarele proprietăți:

1) Există exact două semiplane limitate de dreapta d, pe care le notăm cu S și S'.

2) $\mathcal{P} - d = S \cup S'$ și $S \cap S' = \emptyset$.

3) Dacă $P, Q \in S$ sau $P, Q \in S'$, segmentul $|PQ|$ nu taie dreapta d. Dacă $P \in S$ și $R \in S'$, segmentul $|PR|$ și dreapta d au un punct comun (fig. I.10).

Semiplanele S și S' se numesc *opuse*.

Demonstrație. Luăm un punct A nesituat pe d; știm că există un punct B astfel ca d să separe A și B (exerc. 1). Să considerăm semiplanele $S = |dA$ și $S' = |dB$. Luînd $M \in \mathcal{P} - d$, să arătăm că $M \in S \cup S'$. Dacă $M \in S$ afirmația este evidentă. Dacă $M \notin S$ dreapta d separă A și M, deci conform teoremei 1 dreapta d nu separă B și M, adică $M \in S'$. Așadar $\mathcal{P} - d \subset S \cup S'$ și deoarece incluziunea inversă este evidentă, $\mathcal{P} - d = S \cup S'$.

Să presupunem că $P \in S \cap S'$; atunci d nu separă A și P și nici B și P. Cum d separă A și B și nu separă A și P deducem din axioma S că d separă B și P. Contradicția dovedește că nu există nici un punct în $S \cap S'$ și astfel am demonstrat afirmația 2).

Un semiplan oarecare S^* limitat de dreapta d se scrie sub forma $S^* = |dQ$, unde $Q \in \mathcal{P} - d$. Am demonstrat mai sus că $Q \in S$, sau $Q \in S'$. În primul caz $|dQ = |dA = S$ (vezi (2)), iar în al doilea caz $|dQ = |dB = S'$. Așadar $S^* = S$ sau $S^* = S'$ și afirmația 1) este demonstrată.

Fie $P, Q \in S$. Atunci $S = |dP$ și din definiția semiplanului urmează că $[PQ] \cap d = \emptyset$. Dacă $P \in S$, $R \in S'$, avem $S = |dP$ și $[PR] \cap d \neq \emptyset$, deci și afirmația 3) este demonstrată.

Definiție. Reuniunea unui semiplan cu frontiera sa se numește *semiplan închis*. Simbolul $[dA \overset{\text{def}}{=} |dA \cup d$ se citește „semiplanul închis limitat de dreapta d și conținînd punctul A".

Exerciții

5. Dacă punctele A și B aparțin semiplanului S (deschis sau închis), atunci $[AB] \subset S$.

◇ **6.** Dacă $A \notin d$ și $B \in d$, atunci $|BA| \subset |dA$ (fig. I.11).

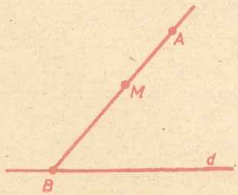


Fig. I.11.

Indicație. Se va arăta: $M \in |BA| \Rightarrow B \notin [AM] \Rightarrow M \in |dA$.

◇ **7.** Dacă $A \notin d$ și $B \in d$, atunci $|BA \subset |dA$.

Indicație. Se ia un punct $M \in |BA$ și se disting cazurile:

1° $M \in |BA|$; atunci $M \in |dA$ conform exercițiului 6; 2° $M = A$; 3° $A \in |BM|$.

8*. Să se arate că intersecția dintre o dreaptă d și un semiplan deschis este sau dreapta d sau o semidreaptă deschisă sau mulțimea vidă.

◇ **9.** Dacă M este un punct pe latura $[AB]$ a unui triunghi ABC, iar P un punct ce se găsește de aceeași parte a dreptei AB, ca și C, atunci semidreapta $|MP$ intersectează latura $[BC]$ sau $[CA]$ a triunghiului (fig. I.12).

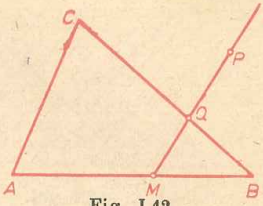


Fig. I.12

Indicație. Conform axiomei S, dreapta MP taie segmentul $[BC]$ sau $[CA]$ într-un punct Q. Trebuie să se demonstreze că punctul Q este situat pe *semidreapta* $|MP$. În acest scop se va arăta că P și Q sînt de aceeași parte a lui AB, ceea ce implică $[PQ] \cap AB = \emptyset$.

◇ **10.** Fie ABC un triunghi, $B' \in |AC|$ și $C' \in |AB|$. Să se arate că segmentele $|BB'|$ și $|CC'|$ au un punct comun.

◇ **11.** Folosind notațiile exercițiului **10**, fie $D \in |BC|$. Să se arate că $|AD| \cap \cap |B'C'| \neq \emptyset$.

§ 6. Mulțimi convexe

Definiție. Se numește *mulțime convexă* o mulțime $\mathcal{M}$ de puncte, care are următoarea proprietate: dacă P, Q sînt două puncte distincte oarecare ale mulțimii $\mathcal{M}$ (fig. I.13), atunci $\mathcal{M}$ conține toate punctele segmentului $|PQ|$:

(1) $$P, Q \in \mathcal{M} \Rightarrow |PQ| \subset \mathcal{M}.$$

Mulțimea vidă și mulțimile formate dintr-un singur punct se consideră convexe, deoarece pentru ele nu se pune nici o condiție.

O mulțime formată din două puncte nu este convexă. Mulțimea din figura I.13 este convexă, cea din figura I.14 nu este convexă.

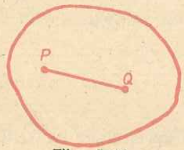


Fig. I.13

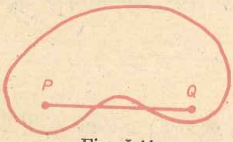


Fig. I.14

Exerciții

◇ **1.** Arătați că planul $\mathcal{P}$ și orice dreaptă sînt mulțimi convexe.

◇ **2.** Orice segment și orice semidreaptă sînt mulțimi convexe.

Indicație. Fie de exemplu $|AB|$ un segment deschis. Dacă P și $Q \in |AB|$, atunci $|PQ| \subset |AB|$ (§ 4, exerc. 11).

◇ **3.** Arătați că semiplanele deschise și semiplanele închise sînt mulțimi convexe.

Din mulțimi convexe putem forma alte mulțimi convexe cu ajutorul teoremei următoare.

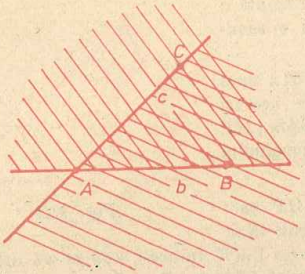


Fig. I.15

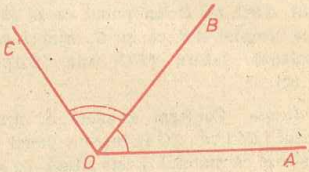


Fig. I.16

Teorema 1. Orice intersecţie de mulţimi convexe este convexă.

Demonstraţie. Demonstrăm teorema pentru două mulţimi convexe $\mathcal{M}_1$ şi $\mathcal{M}_2$ (în cazul mai multor mulţimi convexe se raţionează la fel). Trebuie să arătăm că $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2$ este o mulţime convexă. Fie $P, Q \in \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2$. Atunci $P, Q \in \mathcal{M}_1$ şi $P, Q \in \mathcal{M}_2$. Cum $\mathcal{M}_1$ şi $\mathcal{M}_2$ sînt mulţimi convexe, $|PQ| \subset \mathcal{M}_1$ şi $|PQ| \subset \mathcal{M}_2$. Dar atunci $|PQ| \subset \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2$.

Definiţie. *Interiorul unghiului propriu* $\widehat{BAC}$ este mulţimea de puncte $\text{Int}\ \widehat{BAC} \overset{\text{def}}{=} |bC \cap |cB$, unde $b = AB$, $c = AC$ (fig. I.15).

Int $\widehat{BAC}$ fiind intersecţia a două semiplane deschise, adică a două mulţimi convexe, *este o mulţime convexă.*

Definiţii. Două unghiuri proprii cu acelaşi vîrf şi cu o latură comună se numesc *adiacente*, dacă interioarele lor nu au nici un punct comun (unghiurile $\widehat{AOB}$ şi $\widehat{BOC}$ pe figurile I.16 şi 17).

Unghiurile $\widehat{AOB}$ şi $\widehat{BOC}$ se numesc *unghiuri adiacente suplementare* dacă $|OA$ şi $|OC$ sînt semidrepte opuse (fig. I.18).

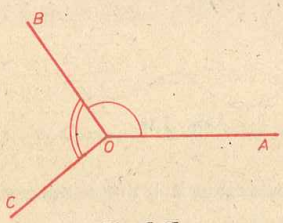


Fig. I.17

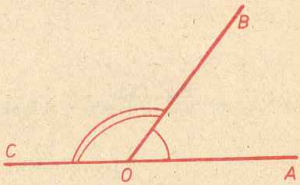


Fig. I.18

Exerciţii

◇◇ **4.** Fie BAC un unghi propriu. Să se arate:

a) $|BC| \subset \text{Int}\ \widehat{BAC}$; b) $D \in \text{Int}\ \widehat{BAC} \Rightarrow |AD \subset \text{Int}\ \widehat{BAC}$.

5. *Interiorul unui triunghi* ABC se defineşte astfel

$$\text{Int}\ ABC \overset{\text{def}}{=} |aA \cap |bB \cap |cC,$$

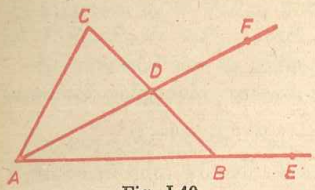


Fig. I.19

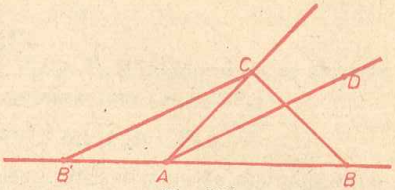


Fig. I.20

unde $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Să se arate:

1) Int ABC este o mulțime convexă.

2) Int ABC = Int $\widehat{ABC}$ ∩ Int $\widehat{BCA}$ ∩ Int $\widehat{CAB}$.

3) Int ABC = $|aA$ ∩ Int $\widehat{BAC}$.

◇◇ **6.** Fie ABC un triunghi și $D \in |BC|$. Se iau punctele E și F în așa fel ca $B \in |AE|$ și $D \in |AF|$ (fig. I.19). Să se arate că $F \in$ Int $\widehat{CBE}$.

Indicație. Se va arăta că C, F sînt de aceeași parte a lui BE și E, F de aceeași parte a lui BC.

7. Fie $\widehat{BAC}$ un unghi propriu și $D \in$ Int $\widehat{BAC}$. Să se arate că Int $\widehat{BAD} \subset$ Int $\widehat{BAC}$.

Teorema 2. (Teorema transversalei.) Dacă punctul D aparține interiorului unghiului propriu $\widehat{BAC}$, atunci semidreapta $|AD$ și segmentul $|BC|$ au un punct comun:

$$|AD \cap |BC| \neq \emptyset.$$

Demonstrație. Fie $|AB'$ semidreapta opusă lui $|AB$ (fig. I.20). Semidreapta $|AD$ intersectează segmentul $|B'C|$ sau segmentul $|BC|$ (§ 5, exerc. 9). Dar $|AD$ nu poate intersecta pe $|B'C|$, deoarece aceste mulțimi sînt de o parte și de alta a dreptei AC (§ 5, exerc. 6 și 7).

Exerciții

8. Fie $\widehat{BAC}$ un unghi propriu și $D \in$ Int $\widehat{BAC}$. Să se arate că punctele B și C sînt de o parte și de alta a dreptei AD.

Indicație. Se aplică teorema transversalei.

◇ **9.** Fie punctele B și C situate de aceeași parte a dreptei OA. Să se arate că

$$C \in \text{Int}\,\widehat{AOB} \text{ sau } B \in \text{Int}\,\widehat{AOC} \text{ sau } \widehat{AOB} = \widehat{AOC}.$$

Indicație. E suficient să considerăm cazul $B \notin$ Int $\widehat{AOC}$ și $B \notin |OC$, căci altfel afirmația este evidentă. Dacă am avea $|AB| \cap OC = \emptyset$, ar rezulta că $B \in$ Int $\widehat{AOC}$ sau $B \in |OC$, deci A și B sînt de o parte și de alta a dreptei OC. Așadar $|AB| \cap OC = \{P\}$. Arătați că $P \in |OC$, de unde va rezulta $|OP \subset$ Int $\widehat{AOB}$ și $C \in$ Int $\widehat{AOB}$.

10. Dacă punctul P aparține interiorului triunghiului ABC, atunci dreapta AP intersectează segmentul $[BC]$ într-un punct A' și $P \in |AA'|$.

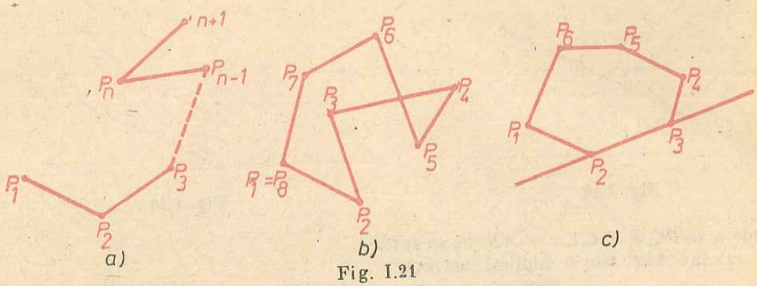


Fig. I.21

11. Dacă dreapta d trece printr-un punct P, situat în interiorul triunghiului ABC, atunci dreapta d intersectează triunghiul. În cîte puncte?

◇ **12.** Fie A şi C de o parte şi de alta a dreptei BB', iar $O \in |BB'|$, $O \notin AC$. Să se arate că dintre semidreptele $|OB$ şi $|OB'$ exact una este situată în interiorul unghiului $\widehat{AOC}$.

◇ **13.** Fie P un punct în interiorul unghiului propriu $\widehat{AOB}$, iar Q un punct în exteriorul lui (adică $Q \notin \text{Int}\ \widehat{AOB} \cup [OA \cup [OB)$. Să se arate că segmentul $|PQ|$ intersectează o latură a unghiului $\widehat{AOB}$.

Definiţie. O *linie poligonală* este o mulţime de forma

$$L = [P_1P_2] \cup [P_2P_3] \cup \ldots \cup [P_nP_{n+1}].$$

Punctele $P_1, \ldots, P_{n+1}$ se numesc *vîrfurile* liniei L, iar segmentele $[P_1P_2], \ldots, [P_nP_{n+1}]$ se numesc *laturile* ei; laturile $[P_{k-1}P_k]$ şi $[P_kP_{k+1}]$ se zic *vecine* (fig. I.21,a).

Linia poligonală L se numeşte *închisă*, dacă $P_1 = P_{n+1}$ (fig. I.21 b şi c) şi *simplu închisă* dacă în plus oricare două laturi nevecine nu au punct comun şi două laturi vecine au suporturi diferite. O linie poligonală simplu închisă se mai numeşte *poligon*. Linia poligonală din figura I.21.b) nu este poligon; *un poligon nu se autointersectează!* Un poligon cu trei laturi este un triunghi. Un poligon cu 4, 5, 6, ... laturi se numeşte *patrulater*, *pentagon*, *exagon* etc. Poligonul cu vîrfurile $P_1, P_2, \ldots, P_n$ va fi notat cu $P_1P_2\ldots P_n$. Segmentele $[P_iP_k]$, care nu sînt laturi, se numesc *diagonale*.

Poligonul $P_1P_2\ldots P_n$ se numeşte *poligon convex*, dacă, pentru fiecare latură $[P_kP_{k+1}]$, toate vîrfurile diferite de P_k şi P_{k+1} se găsesc de aceeaşi parte a dreptei P_kP_{k+1} (pentru $k = n$, $P_{n+1} = P_1$) (fig. 21, c).

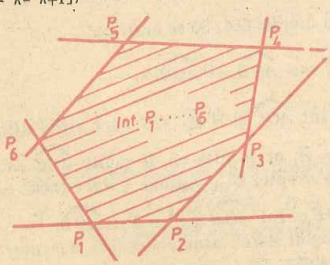


Fig. I.22

Un poligon convex $P_1P_2\ldots P_n$ nu este o mulţime convexă, dar *interiorul* său (care se defineşte precum urmează) este o mulţime convexă. *Interiorul* unui poligon convex este intersecţia semiplanelor deschise limitate de suporturile laturilor poligonului şi care conţin vîrfurile nesituate pe laturile respective (fig. I.22):

dacă notăm $d_k = P_kP_{k+1}$ pentru $k = 1, \ldots, n-1$ și $d_n = P_nP_1$, atunci $\text{Int } P_1P_2\ldots P_n = |d_1P_n \cap |d_2P_1 \cap \ldots |d_nP_n$.

Reuniunea dintre un poligon convex $P_1P_2\ldots P_n$ și interiorul său se numește *suprafață poligonală convexă*, care se notează prin $[P_1P_2\ldots P_n]$

$$[P_1P_2\ldots P_n] = P_1P_2\ldots P_n \cup \text{Int } P_1P_2\ldots P_{n-1}.$$

În cazul unui triunghi ABC mulțimea $[ABC]$ se numește *suprafață triunghiulară*.

Exerciții

◇ **14.** Să se arate că diagonalele $[AC]$ și $[BD]$ ale unui patrulater convex $ABCD$ au un punct comun (fig. I.23).

◇ **15.** Dacă diagonalele $[AC]$ și $[BD]$ ale patrulaterului $ABCD$ au un punct comun, atunci patrulaterul este convex.

16*. Un vîrf al unui patrulater $ABCD$ se marchează cu un semn dacă și numai dacă el este situat în interiorul unghiului opus (de exemplu A va fi marcat dacă $A \in \text{Int } \widehat{BCD}$). Să se demonstreze:

a) Cel puțin unul din vîrfurile A, B, C, D va fi marcat.

b) Dacă două vîrfuri sînt marcate, atunci patrulaterul este convex și toate vîrfurile vor fi marcate.

17.** Intersecția semiplanelor închise, limitate de suporturile laturilor unui poligon convex P coincide cu mulțimea $\text{Int } P \cup P$.

18.** Reuniunea unui poligon convex cu interiorul său este o mulțime convexă.

◇ **19.** Fie $P_1P_2\ldots P_{n+1}$ o linie poligonală. Dacă P_1 și P_{n+1} sînt de o parte și de alta a unei drepte d, atunci această dreaptă intersectează linia poligonală.

20*. Dacă o dreaptă d nu este suportul unei laturi a unui poligon convex, atunci d are cel mult 2 puncte comune cu poligonul dat.

21*. Dacă $P_1P_2\ldots P_n$ este un poligon convex unde $n \geqslant 4$, atunci $P_2P_3\ldots P_n$ este de asemenea un poligon convex.

22*. Fie $P_1P_2\ldots P_n$ un poligon convex și $i_1, i_2, \ldots, i_k$ numere naturale astfel ca $1 \leqslant i_1 < i_2 \ldots < i_k \leqslant n$, $k \geqslant 3$. Să se arate că $P_{i_1}P_{i_2} \ldots P_{i_k}$ este un poligon convex.

23.** Fie $L = P_1P_2\ldots P_n$ un poligon convex, $A \in \text{Int } L$ și $B \notin \text{Int } L$. Să se arate că $L \cap [AB] \neq \emptyset$. Cîte puncte are această mulțime?

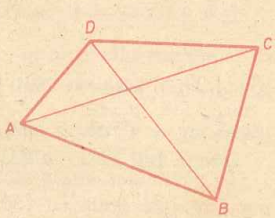


Fig. I.23

§ 7. Axiomele unghiului

Vom nota cu $\mathcal{U}$ mulțimea unghiurilor.

Măsurînd unghiurile cu raportorul (fig. I.24), fiecărui unghi i se asociază un număr real. Astfel se obține o funcție definită pe $\mathcal{U}$ cu valori în intervalul închis $[0,180]$.

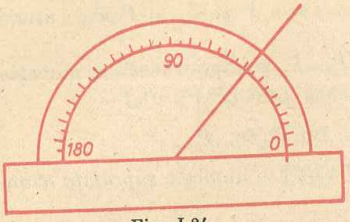


Fig. I.24

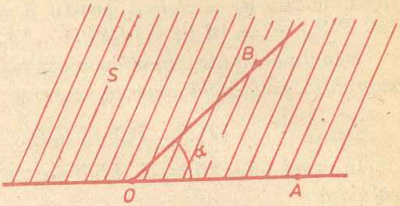


Fig. I.25

Ultima noţiune fundamentală, pe care o introducem în geometrie, este inspirată de procedeul de măsurare cu raportorul.

Admitem existenţa unei funcţii m: $\mathcal{U} \to [0,180]$, numită *funcţia măsura unghiurilor (în grade)*, care satisface următoarele axiome (evidente sub aspect intuitiv):

U.1. $m(\widehat{AOB}) = 0$ **dacă şi numai dacă** $\widehat{AOB}$ **este un unghi nul;** $m(\widehat{AOB}) = 180$ **dacă şi numai dacă** $\widehat{AOB}$ **este un unghi alungit.**

U.2. (Axioma de construcţie a unghiurilor.) Fie $|OA$ **o semidreaptă şi** S **un semiplan limitat de dreapta** OA**. Pentru orice număr** $\alpha \in (0,180)$ **există o semidreaptă unică** $|OB$**, inclusă în** S**, astfel ca** $m(\widehat{AOB}) = \alpha$ (fig. I.25).

Din **U.2.** rezultă imediat

Teorema 1. Dacă $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{AOB'})$ **şi punctele** B, B' **sînt de aceeaşi parte a dreptei** OA**, atunci** $|OB = |OB'$ (deci $\widehat{AOB} \equiv \widehat{AOB'}$) (fig. I.26).

U.3. (Axioma adunării unghiurilor.) Dacă $\widehat{AOB}$ **şi** $\widehat{BOC}$ **sînt unghiuri adiacente cu** $|OB \subset \operatorname{Int} \widehat{AOC}$ **sau unghiuri adiacente suplementare** (fig. I.27, a) respectiv b)), **atunci**

$$m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{BOC}) = m(\widehat{AOC}). \tag{1}$$

În particular, suma măsurilor unghiurilor a două unghiuri adiacente suplementare este egală cu 180.

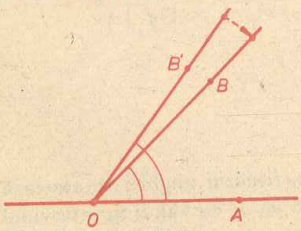


Fig. I.26

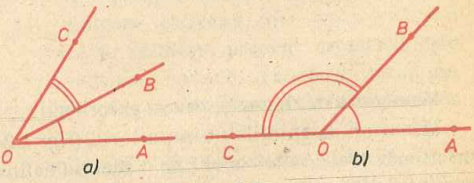


Fig. I.27

Dacă $\alpha \in [0,180]$, mulțimea tuturor unghiurilor $\widehat{hk}$, pentru care $m(\widehat{hk}) = \alpha$, se înseamnă cu α°. Așadar

$$m(\widehat{AOB}) = \alpha \Leftrightarrow \widehat{AOB} \in \alpha^\circ.$$

Observații. În cărțile de geometrie mai vechi două unghiuri cu aceeași măsură sînt numite „egale" și sînt și privite ca egale. De aceea în loc de $\widehat{AOB} \in \alpha^\circ$ s-a scris $\widehat{AOB} = \alpha^\circ$. Veți întîlni această notație la obiectele de învățămînt care folosesc geometria.

Definiții. Două unghiuri se numesc *suplementare* dacă suma măsurilor lor este egală cu 180. Atunci fiecare este un *suplement* al celuilalt.

Două unghiuri cu același vîrf se numesc *opuse la vîrf* dacă laturile lor sînt semidrepte opuse ($\widehat{AOB}$ și $\widehat{COD}$ pe fig. I.28).

Teorema 2. Două unghiuri opuse la vîrf au măsuri egale.

Demonstrație. Fie $\widehat{AOB}$ și $\widehat{COD}$ două unghiuri opuse la vîrf. Avem

$$m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{BOD}) = m(\widehat{AOD}) = 180,$$

$$m(\widehat{COD}) + m(\widehat{BOD}) = m(\widehat{COB}) = 180,$$

deci $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{COD})$.

Teorema 2 are și o reciprocă:

Teorema 3. Fie $O \in |AA'|$ și B, B' două puncte de o parte și de alta a dreptei AA'. Dacă $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{A'OB'})$, atunci semidreptele $|OB$ și $|OB'$ sînt opuse (fig. I.29).

Demonstrație. Fie $|OC$ semidreapta opusă lui $|OB'$. Conform teoremei 2, $m(\widehat{AOC}) = m(\widehat{A'OB'})$; dar $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{A'OB'})$, deci $m(\widehat{AOC}) = m(\widehat{AOB})$. Din teorema 1 obținem că $|OB = |OC$, așadar $|OB$ și $|OB'$ sînt opuse.

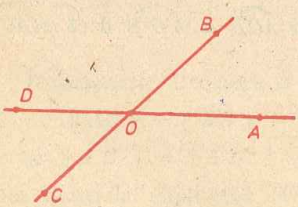


Fig. I.28

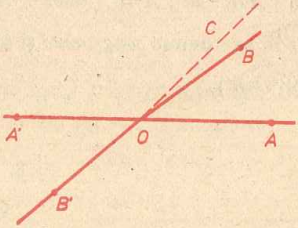


Fig. I.29

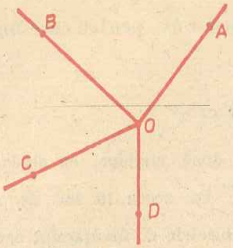


Fig. I.30

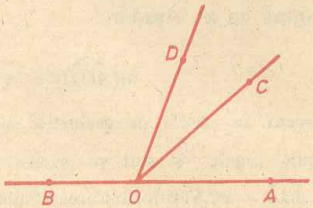


Fig. I.31

Exerciţii

1. Fie $m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{BOC}) = 180$. Rezultă că A, O, C sînt coliniare?

2. Care dintre următoarele egalităţi sînt valabile în cazul figurii I.30:

a) $m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{BOC}) = m(\widehat{COA})$, b) $m(\widehat{BOC}) + m(\widehat{COD}) = m(\widehat{BOD})$,

c) $m(\widehat{COD}) + m(\widehat{DOA}) = m(\widehat{COA})$?

3. Ştiind că $m(\widehat{AOC}) = 60$, $B \in \text{Int } \widehat{AOC}$ şi $m(\widehat{AOB}) = 23$, să se afle $m(\widehat{BOC})$.

4. Pe figura I.31 $m(\widehat{COD}) = 30$. Să se afle $m(\widehat{AOC})$ şi $m(\widehat{DOB})$, ştiind că $m(\widehat{DOB}) = 2\ m(\widehat{AOC})$.

◇ **5.** Fie $\widehat{AOC}$ un unghi propriu, A şi C de o parte şi de alta a dreptei OB şi $m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{BOC}) < 180$; atunci $|OB \subset \text{Int } \widehat{AOC}$.

Indicaţie. Fie $|OB'$ opusă cu $|OB$. Presupunînd că $|OB \not\subset \text{Int } \widehat{AOC}$, avem $|OB' \subset \text{Int } \widehat{AOC}$ (§ 6, exerc. 12), deci $m(\widehat{AOB'}) + m(\widehat{B'OC}) = m(\widehat{AOC}) < 180$, din care se va deduce o contradicţie.

§ 8. Proprietăţi de congruenţă

Definiţie. Spunem că segmentele $|AB|$ şi $|A'B'|$ sînt *congruente* şi scriem $|AB| \equiv |A'B'|$ dacă $\|AB\| = \|A'B'\|$. Analog, unghiurile $\widehat{AOB}$ şi $\widehat{A'O'B'}$ se numesc *congruente* şi se notează $\widehat{AOB} \equiv \widehat{A'O'B'}$ dacă $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{A'O'B'})$.

Teorema 1. Au loc următoarele proprietăţi:

(1) $\forall\ |AB| : |AB| \equiv |AB|$ (reflexivitate),

(2) $|AB| \equiv |CD| \Rightarrow |CD| \equiv |AB|$ (simetrie),

(3) $|AB| \equiv |CD|,\ |CD| \equiv |EF| \Rightarrow |AB| \equiv |EF|$ (tranzitivitate).

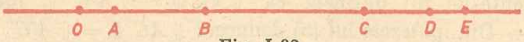


Fig. I.32

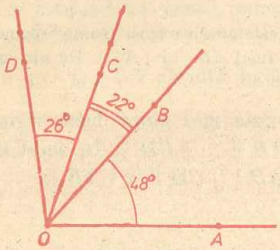


Fig. I.33

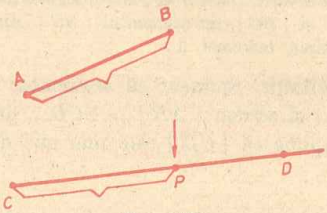


Fig. I.34

Demonstraţie. Arătăm proprietatea (3). Din ipoteză rezultă $\| AB \| = \| CD \|$ şi $\| CD \| = \| EF \|$, deci $\| AB \| = \| EF \|$, ceea ce înseamnă că $| AB | \equiv | EF |$. Proprietăţile (1) şi (2) se arată la fel.

Enunţaţi, în analogie cu teorema 1, o teoremă pentru unghiuri!

Exerciţii

1. Punctele A, B, C, D, E, situate pe o dreaptă, au abscisele $x_A = 1$, $x_B = 4$, $x_C = 9$, $x_D = 11$, $x_E = 12$. Găsiţi segmente congruente determinate de aceste puncte (fig. I.32).
2. Găsiţi unghiuri congruente pe figura I.33.

Teorema 2. (Teorema de construcţie a unui segment.) Fie $| AB |$ un segment şi $| CD$ o semidreaptă. Există un singur punct $P \in | CD$ astfel ca $| AB | \equiv | CP |$ (fig. I.34).

Demonstraţie. Alegem sistemul de coordonate pentru dreapta CD astfel ca $x_C = 0$ şi $x_D > 0$. Punctul P trebuie să satisfacă două condiţii:
a) $P \in | CD$, ceea ce înseamnă $x_P > 0$ (vezi § 4 formula (13)), şi b) $\| CP \| = \| AB \|$, adică $| x_P - 0 | = \| AB \|$. Aşadar $x_P = \| AB \|$ şi astfel punctul P este determinat în mod unic.

Teorema 3. (Teorema de adunare şi de scădere a segmentelor.) Fie $B \in | AC |$ şi $B' \in | A'C' |$ (fig. I.35). Atunci

(4) $\quad | AB | \equiv | A'B' |, \ | BC | \equiv | B'C' | \Rightarrow | AC | \equiv | A'C' |,$

(5) $\quad | AC | \equiv | A'C' |, \ | AB | \equiv | A'B' | \Rightarrow | BC | \equiv | B'C' |.$

Demonstraţie. Deoarece B este între A şi C şi B' între A', C'

(6) $\quad \| AC \| = \| AB \| + \| BC \|$

şi $\| A'C' \| = \| A'B' \| + \| B'C' \|$.

Din ipotezele implicaţiei (4) rezultă $\| AB \| = \| A'B' \|$ şi $\| BC \| = \| B'C' \|$.

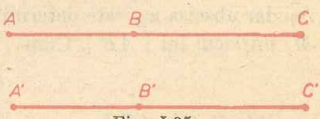


Fig. I.35

Folosind egalitățile (6) obținem că $\| AC \| = \| A'C' \|$, deci $| AC | \equiv | A'C' |$. — Din ipotezele lui (5) deducem $\| AC \| = \| A'C' \|$, $\| AB \| = \| A'B' \|$, ceea ce împreună cu (6) ne dă $\| BC \| = \| B'C' \|$, adică $| BC | \equiv | B'C' |$.

Observație. Dacă $B \in | AC |$, segmentul $| AC |$ este numit uneori „suma" segmentelor $| AB |$ și $| BC |$, iar segmentul $| BC |$ „diferența" lui $| AB |$ și $| AC |$. De aici provine denumirea teoremei 3.

Definiție. Spunem că segmentul $| AB |$ este *mai mare* decît segmentul $| CD |$ și scriem $| AB | > | CD |$, dacă $\| AB \| > \| CD \|$. În acest caz se mai spune că $| CD |$ este mai mic decît $| AB |$ ($| CD | < | AB |$).

Exerciții

◇ **3.** Arătați că $| AB | > | CD |$ dacă și numai dacă există un punct $M \in | AB |$ astfel ca $| AM | \equiv | CD |$.

4. $| AB | > | CD |$, $| CD | > | EF | \Rightarrow | AB | > | EF |$.

5. $| AB | \equiv | A'B' |$, $| CD | \equiv | C'D' |$, $| AB | > | CD | \Rightarrow | A'B' | > | C'D' |$.

6. Fie $B \in | AC |$ și $B' \in | A'C' |$. Arătați că atunci a) $| AB | > | A'B' |$, $| BC | > | B'C' |$ implică $| AC | > | A'C' |$.

b) $| AC | > | A'C' |$, $| BC | < | B'C' |$ implică $| AB | > | A'B' |$.

Definiție. Spunem că punctul M este *mijlocul* segmentului $| AB |$ dacă $M \in AB$ și $| AM | \equiv | MB |$.

Observație. Dacă un obiect matematic se definește printr-o condiție, atunci se pun în mod necesar două întrebări: 1) condiția poate fi satisfăcută? (adică există cel puțin un asemenea obiect?), și 2) cîte obiecte satisfac condiția? Definiția respectivă este corectă, dacă condiția este satisfăcută de un singur obiect. Vom demonstra acum că definiția de mai sus este corectă.

Teorema 4. Orice segment $| AB |$ are un singur mijloc M și $M \in | AB |$.

Demonstrație. Fie $x_A = a$, $x_B = b$ și $a < b$. Punctul $M \in AB$ este mijlocul lui $| AB |$ dacă și numai dacă $\| AM \| = \| MB \|$, ceea ce este echivalent cu

$$| x_M - a | = | b - x_M |.$$

Deosebim cazurile: 1) $x_M < a$, 2) $x_M > b$, 3) $a \leqslant x_M \leqslant b$. Cazul $x_M < a$ ne conduce la $a - x_M = b - x_M$ și $a = b$, în contradicție cu $a < b$; la fel, nici cazul $x_M > b$ nu este posibil. Prin urmare numai cazul 3) este posibil. Dar atunci $x_M - a = b - x_M$, de unde

$$x_M = \frac{a+b}{2}. \tag{7}$$

Așadar abscisa x_M este determinată în mod unic, și împreună cu ea și punctul M, mijlocul lui $| AB |$. Cum

$$a < \frac{a+b}{2} < b,$$

rezultă $M \in | AB |$.

7. Fie C mijlocul segmentului $|AB|$ şi D un punct cu proprietatea că B este mijlocul lui $|CD|$. Să se arate că $B \in |AD|$. Să se calculeze x_C şi x_D, ştiind că $x_A = 2$, $x_B = 7$.

8. Se consideră trei puncte coliniare A, B, C şi mijloacele D, E, F ale segmentelor $|AB|$, $|BC|$, $|AC|$. Să se arate că $|DE|$ şi $|BF|$ au acelaşi mijloc.

Din axioma **U.2** rezultă imediat

Teorema 5. (Teorema de construcţie a unui unghi.) Fie $|OA$ o semidreaptă, S un semiplan limitat de dreapta OA şi $\widehat{hk}$ un unghi propriu oarecare. Atunci există o semidreaptă unică $|OB$, inclusă în S, astfel ca $\widehat{AOB} \equiv \widehat{hk}$.

Teorema 6. (Teorema de adunare şi scădere a unghiurilor.) Fie $|OC \subset \operatorname{Int} \widehat{AOB}$, $|O'C' \subset \operatorname{Int} \widehat{A'O'B'}$ (fig. I. 36). Atunci

$$\widehat{AOC} \equiv \widehat{A'O'C'},\ \widehat{COB} \equiv \widehat{C'O'B'} \Rightarrow \widehat{AOB} \equiv \widehat{A'O'B'}, \tag{8}$$

$$\widehat{AOB} \equiv \widehat{A'O'B'},\ \widehat{AOC} \equiv \widehat{A'O'C'} \Rightarrow \widehat{COB} \equiv \widehat{C'O'B'}. \tag{9}$$

Demonstraţie. Folosind axioma **U.3** putem scrie

$$\begin{aligned} m(\widehat{AOC}) + m(\widehat{COB}) &= m(\widehat{AOB}) \\ m(\widehat{A'O'C'}) + m(\widehat{C'O'B'}) &= m(\widehat{A'O'B'}). \end{aligned} \tag{10}$$

Din ipotezele implicaţiei (8) rezultă $m(\widehat{AOC}) = m(\widehat{A'O'C'})$, $m(\widehat{COB}) = m(\widehat{C'O'B'})$, ceea ce împreună cu (10) ne conduce la $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{A'O'B'})$, deci $\widehat{AOB} \equiv \widehat{A'O'B'}$. Analog, din ipotezele lui (9) şi egalităţile (10) obţinem $m(\widehat{COB}) = m(\widehat{C'O'B'})$, de unde $\widehat{COB} \equiv \widehat{C'O'B'}$.

Observaţie. Dacă $|OC \subset \operatorname{Int} \widehat{AOB}$, unghiul $\widehat{AOB}$ este uneori numit „suma" unghiurilor $\widehat{AOC}$ şi $\widehat{COB}$, iar unghiul $\widehat{COB}$ este numit „diferenţa" unghiurilor $\widehat{AOB}$ şi $\widehat{AOC}$.

Definiţie. Spunem că unghiul $\widehat{hk}$ este *mai mare* decît $\widehat{lm}$ şi scriem $\widehat{hk} > \widehat{lm}$ dacă $m(\widehat{hk}) > m(\widehat{lm})$.

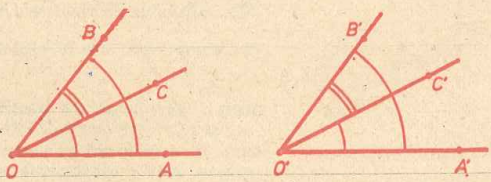


Fig. I.36

Teorema 7. (Teorema semidreptei interioare unui unghi.)

a) Dacă semidreapta $|OB$ este interioară unghiului $\widehat{AOC}$ ($|OB \subset \subset \text{Int}\ \widehat{AOB}$), atunci $\widehat{AOB} < \widehat{AOC}$.

b) Dacă punctele B şi C sînt situate de aceeaşi parte a dreptei OA şi $\widehat{AOB} < \widehat{AOC}$, atunci $|OB \subset \text{Int}\ \widehat{AOC}$ (fig. I.37).

Demonstraţie. a) Dacă $|OB \subset \text{Int}\ \widehat{AOC}$, atunci folosind axioma adunării unghiurilor, avem $m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{BOC}) = m(\widehat{AOC})$. Deci $m(\widehat{AOB}) < m(\widehat{AOC})$ de unde $\widehat{AOB} < \widehat{AOC}$.

b) Conform exerciţiului 9 de la § 6, unul dintre următoarele cazuri are loc: $|OC \subset \text{Int}\ \widehat{AOB}$, sau $|OB \subset \text{Int}\ \widehat{AOC}$, sau $\widehat{AOB} \equiv \widehat{AOC}$. Este clar că ultimul caz nu este posibil. Nici primul nu este posibil, deoarece din $|OC \subset \text{Int}\ \widehat{AOB}$ rezultă în virtutea axiomei **U.3.**: $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{AOC}) + m(\widehat{COB}) > m(\widehat{AOC})$. Dar atunci $\widehat{AOB} > \widehat{AOC}$, în contradicţie cu ipoteza.

Exerciţii

9. Arătaţi: $\hat{hk} > \widehat{h'k'}$, $\widehat{h'k'} > \widehat{h''k''} \Rightarrow \hat{hk} > \widehat{h''k''}$.

10. $\hat{hk} \equiv \widehat{h'k'}$, $\hat{lm} \equiv \widehat{l'm'}$, $\hat{hk} > \hat{lm} \Rightarrow \widehat{h'k'} > \widehat{l'm'}$.

11. Fie $C \in \text{Int}\ \widehat{AOB}$, $C' \in \text{Int}\ \widehat{A'O'B'}$. Să se arate:

a) $\widehat{AOC} > \widehat{A'O'C'}$, $\widehat{COB} > \widehat{C'O'B'} \Rightarrow \widehat{AOB} > \widehat{A'O'B'}$.

b) $\widehat{AOB} \equiv \widehat{A'O'B'}$, $\widehat{AOC} > \widehat{A'O'C'} \Rightarrow \widehat{COB} < \widehat{C'O'B'}$.

◇ **12.** Arătaţi că $\widehat{AOB} > \widehat{COD}$ dacă şi numai dacă există o semidreaptă $|OM \subset \subset \text{Int}\ \widehat{AOB}$ astfel încît $\widehat{AOM} \equiv \widehat{COD}$.

Definiţie. Semidreapta $[OC$ se numeşte *bisectoarea* unghiului propriu $\widehat{AOB}$ dacă $|OC \subset \text{Int}\ \widehat{AOB}$ şi $\widehat{AOC} \equiv \widehat{COB}$ (fig. I.38).

Teorema 8. Orice unghi propriu are o singură bisectoare.

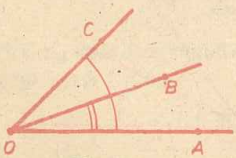


Fig. I.37

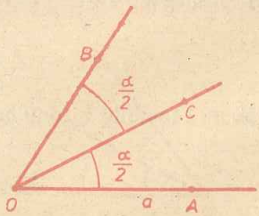


Fig. I.38

Demonstrație. Fie $\widehat{AOB}$ un unghi dat, $m(\widehat{AOB}) = \alpha$, $0 < \alpha < 180$ și $a = AO$ (fig. I.38). Să presupunem că $[OC$ este o bisectoare a unghiului $\widehat{AOB}$; atunci $m(\widehat{AOC}) + m(\widehat{COB}) = m(\widehat{AOB}) = \alpha$ și $m(\widehat{AOC}) = m(\widehat{COB})$, deci $m(\widehat{AOC}) = \frac{\alpha}{2}$. Ținînd seama și de faptul că $|OC \subset |aB$, din axioma **U.2.** deducem că semidreapta $|OC$ este determinată în mod unic. Așadar, din ipoteza că $\widehat{AOB}$ are o bisectoare rezultă că aceasta este unică. Rămîne să arătăm existența bisectoarei. Construim conform axiomei **U.2.** semidreapta $|OC'$ astfel ca $m(\widehat{AOC'}) = \frac{\alpha}{2}$ și B, C' să fie de aceeași parte a dreptei OA. Din teorema 7 b rezultă că $|OC' \subset \text{Int}\ \widehat{AOB}$ și astfel $m(\widehat{AOC'}) + m(\widehat{C'OB}) = m(\widehat{AOB})$; deci $m(\widehat{C'OB}) = \frac{\alpha}{2}$. Prin urmare $[OC'$ este bisectoarea lui $\widehat{AOB}$.

Definiție. Se numește *unghi drept* orice unghi, care este congruent cu un suplement al său (fig. I.39).

Din axioma **U.3.** rezultă imediat:

Un unghi este drept dacă și numai dacă măsura lui este 90. De aici obținem:

Un unghi congruent cu un unghi drept este un unghi drept.

Definiții. Spunem că semidreptele $[OA$ și $[OB$ sînt *perpendiculare* și scriem $[OA \perp [OB$ dacă $\widehat{AOB}$ este un unghi drept. În acest caz vom spune că OA și OB sînt *drepte perpendiculare* sau *drepte ortogonale* și vom scrie $OA \perp OB$ (și $[OA] \perp [OB]$).

Un unghi propriu mai mic (mare) decît un unghi drept se numește *ascuțit (obtuz).*

Demonstrați cu ajutorul axiomei **U.2**:

Teorema 9. Fie d o dreaptă și $O \in d$. Prin punctul O trece o singură dreaptă perpendiculară pe d.

(Existența și unicitatea perpendicularei ridicate pe o dreaptă, într-un punct al ei.)

Exerciții

13. Dacă $\hat{hk} \equiv \hat{lm}$, atunci un suplement al lui $\hat{hk}$ este congruent cu orice suplement al lui $\hat{lm}$.

14. Fie $[OC$ bisectoarea unghiului propriu $\widehat{AOB}$, iar $[OD$, $[OE$ bisectoarele unghiurilor $\widehat{AOC}$ și $\widehat{COB}$. Să se arate că $[OC$ este bisectoarea unghiului $\widehat{DOE}$.

15. Demonstrați că bisectoarele a două unghiuri opuse la vîrf sînt semidrepte opuse.

◇ **16.** Demonstrați că bisectoarele a două unghiuri adiacente suplementare sînt perpendiculare.

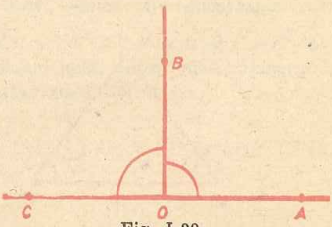


Fig. I.39

17. Dacă semidreptele $|OA$, $|OB$, $|OC$ sînt distincte două cîte două și $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COA}$, atunci bisectoarea unghiului $\widehat{BOC}$ este semidreapta opusă cu $[OA$.

◇ 18. Fie $[OA \perp [OA'$ și $[OB \perp [OB'$. Să se arate că unghiurile $\widehat{AOB}$ și $\widehat{A'OB'}$ sînt congruente sau suplementare.

§ 9. Congruența triunghiurilor

Definiție. Fie ABC și $A'B'C'$ două triunghiuri. Dacă

(1) $$|AB| = |A'B'|, \ |AC| = |A'C'|, \ |BC| = |B'C'|,$$

(2) $$\hat{A} = \hat{A}', \ \hat{B} = \hat{B}', \ \hat{C} = \hat{C}',$$

atunci spunem că există o *congruență* între triunghiurile ABC și $A'B'C'$ și scriem

(3) $$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'.$$

Observație. Relația $\triangle EFG \equiv \triangle LMN$ implică $\hat{E} \equiv \hat{L}$, $\hat{F} \equiv \hat{M}$, $\hat{G} \equiv \hat{N}$, deci nu este indiferentă ordinea în care sînt scrise vîrfurile triunghiurilor. Pentru a scoate în evidență acest lucru, folosim simbolul $\triangle$ care atrage atenția asupra faptului că ordinea literelor este determinată. Perechile de vîrfuri E și L, F și M, G și N se numesc vîrfuri *omoloage* (sau *corespondente*). Perechile de laturi congruente $[EF]$ și $[LM]$; $[EG]$ și $[LN]$; $[FG]$ și $[MN]$ se numesc *laturi omoloage*.

Exemple. Pe figura I.40, între triunghiurile LMN și XYZ există congruența $\Delta LMN \equiv \Delta YXZ$; între PQR și LMN nu există nici o congruență; între PQR și UYW avem chiar două congruențe: $\triangle PQR \equiv \Delta UVW$ și $\triangle PQR \equiv \triangle UWV$. Comparînd triunghiul PQR cu el însuși, pe lîngă congruența trivială $\triangle PQR \equiv \triangle PQR$ observăm și $\triangle PQR \equiv \triangle PRQ$.

Definiție. Triunghiurile ABC și DEF se numesc *congruente* dacă există (cel puțin) o congruență între ele.

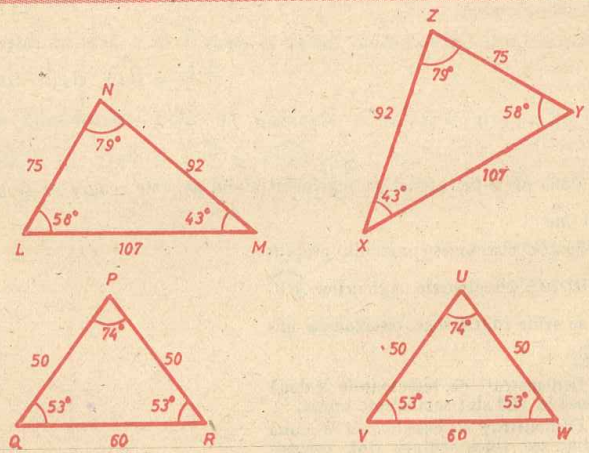


Fig. I.40

Exerciţii

1. Care dintre următoarele relaţii sînt adevărate în cazul figurii I.41:

$\triangle ADE \equiv \triangle BCE$, $\triangle ADE \equiv \triangle EDC$,

$\triangle ADE \equiv \triangle DAE$, $\triangle ADE \equiv \triangle EDA$?

2. Aflaţi şi alte perechi de triunghiuri congruente pe figura I. 41.

◇ **3.** Demonstraţi

$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ şi $\triangle A'B'C' \equiv \triangle A''B''C'' \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle ABC \equiv \triangle A''B''C''$.

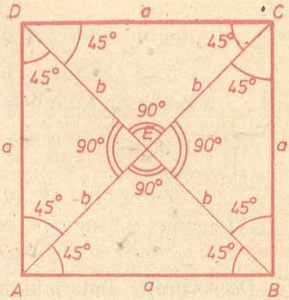


Fig. I.41

Admitem următoarea *axiomă de congruenţă*:

L.U.L. Fie ABC şi $A'B'C'$ două triunghiuri (fig. I.42). Dacă

(5) $$|AB| = |A'B'|, \ |AC| = |A'C'| \text{ şi } \hat{A} = \hat{A'}$$

atunci

$$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'.$$

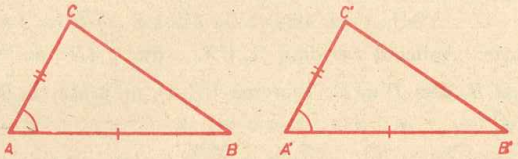


Fig. I.42

Observaţie. Intuitiv, această axiomă se justifică cu ajutorul ideii de „mişcare" („a unui rigid"). În cursul unei astfel de mişcări lungimile segmentelor şi măsurile unghiurilor nu se schimbă, deci prin mişcare un segment se transformă într-un segment congruent, la fel un unghi într-un unghi congruent. Să ne imaginăm că triunghiul $A'B'C'$ este o placă cu o faţă neagră şi cealaltă roşie. Ea se poate deplasa liber pe un plan cu faţa roşie în sus, şi poate fi şi întoarsă cu faţa neagră în sus. Fie triunghiul ABC fixat în planul considerat şi să presupunem că au loc relaţiile (5). Deplasăm placa $A'B'C'$ cu faţa roşie în sus în aşa fel ca A' să acopere pe A, iar B' pe B (ceea ce este posibil căci $[AB]$ şi $[A'B']$ au lungimi egale). Deosebim două cazuri: 1) Placa se găseşte acum în acel semiplan limitat de AB, în care se află C. Atunci: unghiul $\widehat{B'A'C'}$ va acoperi unghiul $\widehat{BAC}$, prin urmare semidreapta $[A'C'$ va acoperi pe $[AC$ şi punctul C' pe C. Rezultă $|BC| = |B'C'|$. $\hat{B} = \hat{B'}$ şi $\hat{C} = \hat{C'}$, deci $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$. 2) Placa se găseşte în semiplanul opus. Întorcîndu-l, ajungem la aceeaşi situaţie ca şi în cazul 1) cu deosebirea că faţa neagră este sus.

Teorema 1. (Teorema de congruenţă U.L.U.) Dacă triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ au

$$|AB| = |A'B'|, \ \hat{A} = \hat{A'}, \ \hat{B} = \hat{B'}$$

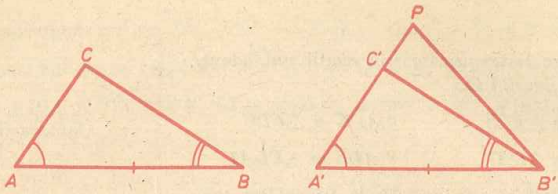


Fig. I.43.

atunci $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ (fig. I.43).

Demonstrație. Determinăm conform teoremei de construcție a unui segment punctul $P \in |A'C'$ astfel ca $|AC| \equiv |A'P|$. Folosind axioma L.U.L. rezultă

(6) $$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'P,$$

deci $\hat{B} \equiv \widehat{A'B'P}$. Pe de altă parte $\hat{B} \equiv \widehat{A'B'C'}$ (din ipoteză) și P, C' sînt de aceeași parte a lui $A'B'$, prin urmare $[B'C' = [B'P$ în virtutea axiomei U.2. Rezultă $C' = P$ și astfel relația (6) devine $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

Teorema 2. (Teorema triunghiului isoscel.) Dacă pentru un triunghi ABC avem $|AB| \equiv |AC|$, atunci $\hat{B} \equiv \hat{C}$, și reciproc (fig. I.44).

Demonstrație. Aplicînd axioma L.U.L., din $|AB| \equiv |AC|$ rezultă $\triangle ABC \equiv \triangle ACB$, deci $\hat{B} \equiv \hat{C}$. Teorema U.L.U. ne arată că $\hat{B} \equiv \hat{C}$ implică $|AB| \equiv |AC|$.

Lemă. Dacă punctele C și C' sînt de o parte și de alta a dreptei AB, $|CA| \equiv |C'A|$ și $|CB| \equiv |C'B|$, atunci $\triangle ABC \equiv \triangle ABC'$.

Demonstrație. Din ipoteză rezultă că segmentul $|CC'|$ intersectează dreapta AB într-un punct O. Deosebim următoarele cazuri:

a) $O \in |AB|$ (fig. I.45, a)). Triunghiurile ACC' și BCC' sînt isoscele, deci conform teoremei 2

(7) $$\widehat{ACC'} \equiv \widehat{AC'C} \text{ și } \widehat{BCC'} \equiv \widehat{BC'C}.$$

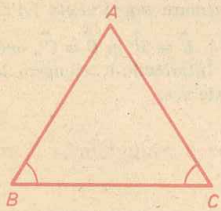


Fig. I.44

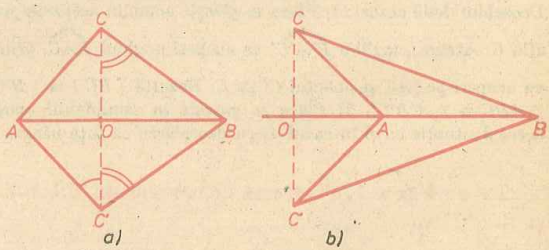


Fig. I.45

Cum $|CC'| \subset \text{Int}\ \widehat{ACB}$, putem aplica teorema de adunare a unghiurilor (§ 8, teorema 6), deci $\widehat{ACB} \equiv \widehat{AC'B}$. Din axioma L.U.L. rezultă $\triangle ABC \equiv \triangle ABC'$.

b) $A \in |OB|$ (fig. I.45, b). Relațiile (7) se deduc ca la punctul a). Din teorema 8 de la § 6 obținem $\widehat{ACB} \equiv \widehat{AC'B}$. Așadar și în acest caz $\triangle ABC \equiv \triangle ABC'$.

c) $B \in |OA|$. Demonstrație ca la punctul b).

d) $O = A$ sau $O = B$. Lema rezultă imediat din teorema 2 și axioma L.U.L.

Teorema 3. (Teorema de congruență L.L.L.) Dacă triunghiurile ABC și $A'B'C'$ au

(8) $|AB| \equiv |A'B'|$, $|AC| \equiv |A'C'|$, $|BC| \equiv |B'C'|$,

atunci $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

Demonstrație. În semiplanul limitat de BC care nu conține punctul A, ducem în conformitate cu teorema de construcție a unui unghi semidreapta $|BP$ astfel ca $\widehat{CBP} = \hat{B'}$, apoi determinăm pe $|BP$ punctul P astfel ca $|BP| \equiv |B'A'|$ (fig. I.46). Atunci $\triangle PBC \equiv \triangle A'B'C'$ în virtutea axiomei L.U.L. Din $|PB| \equiv |A'B'|$, $|PC| \equiv |A'C'|$ și relațiile (8) obținem: $|AB| \equiv |PB|$, $|AC| \equiv |PC|$. Conform lemei avem $\triangle ABC \equiv \triangle PBC$. Cum $\triangle PBC \equiv \triangle A'B'C'$, rezultă că $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

Exerciții

4. Fie $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$. Se iau punctele $D \in |BC|$ și $D' \in |B'C'|$ astfel ca $|BD| \equiv |B'D'|$. Să se arate că $\widehat{BAD} \equiv \widehat{B'A'D'}$ și $\widehat{DAC} \equiv \widehat{D'A'C'}$.

◇ **5.** Fie ABC un triunghi isoscel ($|AB| \equiv |AC|$). Să se arate că bisectoarea unghiului $\hat{A}$ taie segmentul $|BC|$ într-un punct A' și să se arate ca A' este mijlocul lui $|BC|$ și $AA' \perp BC$.

6. În triunghiul ABC avem $|AB| \equiv |AC|$; bisectoarele unghiurilor $\hat{B}$, $\hat{C}$ taie laturile $[AC]$, $[AB]$ în B', C'. Să se arate că $|BB'| \equiv |CC'|$.

7. Fie $ABCDE$ un pentagon convex cu următoarele proprietăți: $|BC| \equiv |ED|$, $|AC| \equiv |AD|$, $\widehat{BCD} \equiv \widehat{CDE}$. Să se arate că $\widehat{ABE} \equiv \widehat{AEB}$.

8. Pe laturile unui triunghi echilateral ABC se consideră punctele $P \in |BC|$, $Q \in |CA|$, $R \in |AB|$ astfel ca $|BP| \equiv |CQ| \equiv |AR|$. Demonstrați că triunghiul PQR este echilateral.

9. Se ia un punct M în interiorul triunghiului isoscel ABC ($|AB| \equiv |AC|$) astfel ca $\widehat{ABM} \equiv \widehat{ACM}$. Să se arate că M se găsește pe bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$.

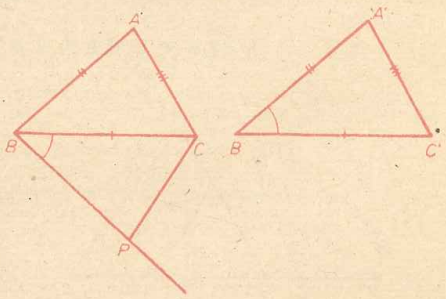


Fig. I.46

Indicație. Se va arăta că BMC este un triunghi isoscel, apoi $\triangle AMB \equiv \triangle AMC$ (L.L.L.).

10. Pe laturile congruente $[AB]$, $[AC]$ ale unui triunghi isoscel se iau punctele D și E astfel ca $|AD| \equiv |AE|$. Să se arate că segmentele $|BE|$ și $|CD|$ au un punct comun și că acesta este situat pe bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$.

11. De o parte și de alta a unei drepte AB se duc semidreptele $[AM$ și $[BN$ care formează cu $[AB$ respectiv $[BA$ unghiuri congruente. Pe aceste semidrepte se iau segmentele congruente $|AC|$ și $|BD|$. Să se arate: a) $|CD|$ și $|AB|$ se intersectează într-un punct O; b) O este mijlocul segmentului $|AB|$.

12. Fie punctul B interior unghiului AOC și A', B', C' cîte un punct pe semidreptele opuse lui $|OA$, $|OB$ $|OC$ astfel ca $|OA| \equiv |OA'|$, $|OB| \equiv |OB'|$, $|OC| \equiv |OC'|$. Se presupune că punctele A, B, C nu sînt coliniare. Să se arate că nici A', B', C' nu sînt coliniare și $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

§ 10. Inegalități geometrice

Unghiul exterior al unui triunghi

Definiție. Un unghi se numește *unghi exterior* al unui triunghi dacă este adiacent cu unul din unghiurile triunghiului și suplementar cu el.

În figura I.47, $|BM$ și $|BC$ sînt semidrepte opuse, unghiurile $\widehat{ABC}$ și $\widehat{ABM}$ sînt adiacente și suplementare, iar $\widehat{ABC}$ este unghi al triunghiului, deci $\widehat{ABM}$ este un unghi exterior al triunghiului ABC.

Un triunghi are șase unghiuri exterioare, cîte două cu același vîrf. Unghiurile exterioare cu același vîrf sînt congruente fiind și opuse la vîrf. Un unghi exterior al triunghiului ABC, cu vîrful în A, este neadiacent cu unghiurile $\hat{B}$ și $\hat{C}$ ale triunghiului (fig. I.48).

Teorema 1. (Teorema unghiului exterior.) Un unghi exterior al unui triunghi este mai mare decît oricare din unghiurile triunghiului, neadiacent cu acel unghi.

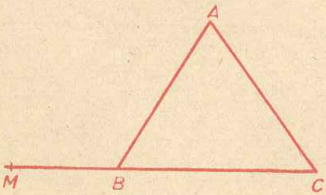


Fig. I.47

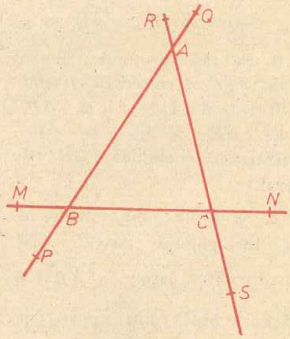


Fig. I.48

Demonstrație. Fie triunghiul ABC și $\widehat{CAM}$ un unghi exterior (fig. I.49). Se va arăta că $m(\widehat{CAM}) > m(\widehat{ACB})$. D fiind mijlocul segmentului $|AC|$, pe semidreapta opusă semidreptei $|DB$ se consideră punctul E astfel încît $|BD| \equiv |DE|$. Din ex. 6, § 6 se știe că $E \in \text{Int } \widehat{CAM}$, deci din teorema semidreptei interioare unui unghi rezultă că $\widehat{CAE} < \widehat{CAM}$; pe de altă parte $\triangle DAE \equiv \triangle DCB$ (din L.U.L.), deci $m(\widehat{ACB}) \equiv m(\widehat{DAE}) < m(\widehat{CAM})$. Pentru a arăta că $m(\widehat{CAM}) > m(\widehat{ABC})$ se face un raționament analog, folosind însă compararea cu celălalt unghi exterior cu vîrful în A.

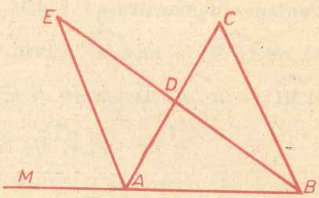


Fig. I.49

◇ *Aplicație.* Într-un triunghi cu două laturi necongruente, laturii cu lungimea mai mare i se opune unghiul mai mare și reciproc.

Demonstrație. În triunghiul ABC cu $\|AC\| > \|AB\|$ (fig. I.50), se consideră $D \in |AC|$ astfel încît $|AD| \equiv |AB|$. Atunci ABD este triunghi isoscel și $\widehat{ABD} \equiv \widehat{ADB} > \widehat{ACB}$, $\widehat{ADB}$ fiind unghi exterior triunghiului BDC. Pentru că $D \in |AC|$, $|BD \subset \text{Int } \widehat{ABC}$, deci $\widehat{ABC} > \widehat{ABD} > \widehat{ACB}$. Demonstrația afirmației reciproce se face prin reducere la absurd.

Teorema 2. Suma lungimilor a două laturi ale unui triunghi este mai mare decît lungimea celei de a treia laturi.

Demonstrație. ABC fiind un triunghi (fig. I.51), ne propunem să demonstrăm de exemplu că

$$\|AB\| + \|BC\| > \|AC\|.$$

Fie $M \in AB$, astfel încît $B \in |AM|$ și $|BC| \equiv |BM|$. Inegalitatea care trebuie demonstrată revine la:

$$\|AB\| + \|BM\| = \|AM\| > \|AC\|.$$

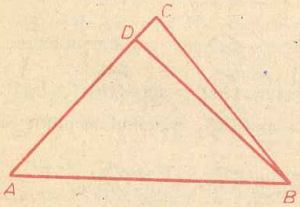


Fig. I.50

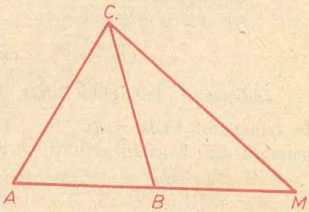


Fig. I.51

Pentru a demonstra că $\| AM \| > \| AC \|$ este suficient să se demonstreze că $m(\widehat{ACM}) > m(\widehat{AMC})$. Prin construcție, triunghiul CBM este isoscel deci $\widehat{AMC} \equiv \widehat{BCM}$. Deoarece $B \in \text{Int } \widehat{ACM}$,

$$m(\widehat{ACM}) > m(\widehat{BCM}) = m(\widehat{AMC}),$$

ceea ce demonstrează teorema.

Observație. Pentru un triunghi ABC au loc inegalitățile

$$\| AB \| + \| BC \| > \| AC \|,$$
$$\| AC \| + \| BC \| > \| AB \|,$$

care sînt echivalente cu

$$\| BC \| > \| AC \| - \| AB \|,$$
$$\| BC \| > \| AB \| - \| AC \| = -(\| AC \| - \| AB \|).$$

Deci

$$\| BC \| > | \| AC \| - \| AB \| |$$

sau: lungimea oricărei laturi a unui triunghi este mai mare decît valoarea absolută a diferenței lungimilor celorlalte două laturi.

Vom reaminti următoarele noțiuni: triunghiul cu un unghi drept se numește *triunghi dreptunghic*. Laturile care formează unghiul drept se numesc *catete*, iar latura opusă unghiului drept se numește *ipotenuză*.

Perimetrul unui poligon este suma lungimilor laturilor sale.

Exerciții

◇ **1.** Două drepte distincte, perpendiculare pe aceeași dreaptă, nu sînt concurente.

◇◇ **2.** Dacă un triunghi are un unghi drept (sau obtuz), celelalte două unghiuri sînt ascuțite.

◇ **3.** Într-un triunghi dreptunghic, lungimea ipotenuzei este mai mare decît lungimea oricărei catete.

4. Fie triunghiul ABC și M, N două puncte astfel încît $B \in |MC|$, $C \in |BN|$. Să se demonstreze că $m(\widehat{MAN}) < m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C})$.

5. Să se arate că oricare ar fi unghiurile proprii $\hat{hk}$ și $\hat{pq}$, există un triunghi ABC astfel încît $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) > m(\hat{hk})$ și $m(\hat{A}) < m(\hat{pq})$.

6. Fie patrulaterul convex $ABCD$ în care $|AD|$ este latura cea mai lungă și $|BC|$ cea mai scurtă; atunci:

$$m(\widehat{ABC}) > m(\widehat{ADC}) \text{ și } m(\widehat{BCD}) > m(\widehat{BAD}).$$

Indicație. În triunghiul ABD, $\| AD \| > \| AB \|$, deci $m(\widehat{ABD}) > m(\widehat{ADB})$ (fig. I. 52). În triunghiul BCD, $\| BC \| < \| CD \|$, deci $m(\widehat{DBC}) > m(\widehat{BDC})$. Adunînd membru cu membru cele două inegalități, se obține:

$$m(\widehat{ABD}) + m(\widehat{DBC}) > m(\widehat{ADB}) + m(\widehat{BDC}) \text{ sau } m(\widehat{ABC}) > m(\widehat{ADC}).$$

La fel se demonstrează și cea de a doua inegalitate.

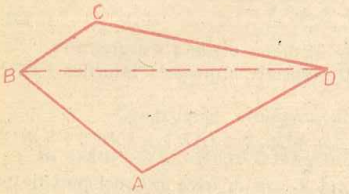


Fig. I.52

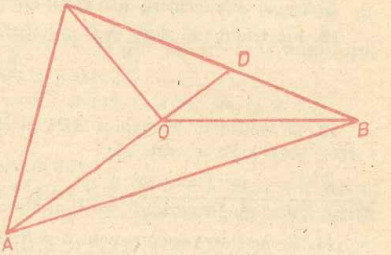


Fig. I.53

7. În triunghiul ABC se consideră punctele $A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$, $C_1 \in AB$ astfel ca $AA_1 \perp BC$, $BB_1 \perp AC$, $CC_1 \perp AB$. Să se arate că:

$$\| AA_1 \| + \| BB_1 \| + \| CC_1 \| < \| AB \| + \| AC \| + \| BC \|.$$

8. Se consideră triunghiul ABC în care $\| AB \| < \| AC \|$ și punctul D, astfel încît $C \in | AD |$. Să se arate că pentru orice punct M, $M \in | BC |$ are loc:

$$m(\widehat{ABM}) + m(\widehat{BMA}) > m(\widehat{CMD}) + m(\widehat{MDC}).$$

9. Fie triunghiul ABC și $O \in \text{Int } ABC$. Să demonstreze că

$$\frac{\| BC \| + \| CA \| + \| AB \|}{2} < \| OA \| + \| OB \| + \| OC \| < \| BC \| + \| CA \| + \| AB \|.$$

Indicație. În triunghiurile OAB, OAC, OBC au loc:

$\| OA \| + \| OB \| > \| AB \|$, $\| OA \| + \| OC \| > \| AC \|$, $\| OB \| + \| OC \| > \| BC \|$ (fig. I.53). Adunînd membru cu membru se obține:

$$\| OA \| + \| OB \| + \| OC \| > \frac{1}{2} (\| AB \| + \| AC \| + \| BC \|).$$

Pentru a doua inegalitate fie $\{D\} = AO \cap BC$. Avem $D \in | BC |$ și inegalitățile $\| AO \| + \| OC \| < \| AO \| + \| OD \| + \| DC \| = \| AD \| + \| DC \|$, $\| AD \| < \| AB \| + \| BD \|$; rezultă că $\| AO \| + \| OC \| < \| AB \| + \| BD \| + \| DC \|$ sau $\| AO \| + \| OC \| < \| AB \| + \| BC \|$. Se obțin în mod analog alte două inegalități și apoi se adună membru cu membru.

◇ **10.** Lungimea unui segment este mai mică decît lungimea oricărei linii poligonale care are extremitățile segmentului ca vîrfuri.

Indicație. Dacă linia poligonală are două laturi atunci se aplică direct teorema 2.

Dacă linia poligonală are vîrfurile A, M_1, M_2,..., M_n, B, se scriu inegalitățile:
$\| AB \| < \| AM_1 \| + \| M_1B \|$, $\| M_1B \| \leqslant \| M_1M_2 \| + \| M_2B \|$,..., $\| M_{n-2}B \| \leqslant \| M_{n-2}M_{n-1} \| + \| M_{n-1}B \|$, $\| M_{n-1}B \| < \| M_{n-1}M_n \| + \| M_nB \|$.
Se adună membru cu membru și se obține:

$\| AB \| + \| M_1B \| + \ldots + \| M_{n-1}B \| < \| AM_1 \| + \| M_1M_2 \| + \ldots + \| M_{n-1}M_n \| + \| M_nB \| + \| M_1B \| + \| M_2B \| + \ldots + \| M_{n-1}B \|$, sau

$$\| AB \| < \| AM_1 \| + \| M_1M_2 \| + \ldots + \| M_nB \|.$$

11*. Se consideră poligoanele convexe P' și P''. Dacă suprafața poligonală determinată de P' este inclusă în suprafața poligonală determinată de P'', atunci perimetrul poligonului P' este mai mic sau egal decît perimetrul poligonului P''.

Indicație. Se consideră întîi cazul cînd P' și P'' au o latură comună.

12. Fie triunghiul ABC și D mijlocul laturii $|BC|$. Să se arate că:

$$\|AD\| < \frac{\|AB\| + \|AC\|}{2}.$$

13. Se consideră triunghiul ABC și A_1, B_1, C_1 respectiv mijloacele laturilor $|BC|$, $|AC|$, $|AB|$. Să se arate că:

$$\frac{\|AB\| + \|AC\| + \|BC\|}{2} < \|AA_1\| + \|BB_1\| + \|CC_1\| < \|AB\| + \|AC\| + \|BC\|.$$

14. Se consideră două puncte A și B și o dreaptă d care nu trece prin nici unul dintre ele. Să se determine un punct C, $C \in d$, astfel ca oricare ar fi M, $M \in d$, să aibă loc:

$$\|AC\| + \|CB\| \leqslant \|AM\| + \|MB\|.$$

Indicație. Se disting două cazuri: a) dreapta d nu separă punctele A și B. Fie $AA' \perp d$, $\{O\} = AA' \cap d$, $|OA| \equiv |OA'|$ și $O \in |AA'|$; A' și B fiind în semiplane opuse, există C, $|A'B| \cap d = \{C\}$ și

$$\|A'B\| = \|A'C\| + \|BC\| = \|AC\| + \|BC\|;$$

fie $M \in d$, $M \neq C$

$$\|A'M\| + \|MB\| > \|A'B\| = \|AC\| + \|CB\|;$$

b) dacă d separă pe A și B, $\{C\} = |AB| \cap d$.

15. (Problema biliardului.) Fie două mingi de biliard situate în punctele A și B și $|CD|$ o latură a mesei. Să se determine punctul M, $M \in |CD|$ în care trebuie să atingă latura $|CD|$ după lovire una din bile pentru ca să o ciocnească în continuare pe cealaltă, știind că $\widehat{AMC} \equiv \widehat{BMD}$.

§ 11. Alte cazuri de congruență ale triunghiurilor

Teorema de congruență a triunghiurilor L.U.U.

Teoremă 1. Dacă triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sînt astfel încît $|AB| \equiv |A'B'|$, $\hat{A} \equiv \hat{A'}$ și $\hat{C} \equiv \hat{C'}$ atunci $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

Demonstrație. Pe semidreapta $|A'C'$ se consideră punctul C'' astfel încît $|AC| \equiv |A'C''|$ (fig. I.54). Atunci $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C''$ (din L.U.L.).

a) Dacă $C' = C''$, teorema este demonstrată.

b) Dacă $C'' \in |A'C'|$, atunci $\widehat{A'C''B'} \equiv \widehat{ACB} \equiv \widehat{A'C'B'}$, ceea ce nu este posibil deoarece $\widehat{A'C''B'}$ este unghi exterior triunghiului $B'C'C''$.

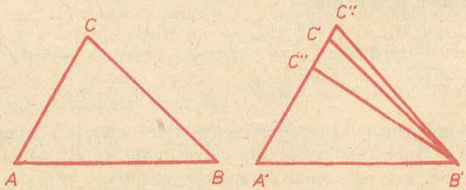


Fig. I.54

c) Dacă $C' \in |A'C''|$ atunci $\widehat{A'C''B'} \equiv \widehat{ACB} \equiv \widehat{A'C'B'}$, ceea ce de asemenea nu este posibil întrucît $\widehat{A'C'B'}$ este unghi exterior triunghiului $B'C'C''$.

Deci singura poziție posibilă este $C' = C''$ adică $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

Congruența triunghiurilor dreptunghice

În cazul particular al triunghiurilor dreptunghice, teoremele de congruență se pot formula astfel: se consideră triunghiurile ABC și $A'B'C'$, $\hat{A} \equiv \hat{A}' \in 90°$.

Cazul I (*C.C.*) Dacă $|AB| \equiv |A'B'|$ și $|AC| \equiv |A'C'|$ atunci triunghiurile sînt congruente.

Cazul II (*C.U.*) Dacă $|AB| \equiv |A'B'|$ și $\hat{B} \equiv \hat{B}'$, atunci triunghiurile sînt congruente.

Cazul II' (*C.U.*) Dacă $|AB| \equiv |A'B'|$ și $\hat{C} \equiv \hat{C}'$ atunci triunghiurile sînt congruente.

Cazul III (*I.U.*) Dacă $|BC| \equiv |B'C'|$ și $\hat{B} \equiv \hat{B}'$ atunci triunghiurile sînt congruente.

Pentru triunghiurile dreptunghice există și un caz special de congruență.

Teoremă 2. (Cazul IV.C.I.) Dacă triunghiurile ABC și $A'B'C'$ cu $m(\hat{A}) = m(\hat{A}') = 90$, verifică condițiile $|AB| \equiv |A'B'|$ și $|BC| \equiv |B'C'|$, atunci triunghiurile sînt congruente.

Demonstrație. Pe semidreapta $|A'C'$ se consideră punctul C'' astfel încît $|AC| \equiv |A'C''|$ (fig. I.55). Atunci $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C''$ (din cazul C.C.).

a) Dacă $C' = C''$, teorema este demonstrată.

b) Dacă $C'' \in |A'C'|$ atunci $|B'C''| \equiv |BC| \equiv |B'C'|$ și triunghiul $B'C''C'$ este isoscel, $\widehat{B'C'C''} \equiv \widehat{B'C''C'}$. Dar $\widehat{B'C''C'}$ este exterior triunghiului $A'B'C''$ deci $\widehat{B'C'C''} \equiv \widehat{B'C''C'} > \hat{A}'$ ceea ce nu este posibil pentru că triunghiul $B'C'C''$ nu poate avea două unghiuri obtuze.

c) Dacă $C' \in |A'C''|$, în mod analog rezultă că triunghiul $B'C''C'$ este isoscel; dar $\widehat{B'C'C''}$ este exterior triunghiului $A'B'C'$ deci $\widehat{B'C''C'} \equiv \widehat{B'C'C''} > \hat{A}$, ceea ce de asemenea nu este posibil.

Prin urmare singura poziție posibilă este $C' = C''$, deci $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

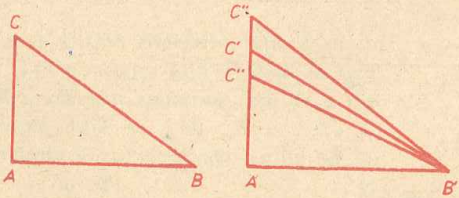


Fig. I.55

Exerciţii

1. Fie triunghiurile isoscele ABC şi $A'B'C'$ ($|AB| \equiv |AC|$, $|A'B'| \equiv |A'C'|$), în care $|AB| \equiv |A'B'|$ şi $\widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'}$. Să se demonstreze că $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

2. Dacă în patrulaterul convex $ABCD$, $\hat{A} \equiv \hat{C}$ şi $[BD$ este bisectoarea unghiului $\hat{B}$, atunci $[DB$ este bisectoarea unghiului $\hat{D}$.

3. Dacă în triunghiul ABC, $AA' \perp BC$, $BB' \perp AC$, $A' \in |BC|$, $B' \in |AC|$ şi $|AA'| \equiv |BB'|$, atunci triunghiul este isoscel.

4. Să se arate că dacă $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ şi $AA_1 \perp BC$, $DD_1 \perp EF$, $A_1 \in BC$, $D_1 \in EF$, atunci $|AA_1| \equiv |DD_1|$.

5. Se consideră patrulaterul convex $ABCD$ în care $m(\hat{B}) = m(\hat{D}) = 90$ şi punctele $M \in |BC|$, $N \in |DC|$. Să se arate că dacă $|AM| \equiv |AN|$ şi $\widehat{BAM} \equiv \widehat{DAN}$, atunci $|BC| \equiv |DC|$.

§ 12. Distanţa de la un punct la o dreaptă

Teoremă 1. Fiind dată dreapta d şi punctul M, $M \notin d$, există o singură dreaptă d', astfel încît $M \in d'$ şi $d' \perp d$.

Demonstraţie. a) *Existenţa.* Se consideră A şi B, $A \in d$, $B \in d$, $A \neq B$ (fig. I.56). Dacă $MA \perp d$ sau $MB \perp d$, existenţa perpendicularei din M pe d este demonstrată. În caz contrar, fie în semiplanul determinat de d care nu-l conţine pe M, semidreapta $|AP$ astfel încît $\widehat{MAB} \equiv \widehat{PAB}$ şi $C \in |AP$, $|AM| \equiv |AC|$. M şi C fiind în semiplane opuse faţă de d, există punctul M', $d \cap |MC| = \{M'\}$. $\triangle AM'M \equiv \triangle AM'C$ (din L.U.L.) deci $\widehat{AM'C} \equiv \widehat{AM'M}$ şi $\widehat{AM'C}$, $\widehat{AM'M}$ suplementare. Rezultă că $m(\widehat{AM'C}) = m(\widehat{AM'M}) = 90$ ceea ce demonstrează existenţa perpendicularei.

b) *Unicitatea.* Se arată prin reducere la absurd (fig. I.57). Dacă $MA \perp d$, $MB \perp d$, $A \in d$, $B \in d$, $A \neq B$, atunci triunghiul MAB are două unghiuri drepte ceea ce nu este posibil.

a) şi b) demonstrează teorema.

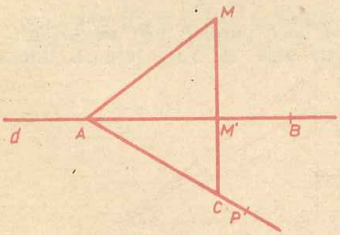


Fig. I.56

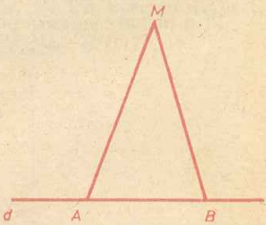


Fig. I.57

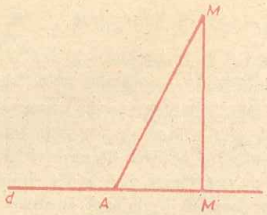


Fig. I.58

Fig. I.59

Punctul de intersecție al perpendicularei pe d din M, cu d, se numește *piciorul perpendicularei* duse din M pe dreapta d.

Teorema 2. Se consideră dreapta d, punctul M, $M \notin d$ și M' piciorul perpendicularei din M pe d. Atunci, oricare ar fi punctul A, $A \in d$, $A \neq M'$, are loc $\| MM' \| < \| MA \|$.

Demonstrație. Triunghiul AMM' este dreptunghic (fig. I.58), $| MM' |$ fiind o catetă, lungimea catetei este mai mică decît lungimea ipotenuzei $| MA |$.

Din teoremele 1 și 2 rezultă că există pe dreapta d un punct unic M', astfel încît $\| MM' \| \leqslant \| MA \|$ oricare ar fi punctul A, $A \in d$.

Definiție. Se numește *distanța de la un punct la o dreaptă* căreia nu-i aparține, cea mai mică distanță dintre acel punct și punctele dreptei.

Din cele de mai sus rezultă că distanța de la un punct la o dreaptă este distanța dintre punct și piciorul perpendicularei duse din punct pe dreaptă. Se notează $d(M, d) = \min\limits_{P \in d} \| MP \| = d(M, M') = \| MM' \|$, unde $M' \in d$ și $MM' \perp d$.

Dacă $M \in d$, se definește $d(M, d) = 0$.

Uneori se va utiliza și noțiunea de distanță de la un punct la o semidreaptă, înțelegîndu-se distanța de la punct la suportul semidreptei.

Definiții. Punctele A și A' se numesc *simetrice față de dreapta* d, dacă $A = A' \in d$ sau $AA' \perp d$ și mijlocul lui $| AA' |$ se află pe d. În acest caz, punctul A' se numește *simetricul lui A față de d*.

Punctele A și A' se numesc *simetrice față de punctul O* dacă O este mijlocul lui $| AA' |$ sau $A = A' = O$. Mulțimile de puncte $\mathcal{M}$ și $\mathcal{M}'$ se numesc *simetrice față de dreapta d* (sau *punctul O*) dacă $\mathcal{M}'$ este mulțimea simetricelor punctelor din $\mathcal{M}$ față de dreapta d (sau față de punctul O).

Fig. I.60

În figura I.59 A și A' sînt simetrice față de d, în figura I.60 A și A' sînt simetrice față de O iar în figurile I.61 și I.63 $\mathcal{M}$ și $\mathcal{M}'$ sînt simetrice față de d respectiv O. În figurile I.62 și I.64 $\mathcal{M} = \mathcal{M}'$. În acest caz, d se numește *o axă de simetrie* a lui $\mathcal{M}$ iar O centru de simetrie a lui $\mathcal{M}$.

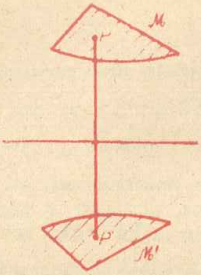


Fig. I.61

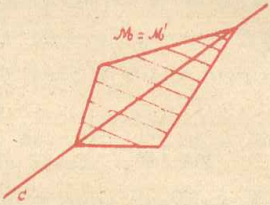


Fig. I.62

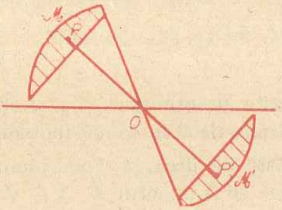


Fig. I.63

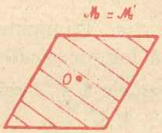


Fig. I.64

Exerciţii

1. Fie triunghiul ABC şi A_1 piciorul perpendicularei duse din A pe BC. Să se demonstreze că dacă $\hat{B}$ şi $\hat{C}$ sînt ascuţite, atunci $A_1 \in |BC|$, iar dacă $\hat{B}$ este obtuz, atunci $B \in |A_1C|$.

2. Se consideră o dreaptă d, punctul $A, A \notin d$ şi A' piciorul perpendicularei din A pe d. Să se demonstreze că dacă punctele B şi C, $B \in d$, $C \in d$ sînt astfel încît $\|A'B\| < \|A'C\|$ atunci $\|AB\| < \|AC\|$. Să se formuleze şi să se demonstreze afirmaţia reciprocă acesteia.

3. Dacă ABC este un triunghi isoscel cu $|AB| \equiv |AC|$, atunci pentru orice punct $D \in |BC|$, are loc $\|AD\| < \|AB\|$.

4. Dacă ABC este un triunghi isoscel cu $|AB| \equiv |AC|$ şi $D \in BC$ astfel încît $\|AD\| < \|AB\|$, atunci $D \in |BC|$.

◇ **5.** Se consideră triunghiul ABC în care $\|AB\| < \|AC\|$. Să se arate că pentru orice punct $D \in |BC|$, $\|AD\| < \|AC\|$.

6. Fie A un punct situat pe o dreaptă d, $B \notin d$ şi $C \in AB$. Se notează cu B' şi C' simetricele lui B şi C faţă de dreapta d. Să se demonstreze că punctele A, B', C' sînt coliniare.

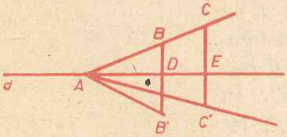


Fig. I.65

Indicaţie. Fie D şi E picioarele perpendicularelor din B şi C pe d. Se consideră două cazuri: 1) $C \in |AB|$ (fig. I.65.). Are loc: $|BD| = |DB'|$, $|CE| \equiv |EC'|$ şi astfel $\triangle ABD \equiv \triangle AB'D$, $\triangle ACE \equiv \triangle AC'E$. Rezultă $\widehat{EAB'} \equiv EAC'$ şi deoarece B', C' sînt de aceeaşi parte a lui d, din teorema de construcţie a unui unghi se deduce că $|AB'| = |AC'|$.

2) $A \in |BC|$. Raţionînd în mod analog, $\widehat{DAB'} \equiv \widehat{EAC'}$ şi din teorema 3, § 7, rezultă că $|AB'|$ şi $|AC'|$ sînt semidrepte opuse (fig. I.66).

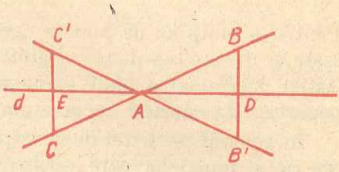


Fig. I.66

7. Să se arate că: a) simetrica unei drepte faţă de o altă dreaptă, pe care o taie, este tot o dreaptă. b) O dreaptă admite o infinitate de axe de simetrie. Să se afle aceste axe. c) Simetricul unui segment faţă de o dreaptă este un segment de aceeaşi lungime. d) Să se afle axele de simetrie ale unui segment.

§ 13. Mediatoare. Bisectoare. Locuri geometrice

Definiţie. *Mediatoarea* unui segment este dreapta perpendiculară pe segment dusă prin mijlocul segmentului.

Existenţa şi unicitatea mediatoarei rezultă din faptul că mijlocul unui segment există şi este unic, perpendiculara printr-un punct al dreptei pe dreaptă există şi este unică.

Teorema 1. Orice punct de pe mediatoarea unui segment este egal depărtat de capetele segmentului.

Demonstraţie. Se consideră $|AB|$, $O \in |AB|$, $|OA| \equiv |OB|$, şi M un punct de pe mediatoarea segmentului $|AB|$ (fig. I.67). Dacă $M = O$, afirmaţia este evidentă. Dacă $M \neq O$, $\triangle AOM \equiv \triangle BOM$ (C.C.) şi rezultă $|AM| \equiv |BM|$ deci $\|AM\| \equiv \|BM\|$.

Teorema 2. (Reciprocă.) Orice punct egal depărtat de capetele unui segment aparţine mediatoarei segmentului.

Demonstraţie. Se consideră $|AB|$ şi M un punct astfel încît $|MA| \equiv |MB|$ (fig. I.68). Dacă $M \in AB$ atunci M este mijlocul segmentului $|AB|$ şi aparţine mediatoarei. Dacă $M \notin AB$, fie O mijlocul segmentului $|AB|$. $\triangle AOM \equiv \triangle BOM$ (din L.L.L.). Deci $\widehat{AOM} \equiv \widehat{BOM}$. Deoarece cele două unghiuri sînt şi suplementare, rezultă că $MO \perp AB$, ceea ce înseamnă că MO este mediatoarea segmentului $|AB|$.

Din cele două teoreme rezultă că mediatoarea unui segment este mulţimea punctelor care au proprietatea că sînt egal depărtate de capetele segmentului.

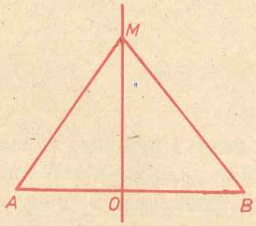


Fig. I.67

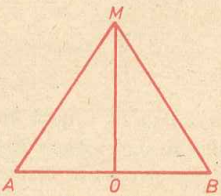


Fig. I.68

Pentru o mulțime de puncte care verifică o anumită proprietate $\mathcal{P}$ se folosește și denumirea de „*locul geometric* al punctelor care au proprietatea $\mathcal{P}$". Astfel **mediatoarea unui segment este locul geometric al punctelor egale depărtate de capetele segmentului.**

În general pentru a demonstra că o mulțime $\mathcal{M}$ de puncte este locul geometric al punctelor care verifică o proprietate $\mathcal{P}$ se va demonstra că orice element al mulțimii $\mathcal{M}$ verifică proprietatea $\mathcal{P}$ și că orice punct care verifică proprietatea $\mathcal{P}$ aparține mulțimii $\mathcal{M}$.

Un alt exemplu de mulțime de puncte care verifică o anumită proprietate este bisectoarea unui unghi.

Teorema 3. Bisectoarea unui unghi propriu este locul geometric al punctelor din interiorul unghiului egal depărtate de laturile unghiului, reunit cu vîrful unghiului.

Demonstrație. a) Se va arăta că orice punct de pe bisectoare are proprietatea enunțată (fig. I.69). Fie $\hat{hk}$ un unghi, O vîrful unghiului, s bisectoarea lui și $M \in s - \{O\}$. Se notează cu A și B picioarele perpendicularelor din M pe suporturile lui h și k. $A \in h$ căci altfel triunghiul OAM ar avea un unghi obtuz și unul drept; analog, $B \in k$. $\triangle OAM \equiv \triangle OBM$ (din I.U.); rezultă $|MA| \equiv |MB|$, deci $d(M, h) = d(M, k)$.

b) Se va arăta că orice punct M cu proprietatea $d(M,h) = d(M,k)$ și $M \in \operatorname{Int}\hat{hk}$, aparține bisectoarei unghiului $\hat{hk}$. Dacă A și B sînt picioarele perpendicularelor din M pe suporturile lui h și k, se va demonstra că $A \in h$ și $B \in k$. Presupunînd contrariul, de exemplu $A \notin h$, rezultă că segmentul $|AM|$ intersectează latura k, deoarece din exercițiul 13, § 6 deducem că $\|AM\|$ intersectează una din laturile unghiului și aceasta nu poate fi decît k. Fie $\{C\} = |AM| \cap k$. Deoarece $\|MC\| \geqslant \|MB\|$ (teorema 2, § 12) și $\|AM\| > \|CM\|$, rezultă că $\|AM\| > \|MB\|$ ceea ce contrazice ipoteza. La fel se arată că $B \in h$. Din $|MA| \equiv |MB|$ rezultă că $\triangle OAM \equiv \triangle OBM$ (C.I.), deci $\widehat{AOM} \equiv \widehat{BOM}$ și rezultă că $|OM$ este bisectoarea unghiului $\hat{hk}$.

Pe baza proprietăților de loc geometric ale bisectoarelor și mediatoarelor se pot demonstra următoarele două teoreme referitoare la concurența bisectoarelor și mediatoarelor unui triunghi.

Teorema 4. Bisectoarele unghiurilor unui triunghi sînt concurente.

Demonstrație. Din teorema transversalei rezultă că bisectoarele unghiurilor $\hat{A}$ și $\hat{B}$ intersectează pe $|BC|$ și $|AC|$ în cîte un punct D respectiv E (fig. I.70). Din aceeași teoremă rezultă că există punctul I, $\{I\} = |AD| \cap$

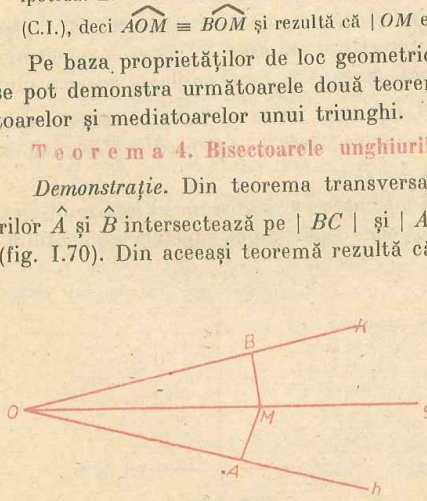


Fig. I.69

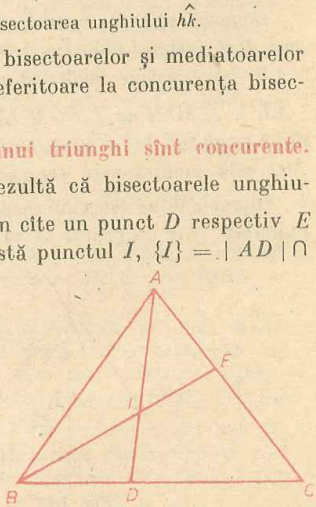


Fig. I.70

$\cap \mid BE = \mid BE \mid \cap \mid AD \mid$. Aşadar $I \in$ $\in$ Int $\widehat{ACB}$. Din proprietatea punctelor bisectoarei unui unghi rezultă $d(I, BC) = d(I, AB)$, $d(I, AB) = d(I, AC)$ şi deci $d(I, BC) = d(I, AC)$ şi pentru că $I \in$ Int $\widehat{ACB}$ rezultă că $[CI$ este bisectoarea unghiului $\hat{C}$.

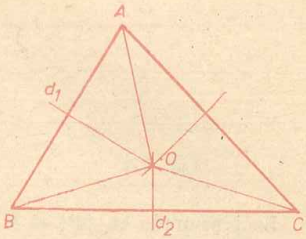


Fig. I.71

Teorema 5. Dacă două dintre mediatoarele laturilor unui triunghi sînt concurente, atunci cele trei mediatoare ale laturilor triunghiului sînt concurente.

Demonstraţie. Fie triunghiul ABC, d_1 şi d_2 mediatoarele segmentelor $\mid AB \mid$ respectiv $\mid BC \mid$, $\{O\} = d_1 \cap d_2$ (fig. I.71.) Din proprietatea punctelor mediatoarei rezultă că $\mid OA \mid \equiv \mid OB \mid$, $\mid OB \mid \equiv \mid OC \mid$ deci $\mid OA \mid \equiv \mid OC \mid$, ceea ce înseamnă că O aparţine mediatoarei segmentului $\mid AC \mid$.

Se observă că această teoremă nu asigură faptul că în orice triunghi mediatoarele laturilor sînt concurente, ci exprimă doar o condiţie suficientă pentru concurenţă. Încă nu se poate afirma, cu certitudine, că mediatoarele a două laturi ale unui triunghi sînt concurente.

Exerciţii

◇**1.** Fie punctele distincte A şi B. Să se afle locul geometric al punctelor M pentru care $AM \perp AB$.

2. Fie punctele distincte A şi B şi numărul real $\alpha \in (0, 180)$. Să se afle locul geometric al punctelor M pentru care $(\widehat{MAB}) = \alpha$.

3. Fie triunghiul ABC şi cele două unghiuri exterioare ale triunghiului care au ca latură $[BC$ respectiv $[CB$. Să se demonstreze că dacă bisectoarele celor două unghiuri exterioare sînt concurente într-un punct M, atunci M aparţine şi bisectoarei unghiului $\hat{A}$.

4. Se consideră punctele A şi B şi o dreaptă d, $A \notin d$, $B \notin d$. Să se determine un punct C, $C \in d$ astfel ca $\mid AC \mid \equiv \mid BC \mid$. Discuţie.

5. Fie unghiul $\widehat{hk}$ şi două puncte A şi B. Să se determine un punct C astfel ca $\mid AC \mid \equiv \mid CB \mid$ şi $d(C, h) = d(C, k)$.

§ 14. Drepte nesecante

Din axiomele de incidenţă a rezultat că două drepte distincte au cel mult un punct comun, fără să se pună problema dacă există două drepte care să nu aibă nici un punct comun. Răspunsul la această întrebare este afirmativ şi este justificat în următoarea:

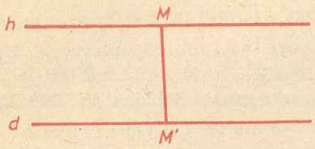


Fig. I.72

Teorema 1. Pentru orice dreaptă d şi orice punct $M \notin d$, există o dreaptă h, astfel încît $M \in h$ şi $d \cap h = \emptyset$.

Demonstraţie. Fie dreapta d, $M \notin d$ şi $MM' \perp d$, $M' \in d$; se consideră dreapta h, $M \in h$ şi $h \perp MM'$. Se va arătà că h şi d sînt nesecante, prin reducere la absurd (fig. I.72).

Se presupune că $\{P\} = h \cap d$. Dacă M, M', P sînt necoliniare atunci triunghiul $MM'P$ are două unghiuri drepte ceea ce este absurd. Dacă M, M' P sînt coliniare atunci $h = d$ (pentru că $h = MP$ şi $d = M'P$), deci $M \in d$, ceea ce contrazice ipoteza.

Observaţie. Din teoremă rezultă că, fiind dată o dreaptă d, prin orice punct M al planului care nu aparţine dreptei d, trece cel puţin o dreaptă nesecantă cu d, dar nu exclude existenţa mai multor drepte cu aceeaşi proprietate.

Utilizînd ideea din demonstraţia teoremei 1 se pot stabili condiţii pentru ca două drepte să nu fie concurente. Înainte de aceasta se vor introduce cîteva noţiuni.

Definiţie. O dreaptă se numeşte *secantă* (sau transversală) pentru două sau mai multe drepte dacă intersectează fiecare din aceste drepte în puncte distincte.

În figura I.73 dreapta d este o transversală pentru d_1, d_2, d_3, dreapta d_3 este o transversală pentru d_1, d_2, d.

Definiţie. Două unghiuri se numesc *alterne interne* dacă intersecţia a două laturi este un segment, iar celelalte două laturi sînt situate în semiplane opuse faţă de dreapta ce conţine segmentul.

În figura I.74 $\widehat{CAB}$ şi $\widehat{ABD}$ sînt unghiuri alterne interne, pentru că $|AB \cap |BA = |AB|$, C şi D fiind în semiplane opuse faţă de AB. Dreapta AB este o secantă pentru dreptele AC şi BD. Se observă că în figura compusă

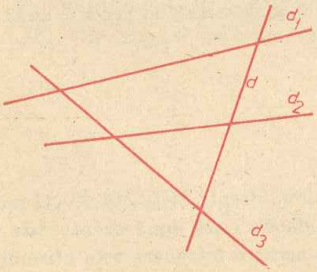


Fig. I.73

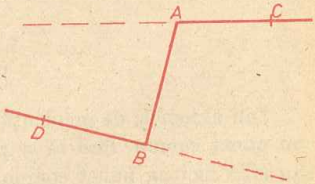


Fig. I.74

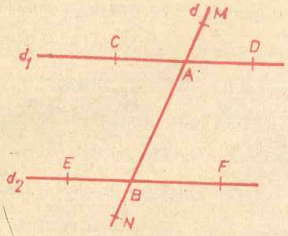


Fig. I.75

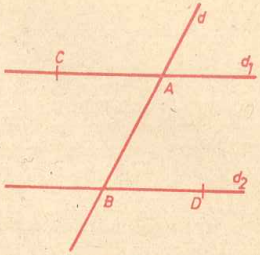


Fig. I.76

de două drepte şi o secantă se formează două perechi de unghiuri alterne interne.

Fie dreptele d_1, d_2 şi secanta d (fig. I.75).

$$C \in d_1,\ D \in d_1,\ E \in d_2,\ F \in d_2,\ d \cap d_1 = \{A\},\ d \cap d_2 = \{B\},\ A \in |CD|,$$
$$B \in |EF|,\ M \in d,\ N \in d,\ A \in |MB|,\ B \in |AN|.$$

Perechile de unghiuri $(\widehat{CAB}, \widehat{ABF})$, $(\widehat{DAB}, \widehat{ABE})$ sînt alterne interne. Perechile de unghiuri $(\widehat{MAC}, \widehat{ABE})$, $(\widehat{CAB}, \widehat{EBN})$, $(\widehat{MAD}, \widehat{ABF})$, $(\widehat{DAB}, \widehat{FBN})$ se numesc *corespondente*. Perechile de unghiuri $(\widehat{FBA}, \widehat{DAB})$, $(\widehat{CAB}, \widehat{ABE})$ se numesc *interne de aceeaşi parte a secantei*.

Teorema 2. Dacă pentru două drepte distincte există o secantă cu care formează o pereche de unghiuri alterne interne congruente atunci dreptele sînt nesecante.

Demonstraţie. Fie $d_1 \neq d_2$, secanta d, $\{A\} = d_1 \cap d$, $\{B\} = d_2 \cap d$, $C \in d_1$, $D \in d_2$, d separă C şi D, $\widehat{CAB} \equiv \widehat{ABD}$ (fig. I.76). Se presupune prin absurd că $d_1 \cap d_2 = \{P\}$. Dacă A, B, P sînt necoliniare triunghiul ABP are un unghi exterior congruent cu un unghi interior neadiacent cu el, ceea ce este absurd. Dacă A, B, P sînt coliniare, atunci $d_1 = d_2$, ceea ce contrazice ipoteza.

Exerciţii

◇ **1.** Să se demonstreze că dacă două drepte distincte formează cu o secantă o pereche de unghiuri corespondente congruente sau o pereche de unghiuri interne de aceeaşi parte a secantei suplementare, atunci dreptele sînt nesecante.

2. Să se demonstreze că dacă segmentele $|AB|$ şi $|CD|$ nesituate pe aceeaşi dreaptă au mijlocul comun, atunci $AC \cap BD = \emptyset$, $AD \cap BC = \emptyset$.

Exerciţii recapitulative

◇ **1.** Se consideră triunghiul ABC în care $m(\widehat{BAC}) > m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{ACB})$ şi D este mijlocul segmentului $|BC|$. Să se arate că $\|AD\| < \frac{\|BC\|}{2}$.

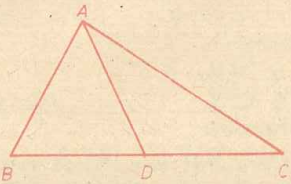


Fig. I.77

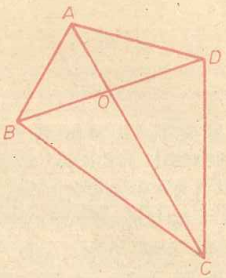


Fig. I.78

Indicație. Din ipoteză $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{BAD}) + m(\widehat{DAC}) > m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{ACB})$ deci sau $m(\widehat{BAD}) > m(\widehat{ABC})$ și $\| BD \| > \| AD \|$ sau $m(\widehat{DAC}) > m(\widehat{ACB})$ și $\| CD \| > \| AD \|$ (fig. I.77).

2. Dacă în patrulaterul convex $ABCD$ $\| AB \| + \| BD \| \leqslant \| AC \| + \| CD \|$, atunci $\| AB \| < \| AC \|$.

Indicație. Se arată în prealabil că suma lungimilor a două laturi opuse este mai mică decît suma lungimilor diagonalelor. Se obține: $\| AB \| + \| CD \| < \| AC \| + \| BD \|$ și prin adunare membru cu membru cu inegalitatea din ipoteză se obține concluzia (fig. I.78).

3. Dacă pentru triunghiurile ABC și $A'B'C'$ au loc: $| AB | \equiv | A'B' |$, $\hat{B} \equiv \hat{B}'$, atunci $d(A, BC) = d(A', B'C')$.

4. Se consideră triunghiurile ABC și $A'B'C'$ în care $| AB | \equiv | A'B' |$, $| AC | \equiv | A'C' |$, $\hat{B} \equiv \hat{B}'$. Să se arate că dacă unghiurile $\hat{C}$ și $\hat{C}'$ sînt ambele ascuțite (sau ambele obtuze) atunci $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

5. Fie d bisectoarea unghiului propriu $\widehat{BAC}$ și d' perpendiculara pe d, dusă prin B. Să se arate că $d' \cap | AC \neq \emptyset$.

Indicație. Se ia $B' \in | AC$ astfel ca $| AB | \equiv | AB' |$ și se arată că d' coincide cu BB'.

6. Reuniunea a două drepte concurente are două axe de simetrie perpendiculare.

7. Dacă dreptele OA și OB nu sînt perpendiculare, dreapta OC este o axă de simetrie a mulțimii $OA \cup OB$ dacă și numai dacă unghiurile $\widehat{COA}$ și $\widehat{COB}$ sînt congruente sau suplementare.

8. Fie $ABCD$ un patrulater convex cu $\hat{A} \equiv \hat{B}$ și $| DA | \equiv | CB |$. Să se arate că mediatoarea d a segmentului $| AB |$ intersectează segmentul $| DC |$ și că d este o axă de simetrie a patrulaterului $ABCD$.

9. Dacă două drepte au o perpendiculară comună atunci mulțimea formată din reuniunea celor două drepte are axă de simetrie.

10*. Perechea de drepte (a, d) se numește *simetrică față de perechea de drepte* (b, c) dacă $a \cup d$ și $b \cup c$ au o axă de simetrie comună. Fie A un punct al lui a, nesituat pe b, P și Q simetricele lui A față de b respectiv c; a, b, c, d fiind patru drepte concurente să se demonstreze că perechea (a, d) este simetrică față de (b, c) dacă și numai dacă P și Q sînt simetrice față de d.

Indicație. Se pot alege punctele $B \in b$, $C \in c$, $D \in d$, astfel ca $B, C \in \operatorname{Int} \widehat{AOD}$ și se poate presupune că $B \in \operatorname{Int} \widehat{AOC}$ (căci în caz contrar se pot schimba b și c între ele)

(fig. I.79). Se consideră cazul $P \in \text{Int } \widehat{BOC}$ (în celălalt caz se raţionează analog); notînd $m(\widehat{AOB}) = \beta$, $m(\widehat{AOC}) = \gamma$ şi $m(\widehat{COD}) = \alpha$, se obţine $m(\widehat{POD}) = m(\widehat{AOC}) + m(\widehat{COD}) - m(\widehat{AOB}) - m(\widehat{BOP}) = \gamma + \alpha - 2\beta$, şi $m(\widehat{DOQ}) = m(\widehat{COQ}) - m(\widehat{DOC}) = \gamma - \alpha$. Aşadar $\widehat{POD} \equiv \widehat{DOQ} \Leftrightarrow \gamma + \alpha - 2\beta = \gamma - \alpha \Leftrightarrow \alpha = \beta$. Cum $|OP| \equiv |OQ|$ condiţia $\widehat{POD} \equiv \widehat{DOQ}$ este echivalentă cu simetria lui P, Q faţă de OD, iar $\alpha = \beta$ înseamnă

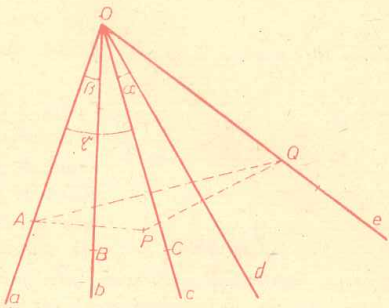


Fig. I.79

că $\widehat{BOC}$ şi $\widehat{AOD}$ au aceeaşi bisectoare adică perechea (a, d) este simetrică faţă de perechea (b, c).

11*. Pe dreapta AB se iau punctele C şi D astfel ca segmentele $|AB|$ şi $|CD|$ să aibă acelaşi mijloc. Fie c şi d perpendicularele prin C şi D pe AB, iar P şi Q simetricele unui punct oarecare $M \in d$ faţă de A respectiv B. Să se arate că P şi Q sînt simetrice faţă de c.

Indicaţie. P' şi Q' fiind picioarele perpendicularelor duse pe AB din P respectiv Q, se va arăta că $|P'C| \equiv |CQ'|$ şi $|PP'| \equiv |MD| \equiv |QQ'|$. Rezultă $|PC| \equiv |QC|$ (fig. I.80).

12*. Fie M, N, P mijloacele laturilor $[AB]$, $[AC]$ şi $[BC]$ ale unui triunghi ABC. Să se arate că mediatoarea lui $|BC|$ intersectează dreapta MN într-un punct Q şi $PQ \perp MN$.

Indicaţie: Fie A' piciorul perpendicularei duse din A pe MN şi se alege Q pe MN astfel ca segmentele $|MN|$ şi $|A'Q|$ să aibă acelaşi mijloc. Se arată pe baza exerciţiului **11** că punctul Q astfel ales este soluţia problemei.

13. Fie A un punct dat, d o dreaptă dată şi P un punct variabil pe d. Să se afle locul geometric al simetricului punctului P faţă de A.

14. Se dă un unghi propriu $\widehat{AOB}$. Să se afle locul geometric al punctelor M astfel încît $|OB$ să fie bisectoarea unghiului $\widehat{AOM}$. În ce caz locul geometric este diferit de mulţimea vidă?

15*. Se consideră punctele M, N, P şi Q pe laturile $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$ ale patrulaterului convex $ABCD$. Să se arate că patrulaterul $MNPQ$ este convex. Generalizare.

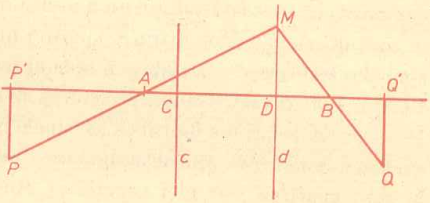


Fig. I.80

Capitolul
II

Paralelism. Asemănare

§ 1. Axioma paralelelor

Definiţie. Două drepte d_1 şi d_2, situate în planul $\mathcal{P}$, se numesc *paralele* dacă nu au punct comun. Se notează $d_1 \parallel d_2$. Deci $d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow d_1 \cap d_2 = \emptyset$.

Două segmente se numesc *paralele* dacă dreptele care le conţin sînt paralele. Teorema 1 din § 14 cap. I poate fi reformulată astfel: „Printr-un punct exterior unei drepte trece cel puţin o dreaptă paralelă cu ea".

Să ne punem acum problema: fiind dată o dreaptă d şi un punct M nesituat pe ea, există mai multe drepte care trec prin M şi sînt paralele cu d? (fig. II.1).

Intuitiv se pare că răspunsul este negativ, adică există o singură paralelă cu d prin M. Încă din antichitate au existat încercări pentru a demonstra acest lucru. Matematicianul grec Euclid (sec. III. î.e.n.) în cartea sa „Elemente" a prezentat proprietatea sub forma unei axiome admiţînd astfel că nu poate fi demonstrată. Această soluţie nu a mulţumit pe matematicieni care au încercat în continuare să o demonstreze, apărînd numeroase demonstraţii, care ulterior s-au dovedit greşite. De-abia în secolul trecut, din lucrările matematicienilor Bolyai, Lobacevski, Gauss, precum şi din modelele date de Beltrami, Klein, Poincaré se desprinde faptul că axiomele prezentate pînă aici nu sînt suficiente pentru a demonstra afirmaţia unicităţii paralelei la o dreaptă printr-un punct ce nu-i aparţine, dar nici negaţia ei. Aceasta înseamnă că proprietatea este independentă de aceste axiome şi va fi admisă ca o nouă axiomă.

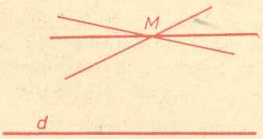


Fig. II. 1

Axioma paralelelor. Printr-un punct A exterior unei drepte d, trece cel mult o dreaptă paralelă cu d.

O primă consecinţă a acestei axiome este:

Teorema 1. Printr-un punct A, exterior dreptei d, trece o singură paralelă cu d.

Demonstrație. Existența paralelei este asigurată de teorema 1 § 14 cap. I, iar unicitatea de axioma paralelelor.

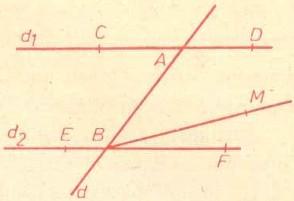


Fig. II. 2

Teoremele demonstrate fără a folosi „axioma paralelelor" alcătuiesc ceea ce se numește „geometria absolută". Prin admiterea axiomei paralelelor (numită și postulatul lui Euclid) și în consecință a tuturor teoremelor ce decurg din ea se obține „geometria euclidiană". În continuare se vor relua unele teoreme din „geometria absolută" care în „geometria euclidiană" vor avea un conținut mai bogat și se vor demonstra noi teoreme. Trebuie totuși menționat că nu toate proprietățile care apar în continuare în acest manual sînt valabile numai în geometria „euclidiană", dar prezentarea prin separare totală a rezultatelor geometriei „absolute" de cea „euclidiană" ar fi îngreunat expunerea.

Teorema 2. (Teorema paralelelor tăiate de o secantă.) Două drepte paralele formează cu orice secantă perechi de unghiuri alterne interne congruente.

Demonstrație. Fie $d_1 \parallel d_2$, secanta d, $d \cap d_1 = \{A\}$, $d \cap d_2 = \{B\}$, $C \in d_1$, $F \in d_2$, C și F de o parte și de alta a lui d (fig. II.2).

Se presupune că $\widehat{CAB} \neq \widehat{ABF}$; atunci, în semiplanul $|dF$ există semidreapta unică $|BM$, $BM \neq d_2$, astfel încît $\widehat{CAB} \equiv \widehat{ABM}$. Rezultă că $BM \parallel d_1$, deci prin B trec d_2 și BM, paralele cu d_1, ceea ce este în contradicție cu axioma paralelelor.

Exerciții

◇ **1.** Două drepte paralele formează cu o secantă perechi de unghiuri corespondente congruente și perechi de unghiuri interne de aceeași parte a secantei suplementare.

◇ **2.** Două drepte distincte paralele cu a treia dreaptă sînt paralele între ele.

3. Unghiurile cu laturile respectiv paralele sînt congruente sau suplementare.

4. Dacă $d \perp d_1$ atunci d este perpendiculară pe orice dreaptă paralelă cu d_1.

Definiție. Patrulaterul cu laturile opuse paralele se numește *paralelogram.*

Teorema 3. Într-un paralelogram $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$, sînt verificate următoarele proprietăți:

i) $|AB| \equiv |CD|$, $|BC| \equiv |AD|$,

ii) $\widehat{DAB} \equiv \widehat{DCB}$, $\widehat{ADC} \equiv \widehat{ABC}$,

iii) *Dacă* $\{O\} = AC \cap BD$ *atunci* $|OA| \equiv |OC|$, $|OB| \equiv |OD|$,

iv) *Dacă* $\{O\} = AC \cap BD$ *atunci* O *este centrul de simetrie al patrulaterului* $ABCD$.

Teorema 4. Dacă în patrulaterul $ABCD$ este verificată una din proprietățile i), ii), iii), iv) atunci patrulaterul este paralelogram.

Demonstrațiile acestor două teoreme se lasă sub formă de exercițiu. Se disting următoarele paralelograme particulare.

Definiții. Paralelogramul cu un unghi drept se numește *dreptunghi*. Paralelogramul cu două laturi alăturate congruente se numește *romb*.

Dreptunghiul cu două laturi alăturate congruente se numește *pătrat*.

Exerciții

5. Diagonalele unui dreptunghi sînt congruente.

6. Să se determine axele de simetrie ale unui dreptunghi, romb, pătrat.

7. Să se arate că diagonalele unui romb sînt bisectoarele unghiurilor rombului.

◇ **8.** Fie triunghiul ABC, $\hat{A} \in 90°$ și $M \in |BC|$, $|MB| \equiv |MC|$. Să se demonstreze că $\|AM\| = \frac{\|BC\|}{2}$.

◇ **9.** Dacă în triunghiul ABC, M este mijlocul laturii $|BC|$ și $\|AM\| = \frac{\|BC\|}{2}$, atunci triunghiul este dreptunghic.

◇ **10.** Să se demonstreze că locul geometric al punctelor situate la aceeași distanță de o dreaptă dată este reuniunea a două drepte paralele cu acea dreaptă.

◇ **11.** Diagonalele unui romb sînt perpendiculare.

12. Se dă paralelogramul $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$) în care $|BD| \equiv |AD|$. Fie M mijlocul laturii $[CD]$ și $|ME| \equiv |BM|$, $M \in |BE|$. Să se arate că: a) $BM \perp CD$ b) A, D, E coliniare c) $|AD| \equiv |DE|$.

◇ **13.** Dacă două laturi opuse ale unui patrulater $ABCD$ sînt paralele și congruente atunci patrulaterul este paralelogram.

Observație. La aplicarea teoremei 4 și a exerc. 13 trebuie să verificăm cu atenție condiția ca $ABCD$ să fie *patrulater* în sensul definiției date: două laturi opuse să nu aibă un punct comun.

§ 2. Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi

Teorema 1. Într-un triunghi, măsura oricărui unghi exterior este egală cu suma măsurilor unghiurilor interioare neadiacente cu el.

Demonstrație. Fie $\widehat{ACD}$ un unghi exterior al triunghiului ABC și d paralela prin C la AB. Atunci A și B sînt de aceeași parte a lui d, iar B și D de o parte și de alta a lui d, de unde rezultă că segmentul $|AD|$ intersectează dreapta d într-un punct E (fig. II.3).

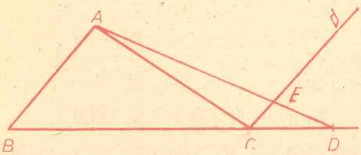


Fig. II. 3

Rezultă $E \in \text{Int}\ \widehat{ACD}$ și $m(\widehat{ACD}) = m(\widehat{ACE}) + m(\widehat{ECD})$ (axioma **U.3**).

Pe de altă parte $\widehat{ACE} \equiv \hat{A}$ ca un-

ghiuri alterne interne și $\widehat{ECD} \equiv \hat{B}$ ca unghiuri corespondente, deci $m(\widehat{ACD}) = m(\hat{A}) + m(\hat{B})$.

Această teoremă este o completare a teoremei unghiului exterior demonstrată în cap. I și ea permite determinarea sumei măsurilor unghiurilor unui triunghi.

Teorema 2. Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este 180.

Demonstrație. În figura II.3. $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = m(\widehat{ACE}) + m(\widehat{ECD}) + m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{BCD}) = 180$.

Exerciții

1. Suma măsurilor unghiurilor ascuțite ale unui triunghi dreptunghic este 90.

2. Măsura fiecărui unghi a unui triunghi echilateral este 60.

◇ 3. Dacă într-un triunghi dreptunghic ABC, $\hat{A} \in 90°$, $\hat{B} \in 30°$, atunci $\| AC \| = \frac{\| BC \|}{2}$.

4. În triunghiul ABC se duce bisectoarea AA' ($A' \in BC$), iar prin A' se duc paralelele $A'M$ și $A'N$ la laturile $| AB |$ și $| AC |$ ($M \in AC$, $N \in AB$). Să se arate că $AMA'N$ este un romb.

5. În triunghiul dreptunghic ABC ($\hat{A} \in 90°$) se duce înălțimea AD ($D \in BC$). Se unește D cu mijloacele E și F ale laturilor AB și AC. Să se arate că $m(\widehat{FDE}) = 90$.

6. Fie AA', BB', CC' bisectoarele unghiurilor triunghiului ABC ($A' \in BC$, $B' \in AC$, $C' \in AB$). Să se arate că $m(\widehat{AA'B}) + m(\widehat{BB'C}) + m(\widehat{CC'A}) = 270$.

7. Pe laturile $| AB |$ și $| AC |$ ale triunghiului echilateral ABC se consideră respectiv punctele D și E astfel ca $| AD | \equiv | CE |$ și fie $\{M\} = | BE | \cap | CD |$. Să se arate că $m(\widehat{BMC}) = 120$.

8. Să se demonstreze că dacă un patrulater convex are două unghiuri opuse congruente atunci bisectoarele celorlalte două unghiuri sînt paralele și reciproc, dacă bisectoarele a două unghiuri opuse ale unui patrulater convex sînt paralele atunci celelalte două unghiuri sînt congruente.

9. Fie triunghiul ABC ascuțitunghic și $AA' \perp BC$, $BB' \perp AC$, $\{M\} = AA' \cap BB'$. Atunci $m(\widehat{AMB}) = m(\hat{A}) + m(\hat{B})$.

10. Bisectoarele unghiurilor unui paralelogram formează un dreptunghi ale cărui diagonale sînt paralele cu laturile paralelogramului.

11. Două unghiuri cu laturile respectiv perpendiculare sînt congruente sau suplementare.

12. Se consideră dreapta d, $O \notin d$ și P piciorul perpendicularei din O pe d. Fie $A \in d$, astfel încît $m(\widehat{OAP}) = 45$. Pentru fiecare punct M, $M \in d$, astfel încît $A \in | PM |$ se construiește segmentul $| MN |$ astfel încît $MN \perp OM$ și $| MN | \equiv | OM |$, N fiind în

semiplanul S limitat de d și conținînd O. Să se arate că locul geometric al punctului N cînd M descrie semidreapta opusă lui $|AP$, este semidreapta $|AB$, perpendiculară în A pe OA, situată în S.

13*. Să se demonstreze că dacă într-un patrulater convex două unghiuri opuse sînt obtuze atunci lungimea diagonalei determinată de vîrfurile lor este mai mică decît lungimea celeilalte diagonale.

§ 3. Linia mijlocie

Definiție. Segmentul determinat de mijloacele a două laturi ale unui triunghi se numește *linie mijlocie a triunghiului.*

În figura II.4 $|MA| \equiv |MB|$, $|NA| \equiv |NC|$ și $|PB| \equiv |PC|$. $|MN|$, $|NP|$, $|MP|$ sînt linii mijlocii ale triunghiului ABC. Are loc următoarea teoremă foarte utilă într-o serie de aplicații.

Teorema 1. Linia mijlocie a unui triunghi, determinată de două laturi, este paralelă cu cea de a treia latură și are ca lungime $\frac{1}{2}$ din lungimea celei de a treia laturi.

Demonstrație. Se consideră triunghiul ABC, $M \in |AB|$, $N \in |AC|$, $|MA| \equiv |MB|$, $|NA| \equiv |NC|$. Fie P astfel încît $N \in |MP|$, $|MN| \equiv |NP|$, (fig. II. 5). Din teorema 4, iii, § 1, rezultă că $AMCP$ este paralelogram. Deci $PC \parallel AB$ și $|PC| \equiv |MB|$. B și P sînt de o parte și de alta a lui MC, deci $MBCP$ este un patrulater, care are laturile $|PC|$ și $|MB|$ paralele și congruente. Atunci, din ex. 13, § 1, rezultă că patrulaterul $MBCP$ este paralelogram, deci $MP \parallel BC$, $|MP| \equiv |BC|$ și deoarece $\|MP\| = 2\,\|MN\|$ rezultă $\|MN\| = \frac{1}{2}\,\|BC\|$.

Exerciții

1. Pe laturile patrulaterului convex $ABCD$ se consideră punctele M, N, P, Q, mijloacele segmentelor $|AB|$, $|BC|$, $|CD|$, $|DA|$. Să se arate că patrulaterul $MNPQ$ este paralelogram.

2. Pe laturile $|AB|$, $|CD|$ ale paralelogramului $ABCD$ se iau arbitrar punctele M și N. Dreapta d, determinată de mijloacele laturilor $|BC|$ și $|AD|$ intersectează succesiv segmentele $|AN|$, $|MD|$, $|BN|$, $|MC|$ în E, F, G, H. Să se demonstreze că $|EF| \equiv |GH|$.

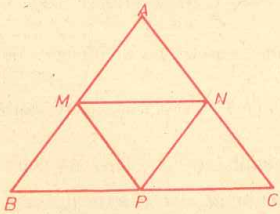


Fig. II.4

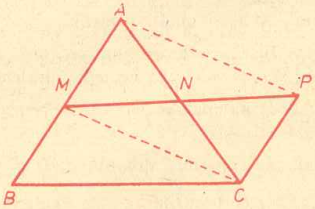


Fig. II.5

3. Fie triunghiul echilateral ABC şi punctele D şi E astfel ca $C \in |BD|$, $A \in |CE|$ şi $|DC| \equiv |AE| \equiv |AB|$. Se notează $\{F\} = DE \cap AB$. Să se arate că $\|AF\| = \frac{1}{3}\|AB\|$.

Indicaţie. Se construieşte $CG \parallel AB$, $G \in DE$; $|GC|$ este linie mijlocie în triunghiul BDF, iar $|AF|$ este linie mijlocie în triunghiul ACG.

Teorema 2. (Reciprocă teoremei 1.) Dacă M este mijlocul laturii $|AB|$ a triunghiului ABC şi $MN \parallel BC$, $N \in |AC|$ atunci N este mijlocul laturii $|AC|$.

Se demonstrează uşor prin reducere la absurd.

Definiţie. Un patrulater cu două laturi opuse paralele şi celelalte două neparalele se numeşte *trapez*. Laturile paralele ale trapezului se numesc *baze*. Dacă laturile neparalele sînt congruente, trapezul se numeşte *isoscel*.

Definiţie. Segmentul determinat de mijloacele laturilor neparalele ale unui trapez se numeşte *linie mijlocie a trapezului*.

În figura II.6, $AB \parallel CD$, $AD \nparallel BC$, $ABCD$ este trapez, $|AB|$ baza mare $|DC|$ baza mică. $|AM| \equiv |MD|$, $|BN| \equiv |NC|$, $|MN|$ linie mijlocie a trapezului. $|AC|$ şi $|BD|$ se numesc diagonale iar $\{O\} = |BD| \cap |AC|$, O este intersecţia diagonalelor. Dacă unul dintre unghiuri este drept, trapezul se va numi *dreptunghic*.

Exerciţii

4. Să se demonstreze că diagonalele trapezului isoscel sînt congruente şi unghiurile adiacente unei baze sînt de asemenea congruente.

5. Să se determine axa de simetrie a unui trapez isoscel.

Teorema 3. Linia mijlocie a unui trapez este paralelă cu bazele trapezului şi are lungimea egală cu semisuma lungimilor celor două baze.

Demonstraţie. Fie trapezul $ABCD$, $(AB \parallel CD)$ şi $|MN|$ linia mijlocie, $M \in |AD|$, $N \in |BC|$ (fig. II.7). Se notează cu E intersecţia diagonalei $|AC|$ cu $|MN|$. Se presupune prin absurd că E nu este mijlocul segmentului $|AC|$. Fie deci $E' \neq E$ mijlocul segmentului $|AC|$. În triunghiul ABC, $|E'N|$ este linie mijlocie deci $E'N \parallel AB$ iar în triunghiul ADC, $|E'M|$ este linie mijlocie deci $E'M \parallel DC$; dar $AB \parallel DC$ deci $E'M \parallel AB$ şi $E'N \parallel AB$. Din

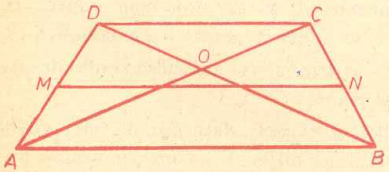


Fig. II.6

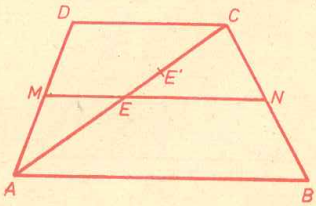


Fig. II.7

axioma de paralelism rezultă că M, E', N sînt coliniare deci $E = E'$ și $MN \parallel AB$, $MN \parallel DC$.

$\| ME \| = \frac{1}{2} \| DC \|$, $\| NE \| = \frac{1}{2} \| AB \|$ și $\| MN \| = \| ME \| + \| NE \| = \frac{1}{2} (\| AB \| + \| DC \|)$.

Exerciții

6. Se consideră trapezul $ABCD$ în care $AB \parallel CD$ și $\| AD \| = \| AB \| + \| CD \|$. Să se demonstreze că dacă E este mijlocul segmentului $| BC |$ atunci $m(\widehat{AED}) = 90$.

Indicație. Fie $| EF |$ linia mijlocie a trapezului, $\| EF \| = \frac{\| AB \| + \| CD \|}{2} = \frac{\| AD \|}{2}$ deci triunghiurile DEF și AEF sînt isoscele și aplicînd teorema relativă la suma măsurilor unghiurilor triunghiului AED rezultă că $m(\widehat{AED}) = 90$.

7. Se consideră un triunghi isoscel ABC, $| AB | \equiv | AC |$ și punctele variabile $P \in | AB |$, $Q \in | AC |$ astfel ca $| BP | \equiv | AQ |$. Fie O mijlocul segmentului $| PQ |$.

i) Să se demonstreze că $d(O, BC)$ este constantă.

ii) Să se afle locul geometric al punctului O.

§ 4. Concurența unor drepte în triunghi

În capitolul I, § 13 s-a demonstrat concurența bisectoarelor unghiurilor unui triunghi și s-a enunțat o condiție suficientă pentru ca mediatoarele laturilor triunghiului să fie concurente.

Dificultatea a constat în faptul că nu s-a putut afirma cu certitudine concurența a două dintre mediatoarele laturilor triunghiului, în geometria absolută nefiind admisă axioma paralelelor. Se poate acum enunța:

Teorema 1. În orice triunghi, mediatoarele laturilor sînt concurente.

Demonstrație. Este suficient să se demonstreze concurența a două mediatoare. Fie triunghiul ABC, d_1 și d_2 mediatoarele segmentelor $| AB |$ respectiv $| BC |$ (fig. II.8). Presupunînd că d_1 și d_2 nu sînt concurente, rezultă $d_1 \parallel d_2$. Pentru că $d_2 \perp BC$ rezultă și $d_1 \perp BC$. Dar $d_1 \perp BA$. Deci prin B trec două perpendiculare distincte pe dreapta d_1, și anume $BA \perp d_1$, $BC \perp d_1$, ceea ce nu este posibil.

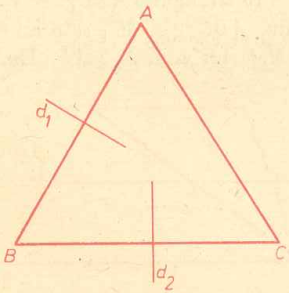


Fig. II.8

Prin urmare d_1 și d_2 sînt concurente. În continuare se aplică teorema 5 din cap. I, § 13.

Relativ la triunghi se definesc și alte drepte (linii) importante.

Definiții. Dreapta determinată de vîrful unui triunghi și mijlocul laturii opuse se numește *mediană*.

Perpendiculara prin vîrful unui triunghi pe dreapta determinată de latura opusă se numeşte *înălţime*.

Teorema 2. Înălţimile unui triunghi sînt concurente.

Demonstraţie. Fie triunghiul ABC, A', B', C' picioarele perpendicularelor din A, B, C, respectiv pe BC, AC, AB şi DEF triunghiul format de paralelele duse la laturile triunghiului ABC prin vîrfurile acestuia (fig. II.9).

Din construcţie, $ABCF$ şi $BCAD$ sînt paralelograme deci $|BC| \equiv |AF| \equiv |AD|$. Pentru că $BC \parallel DF$ şi $AA' \perp BC$ rezultă că $AA' \perp DF$. Deci AA' este mediatoarea segmentului $|DF|$. În mod analog se arată că BB' şi CC' sînt mediatoarele segmentelor $|DE|$ respectiv, $|EF|$. Prin urmare înălţimile triunghiului ABC sînt mediatoarele laturilor triunghiului DEF şi deci din teorema 1 rezultă că sînt concurente.

Teorema 3. Medianele unui triunghi sînt concurente. Punctul de intersecţie determină cu mijlocul fiecărei laturi un segment a cărui lungime este 1/2 din lungimea segmentului pe care-l determină cu vîrful opus laturii.

Demonstraţie. Fie triunghiul ABC, D şi E mijloacele laturilor $|BC|$ respectiv $|AC|$. Deoarece în triunghiul BAD, $|BE \subset \text{Int}\,\widehat{ABC}$, $A \in |BA$, $D \in |BC$, rezultă că $|BE$ şi $|AD$ au un punct comun G (fig. II.10).

Deoarece $|AD \subset |\text{Int}\,\widehat{BAE}$ rezultă că $\{G\} = |AD| \cap |BE|$. Fie M, N mijloacele segmentelor $|AG|$ respectiv $|BG|$. În triunghiul ABG, $|MN|$ este linie mijlocie, deci $MN \parallel AB$ şi $\|MN\| = \frac{1}{2}\|AB\|$. În triunghiul ABC, $|DE|$ este linie mijlocie, deci $DE \parallel AB$ şi $\|DE\| = \frac{1}{2}\|AB\|$. Rezultă că $|DE| \equiv |MN|$ şi $DE \parallel MN$. $MNDE$ este patrulater şi deci este paralelogram (ex. 13, § 1, II). Rezultă $\|GD\| = \|MG\| = \|AM\| = \frac{1}{3}\|AD\|$. Fie acum F mijlocul laturii $|AB|$ şi $\{G'\} = |FC| \cap |AD|$. În mod analog rezultă $\|DG\| = \frac{1}{3}\|AD\|$. Deoarece $G, G' \in |DA|$, din teorema de construcţie a unui segment rezultă $G = G'$.

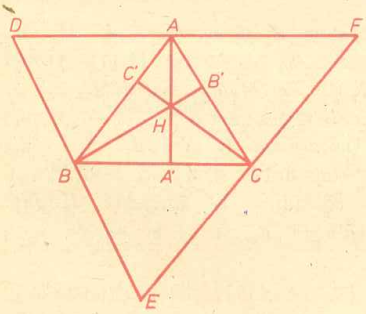


Fig. II.9

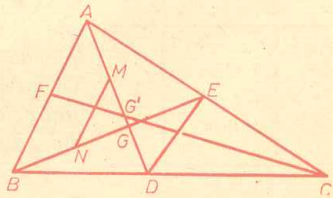


Fig. II.10

Observații. Punctul H de concurență al înălțimilor se numește *ortocentrul* triunghiului. Punctul G de concurență al medianelor se numește *centrul de greutate* al triunghiului. Centrul de greutate al triunghiului și punctul de concurență al bisectoarelor unghiurilor unui triunghi aparțin interiorului triunghiului. Ortocentrul triunghiului și punctul de concurență al mediatoarelor triunghiului pot să nu aparțină interiorului triunghiului. În unele probleme de geometrie prin cuvintele „mediană" sau „bisectoare" se va înțelege segmentul determinat de vîrful triunghiului cu mijlocul laturii opuse, respectiv segmentul determinat de vîrful triunghiului și intersecția bisectoarei cu latura opusă unghiului. Termenul „înălțime" va desemna segmentul determinat de vîrful triunghiului și piciorul perpendicularei din vîrf pe dreapta determinată de latură opusă. Se pot folosi de asemenea termenii de „mediană", „bisectoare", „înălțime" și pentru lungimile acestor segmente fără a exista pericol de confuzie deoarece rezultă din text sensul care li se atribue. Astfel, teorema 3 poate fi reformulată într-un enunț ușor de memorat: „Medianele unui triunghi sînt concurente într-un punct situat la 2/3 de vîrf și 1/3 de bază pe fiecare dintre ele".

Exerciții

1. Să se determine poziția ortocentrului unui triunghi dreptunghic și poziția punctului de concurență a mediatoarelor laturilor sale.

2. Fie triunghiul ABC și cele două unghiuri exterioare ale triunghiului care au ca latură $|BC$ respectiv $|CB$. Să se demonstreze că bisectoarele acestor unghiuri exterioare și bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$ sînt concurente (completarea ex. 1, § 13 cap. I).

3. Unghiurile opuse $\hat{A}$ și $\hat{C}$ ale patrulaterului convex $ABCD$ sînt drepte. $AD \cap BC = \{E\}$, $AB \cap DC = \{F\}$. Să se demonstreze că $BD \perp EF$.

4*. Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC, H ortocentrul și $A' \in |HA$, $B' \in |HB$, $C' \in |HC$ astfel ca $|HA'| \equiv |BC|$, $|HB'| \equiv |CA|$, $|HC'| \equiv |AB|$. Să se arate că:

i) dacă M, N, P sînt mijloacele laturilor $|BC|$, $|AC|$, $|AB|$ atunci $\|B'C'\| = 2\,\|AM\|$, $\|A'C'\| = 2\,\|BN\|$, $\|A'B'\| = 2\,\|CP\|$.

ii) H este centrul de greutate al triunghiului $A'B'C'$.

5. În paralelogramul $ABCD$ se duc $CE \perp BC$, $AE \perp AB$. Să se arate că $DE \perp AC$.

6*. În triunghiul ABC ($\hat{A} \in 90°$) se duce înălțimea AD, $D \in BC$ și se consideră $F \in |AD|$. Perpendiculara în F pe FC intersectează pe AB în G. Paralela prin A la FG intersectează BC în H. Să se arate că patrulaterul $AGFH$ este paralelogram.

§ 5. Paralele echidistante

Fie d_1 și d_2 două drepte distincte, $d_1 \parallel d_2$ și $M_1 \in d_1$, $M_2 \in d_1$, M_1', M_2' picioarele perpendicularelor din M_1 respectiv M_2 pe d_2 (fig. II.11). Atunci $M_1M_1'M_2'M_2$ este un dreptunghi deci $|M_1M_1'| \equiv |M_2M_2'|$ sau $d(M_1, d_2) = d(M_2, d_2)$ și oricare ar fi punctul $M \in d_1$, $d(M, d_2)$ este constantă. Oricare ar fi $N \in d_2$, $d(N, d_1)$ este de asemenea constantă, $d(M, d_2) = d(N, d_1)$. Valoarea acestei constante se numește *distanța dintre dreptele paralele* d_1 și d_2 și se va nota $d(d_1, d_2)$.

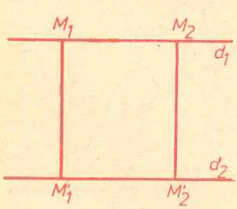


Fig. II.11

T e o r e m ă. (Teorema paralelelor echidistante). Fie pe dreapta d punctele distincte A_1, A_2, A_3,...

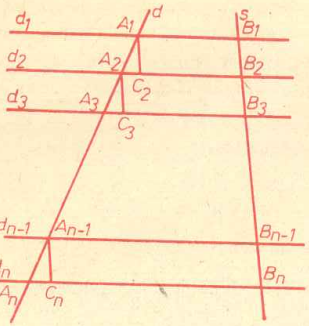


Fig. II.12

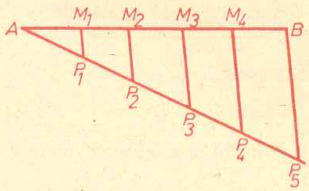


Fig. II.13

A_{n-1}, $A_n (n \in N, n > 2)$, **astfel ca** $|A_1A_2| = |A_2A_3| = |A_3A_4| = \ldots = |A_{n-1}A_n|$ **şi dreptele** $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_n$, $A_1 \in d_1$, $A_2 \in d_2$, $A_3 \in d_3, \ldots$, $A_n \in d_n$. **Dacă** $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \parallel \ldots \parallel d_n$ **atunci dreptele** $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_n$ **determină pe orice secantă segmente congruente.**

Demonstraţie. Fie s secanta dreptelor $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_n$ şi $\{B_1\} = d_1 \cap s$, $\{B_2\} = d_2 \cap s$, $\{B_3\} = d_3 \cap s, \ldots$, $\{B_n\} = d_n \cap s$ (fig. II.12). Se consideră punctele $C_2 \in d_2$, $C_3 \in d_3, \ldots$, $C_n \in d_n$ astfel ca $A_1C_2 \parallel s$, $A_2C_3 \parallel s, \ldots$, $A_{n-1}C_n \parallel s$. $\triangle A_1A_2C_2 \equiv \triangle A_2A_3C_3 \equiv \ldots \equiv \triangle A_{n-1}A_nC_n$ (din L.U.L.), deci $|A_1C_2| = |A_2C_3| = \ldots = |A_{n-1}C_n|$. Din paralelogramele $A_1C_2B_2B_1$, $A_2C_3B_3B_2, \ldots$, $A_{n-1}C_nB_nB_{n-1}$ rezultă că $|A_1C_2| = |B_1B_2|$, $|A_2C_3| = |B_2B_3|, \ldots$, $|A_{n-1}C_n| = |B_{n-1}B_n|$, deci $|B_1B_2| = |B_2B_3| = \ldots = |B_{n-1}B_n|$.

Observaţie. Dacă secanta s este perpendiculară pe dreptele paralele $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_n$, atunci segmentele determinate pe secantă au lungimile egale şi cu distanţa dintre două drepte paralele consecutive. Din acést motiv trei sau mai multe drepte paralele care îndeplinesc condiţiile teoremei se numesc paralele *echidistante.*

Exerciţii

1. Fiind dat segmentul $|AB|$ să se determine un segment $|MN|$ astfel ca $5 \| MN \| = \| AB \|$. (generalizare: $n \| MN \| = \| AB \|$).

Indicaţie: Se consideră pe semidreapta $|AX$ $(AX \neq AB)$ (fig. II.13), un segment oarecare $|AP_1|$ şi punctele distincte P_2, P_3, P_4, P_5 astfel încît $|AP_1| = |P_1P_2| = |P_2P_3| = |P_3P_4| = |P_4P_5|$. Prin P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 se duc drepte paralele cu P_5B care intersectează $|AB|$ în M_1, M_2, M_3, M_4, $|AM_1| = |M_1M_2| = |M_2M_3| = |M_3M_4| = |M_4B|$ şi $\| AM_1 \| = \frac{1}{5} \| AB \|$.

2. Să se formuleze o reciprocă a teoremei 3, § 3, folosind teorema paralelelor echidistante.

§ 6. Teorema lui Thales

Definiţie. Fiind date mulţimile ordonate de numere reale $A = (a_1, a_2, .., a_n)$, $B = (b_1, b_2, ..., b_n)$, $n \geqslant 2$, $n \in \mathbf{N}$ ele se numesc *proporţionale* dacă există un număr real, nenul k, astfel încît $a_1 = kb_1$, $a_2 = kb_2, ..., a_n = kb_n$.
k se numeşte în acest caz *coeficient de proporţionalitate.*

Exemplu

$$A = (2, 5, 9),\ B = (6, 15, 27),$$

A şi B sînt proporţionale, coeficientul de proporţionalitate fiind $k \neq \frac{1}{3}$, pentru că $2 = \frac{1}{3} \cdot 6$, $5 = \frac{1}{3} \cdot 15$, $9 = \frac{1}{3} \cdot 27$. Se poate spune că şi (6, 15, 27) sînt proporţionale cu (2, 5, 9), în acest caz coeficientul de proporţionalitate fiind $k' = 3$. În cazul particular $k = 1$ cele două mulţimi de numere coincid. Dacă numerele $b_1, b_2, ..., b_n$ nu sînt nule atunci definiţia dată este echivalentă cu egalităţile:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}.$$

Definiţie. Fiind date mulţimile ordonate de *segmente*

$$(|A_1B_1|, |A_2B_2|, ..., |A_nB_n|)$$

$$(|A'_1B'_1|, |A'_2B'_2|, ..., |A'_nB'_n|), \quad n \geqslant 2, \quad n \in N$$

ele se numesc *proporţionale* dacă mulţimile ordonate de numere $(\|A_1B_1\|, \|A_2B_2\|, ..., \|A_nB_n\|)$, $(\|A'_1B'_1\|, \|A'_2B'_2\|, ..., \|A'_nB'_n\|)$ sînt proporţionale.

Teorema 1. (Teorema lui Thales). Fie triunghiul ABC şi $DE \parallel BC$, $D \in |AB|$, $E \in |AC|$. Atunci

$$\frac{\|AD\|}{\|AB\|} = \frac{\|AE\|}{\|AC\|}.$$

Demonstraţie

Cazul I. Se presupune că $\frac{\|AD\|}{\|AB\|} = \frac{m}{n}$ unde $m, n \in \mathbf{N}^*$; rezultă $\frac{\|AD\|}{m} = \frac{\|AB\|}{n}$ deci $(\|AD\|, \|AB\|)$ şi (m, n) sînt proporţionale. Fie $k > 0$ coeficientul de proporţionalitate. Deci $\|AD\| = k \cdot m$ şi $\|AB\| = k \cdot n$. Se împarte segmentul $|AB|$ în n segmente congruente, prin punctele $M_1, M_2, ... M_{n-1}$, astfel încît

$$\|AM_1\| = k,\ \|AM_2\| = 2k, ...,$$
$$\|AM_{n-1}\| = (n-1)k,\ \|AB\| = n.k$$

(fig. II.14). Pentru că $\|AD\| = m.k$ rezultă că $D = M_m$. Prin punctele $M_1, M_2, ... M_{n-1}$ se duc paralele la BC care intersectează $|AC|$ respectiv în

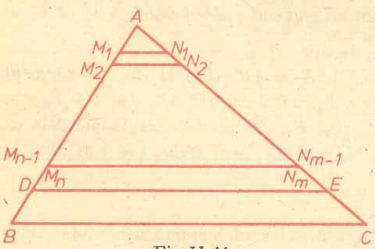


Fig.II.14

N_1 $N_2, \ldots, N_{n-1}$. Deoarece DE este una dintre aceste paralele, $E = N_m$. Din teorema paralelelor echidistante rezultă că

$$|AN_1| = |N_1N_2| = \ldots = |N_{n-1}C|.$$

Atunci

$$\|AE\| = m\,\|AN_1\| \text{ și } \|AC\| = n\,\|AN_1\|,$$

deci

$$\frac{\|AE\|}{\|AC\|} = \frac{m \cdot \|AN_1\|}{n \cdot \|AN_1\|} = \frac{m}{n} \quad \text{adică} \quad \frac{\|AD\|}{\|AB\|} = \frac{\|AE\|}{\|AC\|}.$$

Cazul II. Fie $\dfrac{\|AD\|}{\|AB\|} = \alpha$ unde $\alpha \notin \mathbf{Q}$.

Se presupune că $\dfrac{\|AE\|}{\|AC\|} = \beta \neq \alpha$ (fig. II.15).

Cum $\beta < 1$, există punctul unic E', $E' \in |AC|$, $E' \neq E$, astfel încît:

$$\|AE'\| = \alpha\,\|AC\| \text{ deci } \frac{\|AE'\|}{\|AC\|} = \alpha$$

a) Dacă $\beta > \alpha$ atunci $E' \in |AE|$ și $\|AE'\| < \|AE\|$. Există $n \in \mathbf{N}^*$, astfel încît $\dfrac{\|AC\|}{n} < \|EE'\|$. Se construiesc pe $|AC|$ punctele $N_1, N_2, \ldots, N_{n-1}$ care împart $|AC|$ în n segmente congruente de lungime k unde $k = \dfrac{\|AC\|}{n}$ și

$$\|AN_1\| = k, \quad \|AN_2\| = 2k, \ldots, \|AN_{n-1}\| = (n-1)k, \quad \|AC\| = n \cdot k.$$

Deoarece $\|EE'\| > k$, rezultă că cel puțin unul dintre punctele de diviziune, de exemplu $N_i \in |EE'|$. Atunci

$$\|AN_i\| = ik > \|AE'\| \text{ și } \frac{\|AN_i\|}{\|AC\|} = \frac{i}{n} > \frac{\|AE'\|}{\|AC\|} = \alpha.$$

Prin N_i se duce $N_iM_i \parallel BC$, $M_i \in |AB|$. Aplicînd rezultatul demonstrat în cazul I, rezultă:

$$\frac{\|AM_i\|}{\|AB\|} = \frac{\|AN_i\|}{\|AC\|} = \frac{i}{n} > \alpha. \tag{1}$$

Pe de altă parte, deoarece $M_iN_i \parallel DE$ punctul $M_i \in |AD|$ deci $\|AM_i\| < \|AD\|$ și

$$\frac{\|AM_i\|}{\|AB\|} < \frac{\|AD\|}{\|AB\|} = \alpha. \tag{2}$$

Inegalitățile (1) și (2) fiind contradictorii rezultă că nu este posibil $\beta > \alpha$.

b) Dacă $\beta < \alpha$ atunci $E' \in |EC|$ și există $n \in N^*$ astfel încît $\dfrac{\|AC\|}{n} < \|EE'\|$ (fig. II.16). Analog cazului II. a) punctele $N_1, N_2, \ldots, N_{n-1}$ împart segmentul

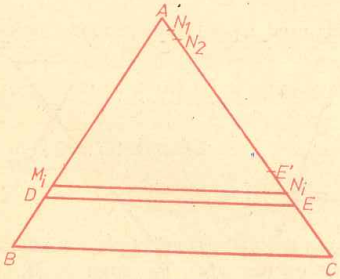


Fig. II.15

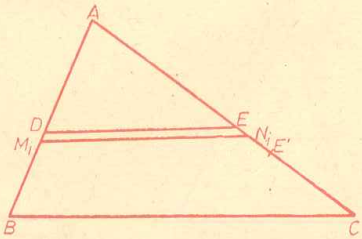


Fig. II.16

$|AC|$ în n segmente congruente de lungime k, $k = \frac{\|AC\|}{n}$ şi deoarece că $k < \|EE'\|$, există un punct de diviziune $N_i \in |EE'|$. Atunci

$$\|AN_i\| = ik < \|AE'\| \text{ şi } \frac{\|AN_i\|}{\|AC\|} = \frac{i}{n} < \frac{\|AE'\|}{\|AC\|} = \alpha.$$

Se construieşte $N_iM_i \parallel BC$ şi $M_i \in |AB|$. Aplicînd rezultatul demonstrat la cazul I, rezultă

$$\frac{\|AM_i\|}{\|AB\|} = \frac{\|AN_i\|}{\|AC\|} = \frac{i}{n} < \alpha \tag{3}$$

şi deoarece $M_iN_i \parallel DE$, $M_i \in |BD|$ deci $|AM_i| > \|AD\|$ adică

$$\frac{\|AM_i\|}{\|AB\|} > \frac{\|AD\|}{\|AB\|} = \alpha. \tag{4}$$

Inegalităţile (3) şi (4) fiind contradictorii rezultă că nu este posibil $\beta < \alpha$.
Din II a) şi b) rezultă $\alpha = \beta$ ceea ce demonstrează teorema.

Observaţie. Enunţul teoremei lui Thales este mai uşor de memorat în formularea: O paralelă la una din laturile unui triunghi determină pe celelalte laturi segmente proporţionale.

Folosind proprietăţile proporţiilor se pot obţine şi alte proporţii echivalente cu

$$\frac{\|AD\|}{\|AB\|} = \frac{\|AE\|}{\|AC\|} \text{ şi anume: } \frac{\|AD\|}{\|DB\|} = \frac{\|AE\|}{\|EC\|} \text{ sau } \frac{\|AB\|}{\|DB\|} = \frac{\|AC\|}{\|EC\|}.$$

Teorema 2. (Consecinţă a teoremei lui Thales.) Fie triunghiul ABC, $d \parallel BC$ şi $\{D\} = d \cap AB$, $\{E\} = d \cap AC$, $A \notin d$. Atunci

$$\frac{\|AD\|}{\|AB\|} = \frac{\|AE\|}{\|AC\|},$$

Demonstraţie

Cazul I. Dacă $D \in |AB|$ se aplică teorema 1 (demonstrată anterior), triunghiului ABC şi dreptei DE (fig. II. 17).

Cazul II. Dacă $B \in |AD|$ se aplică teorema 1 triunghiului ADE şi dreptei BC (fig. II. 18).

Cazul III. Dacă $A \in |BD|$ se construiesc segmentele $|AM| \equiv |AD|$, $|AN| \equiv |AE|$, $|AM| \subset |AB|$, $|AN| \subset |AC|$ (fig. II. 19). Atunci $EMND$ este paralelogram şi $MN \parallel ED \parallel BC$. Dacă $M \in |AB|$ se aplică

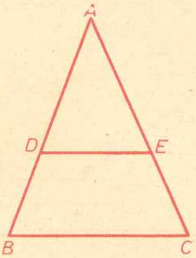


Fig. II.17

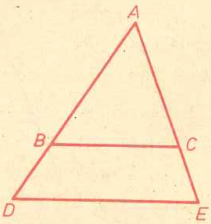


Fig. II.18

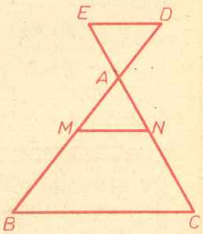


Fig. II.19

teorema 1 triunghiului ABC şi dreptei MN, dacă $B \in |AM|$, se aplică teorema 1 triunghiului AMN şi dreptei BC.

Teorema 3. (Reciproca teoremei 1.) Fie triunghiul ABC şi $D \in |AB|$, $E \in |AC|$, astfel încît

$$\frac{\|AD\|}{\|AB\|} = \frac{\|AE\|}{\|AC\|} \text{ sau } \frac{\|AD\|}{\|DB\|} = \frac{\|AE\|}{\|EC\|} \text{ sau } \frac{\|AB\|}{\|DB\|} = \frac{\|AC\|}{\|EC\|}$$

atunci $DE \parallel BC$.

Demonstraţia se face folosind metoda reducerii la absurd.

Teoremele 1, 2, 3 pot fi enunţate şi astfel:

Teorema lui Thales. Fie triunghiul ABC şi punctele D, E distincte diferite de A, $D \in AB$, $E \in AC$ astfel încît D şi E se află amîndouă fie pe laturile unghiului $\widehat{BAC}$ fie pe prelungirile acestora. Atunci $\frac{\|AD\|}{\|AB\|} = \frac{\|AE\|}{\|AC\|}$ dacă şi numai dacă $DE \parallel BC$.

Această teoremă are numeroase aplicaţii în probleme care cer stabilirea unor relaţii între lungimi de segmente sau în demonstrarea paralelismului a două drepte.

Teorema 4. (Teorema paralelelor neechidistante.) Se consideră dreptele $d_1, d_2, \ldots, d_n$, $n > 2$, $d_1 \parallel d_2 \parallel \ldots \parallel d_n$, secantele s şi k şi punctele $\{A_1\} = d_1 \cap s$, $\{A_2\} = d_2 \cap s, \ldots, \{A_n\} = d_n \cap s$, $\{B_1\} = d_1 \cap k$, $\{B_2\} = d_2 \cap k, \ldots, \{B_n\} = d_n \cap k$. Atunci

$$\frac{\|A_1A_2\|}{\|B_1B_2\|} = \frac{\|A_2A_3\|}{\|B_2B_3\|} = \ldots = \frac{\|A_{n-1}A_n\|}{\|B_{n-1}B_n\|}.$$

Demonstraţie. Dacă $s \parallel k$, atunci $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2, \ldots, A_{n-1}A_nB_nB_{n-1}$ sînt paralelograme şi

$$\frac{\|A_1A_2\|}{\|B_1B_2\|} = \frac{\|A_2A_3\|}{\|B_2B_3\|} = \ldots = \frac{\|A_{n-1}A_n\|}{\|B_{n-1}B_n\|} = 1 \text{(fig. II.20)}.$$

Dacă $s \nparallel k$, fie $\{O\} = s \cap k$. Se aplică teorema lui Thales triunghiului $OA_{i+1}B_{i+1}$ şi dreptei A_iB_i

$$\frac{\|OA_i\|}{\|A_iA_{i+1}\|} = \frac{\|OB_i\|}{\|B_iB_{i+1}\|}$$

de unde se obţine

$$(1) \qquad \frac{\|OA_i\|}{\|OB_i\|} = \frac{\|A_iA_{i+1}\|}{\|B_iB_{i+1}\|}.$$

Aplicînd teorema lui Thales triunghiului $OA_{i-1}B_{i-1}$ şi dreptei A_iB_i se obţine:

$$(2) \qquad \frac{\|OA_i\|}{\|OB_i\|} = \frac{\|A_{i-1}A_i\|}{\|B_{i-1}B_i\|}.$$

Din (1) şi (2) rezultă că

$$\frac{\|A_{i-1}A_i\|}{\|B_{i-1}B_i\|} = \frac{\|A_iA_{i+1}\|}{\|B_iB_{i+1}\|}.$$

Scriind aceste proporţii pentru $i = 1, 2, \ldots, n-1$, se obţine şirul de rapoarte egale din teoremă.

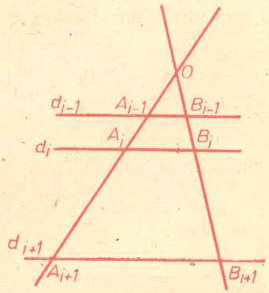


Fig. II.20

Exerciţii

1. Fie triunghiul isoscel ABC, $|AB| \equiv |AC|$ şi d o dreaptă paralelă cu BC, $A \notin d$. Dacă $\{M\} = d \cap AB$, $\{N\} = d \cap AC$ să se arate că triunghiul AMN este isoscel, iar dacă ABC este echilateral atunci şi AMN este echilateral.

2. Se consideră trei semidrepte cu aceeaşi origine M, cuprinse în drepte distincte şi punctele: A, B pe prima semidreaptă, C, D pe a doua şi N pe a treia, astfel ca $d(M, A) = 18$, $d(M, B) = 54$, $d(M, C) = 25$, $d(M, D) = 75$. O dreaptă ce trece prin A şi este pralelă cu BN intersectează MN în E. În ce condiţii paralela la ND prin E conţine punctul C?

3. Se consideră patrulaterul convex $ABCD$. Paralela prin B la latura AD intersectează dreapta AC în E, iar paralela prin A la latura BC intersectează dreapta BD în F. Să se arate că $EF \parallel CD$.

4. Fie triunghiul ABC şi $MN \parallel BC$, $M \in AB$, $N \in AC$. Se duc $MM' \parallel AC$, $NN' \parallel AB$ ($M' \in BC$, $N' \in BC$). Prin M' şi N' se duc $M'P \parallel AB$ şi $N'Q \parallel AC$, $P \in AC$, $Q \in AB$. Să se demonstreze că $PQ \parallel MN$.

5. Fie triunghiul ABC şi D, E, F, G, H mijloacele segmentelor $|BC|$, $|AD|$, $|BD|$, $|EF|$, $|ED|$. Fie $GH \cap AC = \{I\}$ şi $BE \cap AC = \{J\}$. Atunci

i) $\|AI\| = 3\,\|IC\|$,

ii) $\|HI\| = 3\,\|GH\|$,

iii) $\|BE\| = 3\,\|EJ\|$.

§ 7. Teorema bisectoarei

Teoremă. Fie triunghiul ABC şi $D \in |BC|$. Atunci $|AD$ este bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$ dacă şi numai dacă $\frac{\|BD\|}{\|DC\|} = \frac{\|AB\|}{\|AC\|}$.

Demonstraţie. **1.** Se arată că dacă $|AD$ este bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$ atunci $\frac{\|BD\|}{\|DC\|} = \frac{\|AB\|}{\|AC\|}$.

Se construieşte prin C paralela la AD care intersectează AB în E (fig. II.21). Din teorema lui Thales rezultă că $\frac{\|BD\|}{\|DC\|} = \frac{\|AB\|}{\|AE\|}$. Triunghiul ACE este isoscel pentru că $\widehat{AEC} \equiv \widehat{BAD}$ (unghiuri corespondente), $\widehat{ACE} \equiv \widehat{DAC}$ (unghiuri alterne interne) şi $\widehat{BAD} \equiv \widehat{DAC}$ (din ipoteza $|AD$ bisectoare). Deci $|AE| \equiv |AC|$ de unde rezultă egalitatea din teoremă.

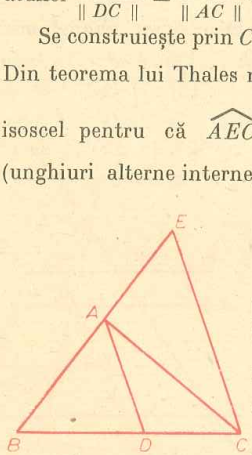


Fig. II.21

2. Se arată, prin reducere la absurd, că dacă $\frac{\|BD\|}{\|DC\|} = \frac{\|AB\|}{\|AC\|}$ atunci $[AD$ este bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$ (fig. II.22). Într-adevăr, dacă $[AD$ nu este bisectoare, fie $D' \in |BC|$ astfel încît $|AD'$ este bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$. Atunci $\frac{\|BD'\|}{\|D'C\|} =$

$= \frac{\| AB \|}{\| AC \|}$ și deci D' împarte segmentul $| BC |$ în același raport ca și punctul D ceea ce nu este posibil decît dacă $D = D'$.

Și această teoremă se poate formula într-un enunț ușor de memorat: „bisectoarea unui unghi a unui triunghi determină pe latura opusă unghiului segmente proporționale cu laturile unghiului și reciproc".

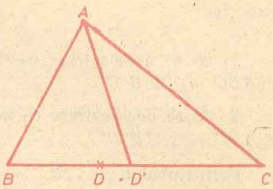


Fig. II.22

Exerciții

1. Fie triunghiul ABC, $D \in BC$ și $D \notin | BC |$. Atunci [AD este bisectoarea unuia din unghiurile cu vîrful în A și exterioare triunghiului, dacă și numai dacă $\frac{\| BD \|}{\| DC \|} = \frac{\| AB \|}{\| AC \|}$ (teorema bisectoarei unghiului exterior).

2. Lungimile laturilor unui triunghi ABC fiind $\| AB \| = c$, $\| AC \| = b$, $\| BC \| = a$, să se calculeze segmentele determinate de bisectoarea unui unghi a triunghiului pe latura opusă.

3. Într-un triunghi ABC, bisectoarele unghiurilor formate de mediana AM ($M \in | BC |$) cu latura $| BC |$ intersectează celelalte două laturi în P și Q. Să se arate că $PQ \parallel BC$. Reciproc, dacă $M \in | BC |$, MP și MQ sînt bisectoarele unghiurilor $\widehat{AMB}$ respectiv $\widehat{AMC}$ ($P \in | AB |$, $Q \in | AC |$) și $PQ \parallel BC$, atunci M este mijlocul laturii $| BC |$.

4. Se dă triunghiul ABC cu $\| AB \| = 20$, $\| BC \| = 30$, [BD bisectoarea unghiului $\hat{B}$, $D \in | AC |$, dreapta $DE \parallel AB$ ($E \in | BC |$) și dreapta $EF \parallel BD$ ($F \in | AC |$). Să se determine $\| AC \|$ dacă $\| AD \| - \| FC \| = 1$.

§ 8. Asemănarea triunghiurilor

Definiție. Fie triunghiurile ABC și $A'B'C'$. Dacă

(1) $$\frac{\| AB \|}{\| A'B' \|} = \frac{\| AC \|}{\| A'C' \|} = \frac{\| BC \|}{\| B'C' \|},$$

(2) $$\hat{A} = \hat{A}', \ \hat{B} = \hat{B}', \ \hat{C} = \hat{C}'$$

se spune că există *o asemănare* între triunghiurile ABC și $A'B'C'$ și se scrie $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Ca și în cazul congruenței, între două triunghiuri pot exista mai multe asemănări.

Definiție. Două triunghiuri ABC și $A'B'C'$ se numesc *asemenea* dacă între ele există cel puțin o asemănare.

Exerciţii

1. Să se demonstreze că dacă $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ şi $\triangle A'B'C' \sim \triangle A''B''C''$, atunci $\triangle ABC \sim \triangle A''B''C''$.

2. Să se demonstreze că dacă $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ şi $\triangle A'B'C' \equiv \triangle A''B''C''$, atunci $\triangle ABC \sim \triangle A''B''C''$.

Prin notaţia $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ se înţelege că ordinea vîrfurilor este dată şi are loc asemănarea definită de egalităţile (1) şi (2). În acest caz, perechile de vîrfuri (A, A'); (B, B'); (C, C') şi perechile de laturi $(|BC|, |B'C'|)$, $(|AC|, |A'C'|)$, $(|AB|, |A'B'|)$ se numesc *corespondente* sau *omoloage*. Raportul lungimilor a două laturi omoloage se numeşte *raportul de asemănare* al celor două triunghiuri. Evident, două triunghiuri congruente sînt asemenea, raportul de asemănare fiind egal cu 1 şi oricare două triunghiuri echilaterale sînt asemenea. O altă situaţie în care sînt puse în evidenţă triunghiuri asemenea este dată de următoarea:

Teorema 1. (Teorema fundamentală a asemănării). Fie triunghiul ABC şi $DE \parallel BC$, $A \neq D$, $D \in AB$, $E \in AC$. Atunci $\Delta ADE \sim \Delta ABC$.

Demonstraţie. Există trei situaţii posibile: 1) $D \in |AB|$, 2) $B \in |AD|$, 3) $A \in |BD|$. Se va da demonstraţia numai pentru cazul 1), întrucît celelalte cazuri se tratează în mod analog cazurilor considerate la consecinţa teoremei lui Thales.

Deoarece $DE \parallel BC$ rezultă $\widehat{ADE} \equiv \widehat{ABC}$ (unghiuri corespondente), $\widehat{AED} \equiv \widehat{ACB}$ (unghiuri corespondente), $\widehat{DAE} \equiv \widehat{BAC}$ (fig. II.23). Din teorema lui Thales rezultă că $\frac{\|AD\|}{\|AB\|} = \frac{\|AE\|}{\|AC\|}$. Se construieşte $EF \parallel AB$, $F \in BC$ şi atunci $\frac{\|AE\|}{\|AC\|} = \frac{\|BF\|}{\|BC\|}$. Deoarece $BDEF$ este paralelogram rezultă $|DE| \equiv |BF|$ şi $\frac{\|AE\|}{\|AC\|} = \frac{\|DE\|}{\|BC\|}$ deci se obţine $\frac{\|AD\|}{\|AB\|} = \frac{\|AE\|}{\|AC\|} = \frac{\|DE\|}{\|BC\|}$. Fiind îndeplinite egalităţile din definiţie, rezultă că $\triangle ADE \sim \triangle ABC$. Noţiunea de asemănare se poate extinde şi pentru poligoane.

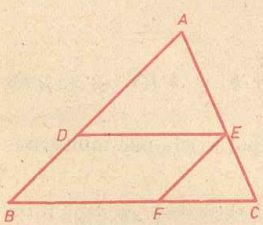


Fig. II.23

Definiţie. Două poligoane convexe $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ şi $B_1B_2B_3 \ldots B_n$ se numesc *asemenea* dacă

$$\frac{\|A_1A_2\|}{\|B_1B_2\|} = \frac{\|A_2A_3\|}{\|B_2B_3\|} = \ldots = \frac{\|A_{n-1}A_n\|}{\|B_{n-1}B_n\|}$$

şi $\hat{A}_1 \equiv \hat{B}_1$, $\hat{A}_2 \equiv \hat{B}_2, \ldots, \hat{A}_n \equiv \hat{B}_n$.

Pe baza teoremei 1 se pot demonstra teoremele asemănării, numite şi cazuri de asemănare, care stabilesc condiţii necesare şi suficiente pentru ca două triunghiuri să fie asemenea.

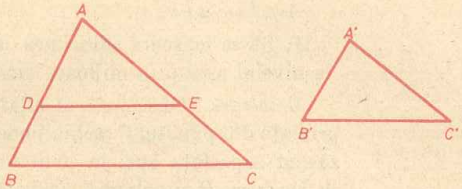


Fig. II.24

Fie triunghiurile ABC şi $A'B'C'$:

Teorema 2. Dacă $\hat{A} \equiv \hat{A}'$ **şi** $\hat{B} \equiv \hat{B}'$ **atunci** $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Teorema 3. Dacă $\hat{A} \equiv \hat{A}'$ **şi** $\frac{\| AB \|}{\| A'B' \|} = \frac{\| AC \|}{\| A'C' \|}$ **atunci** $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Teorema 4. Dacă $\frac{\| AB \|}{\| A'B' \|} = \frac{\| AC \|}{\| A'C' \|} = \frac{\| BC \|}{\| B'C' \|}$ **atunci** $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Demonstraţii. Fie $D \in | AB$ astfel încît $| A'B' | \equiv | AD |$ şi $DE \parallel BC$, $E \in | AC$. $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ conform teoremei fundamentale a asemănării (fig. II.24). Se va demonstra că în ipotezele fiecăreia dintre cele trei teoreme $\triangle ADE \equiv \triangle A'B'C'$ şi deci $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

1) $\hat{A} \equiv \hat{A}'$ (din ipoteza teoremei 2)

$\widehat{ADE} \equiv \widehat{ABC} \equiv \hat{B}'$ (din construcţie şi ipoteza teoremei 2)

$| AD | \equiv | A'B' |$ (din construcţie).

Deci $\Delta ADE \equiv \Delta A'B'C'$ (din U.L.U.).

$$\left.\begin{array}{l} 2)\ \frac{\| AB \|}{\| A'B' \|} = \frac{\| AC \|}{\| A'C' \|} \text{ (din ipoteza teoremei 3)} \\ \frac{\| AB \|}{\| AD \|} = \frac{\| AC \|}{\| AE \|} \text{ (pentru că } \triangle ADE \sim \triangle ABC) \\ | AD | \equiv | A'B' | \text{ (din construcţie)} \end{array}\right\} \text{rezultă } \frac{\| AC \|}{\| A'C' \|} = \frac{\| AC \|}{\| AE \|}$$

deci $| A'C' | \equiv | AE |$, deoarece $\hat{A} \equiv \hat{A}'$ şi $| AD | \equiv | A'B' |$ rezultă că $\triangle ADE \equiv \triangle A'B'C'$ (din L.U.L.).

3) $\frac{\| AB \|}{\| A'B' \|} = \frac{\| AC \|}{\| A'C' \|} = \frac{\| BC \|}{\| B'C' \|}$ (din ipoteza teoremei 4)

$\frac{\| AB \|}{\| AD \|} = \frac{\| AC \|}{\| AE \|} = \frac{\| BC \|}{\| DE \|}$ (pentru că $\triangle ADE \sim \triangle ABC$) şi $| AD | \equiv$ $\equiv | A'B' |$, rezultă că

$$\frac{\| AB \|}{\| A'B' \|} = \frac{\| AB \|}{\| AD \|} = \frac{\| AC \|}{\| A'C' \|} = \frac{\| AC \|}{\| AE \|} = \frac{\| BC \|}{\| B'C' \|} = \frac{\| BC \|}{\| DE \|}.$$

Egalitatea rapoartelor cu aceeaşi numărători implică egalitatea numitorilor deci $\| A'C' \| = \| AE \|$ şi $\| B'C' \| = \| DE \|$ sau $| A'C' | \equiv | AE |$ şi $| B'C' | \equiv | DE |$. Rezultă şi în acest caz că $\triangle ADE \equiv \triangle A'B'C'$ (din L.L.L.)

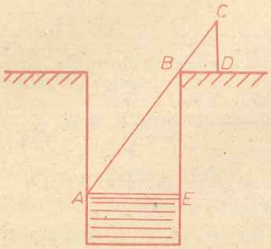


Fig. II.25

Aplicații

1. Să se măsoare adîncimea unei fîntîni, pînă la nivelul apei prin mijloace simple.

Rezolvare. Observatorul aflat în punctul D privește din punctul C (ochiul) bordura, punctul B, zărind suprafața apei în punctul A, astfel încît A, bordura B și ochiul C să fie în linie dreaptă (fig. II.25). În acest caz $\triangle BCD \sim \triangle ABE$ și $\frac{\| CD \|}{\| BE \|} = \frac{\| BD \|}{\| AE \|}$. Lungimile $\| CD \|$, $\| BD \|$, $\| AE \|$ sînt respectiv înălțimea observatorului, distanța de la acesta la bordură și lărgimea fîntînii deci pot fi măsurate și rezultă $\| BE \| = \frac{\| CD \| \cdot \| AE \|}{\| BD \|}$.

2. Determinarea înălțimii unui copac folosind legile reflexiei într-o oglindă plană.

Rezolvare. Într-un punct O este situată o oglindă plană, înălțimea copacului fiind $\| AB \|$, observatorul situat în punctul D, $O \in | AD |$ se deplasează astfel încît din punctul C (ochi) zărește în oglindă vîrful copacului (fig. II.26). Știind că $\widehat{BOM} \equiv \widehat{MOC}$ (unghiul de incidență este congruent cu unghiul de reflexie) rezultă $\triangle AOB \sim \triangle DOC$, deci $\frac{\| AB \|}{\| DC \|} = \frac{\| AO \|}{\| DO \|}$. $\| AO \|$, $\| OD \|$, $\| CD \|$ fiind respectiv distanța de la copac la oglindă, distanța de la oglindă la observator și înălțimea observatorului; în urma înlocuirii acestora în proporție se obține: $\| AB \| = \frac{\| DC \| \cdot \| AO \|}{\| DO \|}$.

3. Determinarea înălțimii unui copac, despărțit de observator printr-un obstacol, folosind legile reflexiei într-o oglindă plană.

Rezolvare. Se așază oglinda în O și observatorul se deplasează în punctul D, $O \in | AD |$, astfel încît din C (ochi) zărește în oglindă vîrful

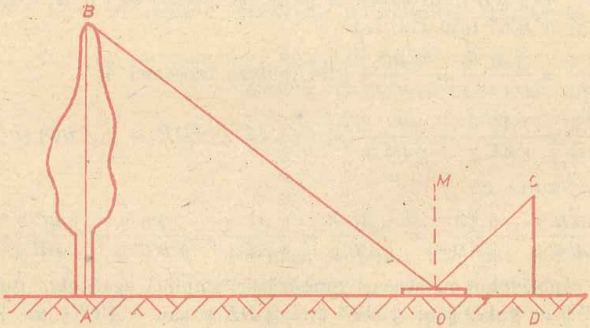


Fig. II.26

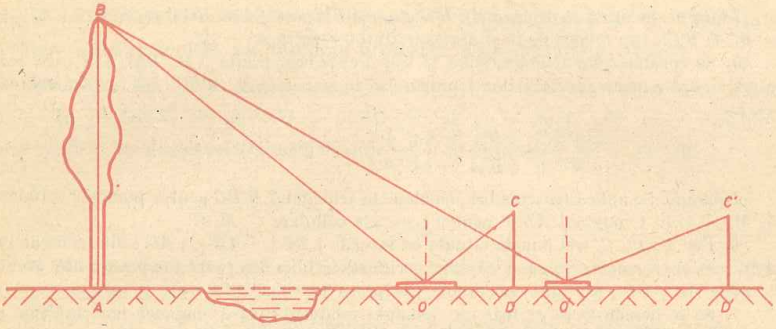


Fig. II.27

copacului (fig. II.27). Atunci $\triangle AOB \sim \triangle DOC$. Se deplasează oglinda în O', iar observatorul se deplasează în D'; repetînd observaţia, se obţine $\triangle AO'B \sim \triangle D'O'C'$ Scriind proporţionalitatea laturilor triunghiurilor asemenea obţinute, avem:

$\frac{\| AB \|}{\| DC \|} = \frac{\| AO \|}{\| DO \|}$ şi $\frac{\| AB \|}{\| D'C' \|} = \frac{\| AO' \|}{\| D'O' \|}$ deoarece $\| DC \| = \| D'C' \|$ rezultă

$$\frac{\| AB \|}{\| DC \|} = \frac{\| AO \|}{\| DO \|} = \frac{\| AB \|}{\| D'C' \|} = \frac{\| AO' \|}{\| D'O' \|} = \frac{\| AO' \| - \| AO \|}{\| D'O' \| - \| DO \|} = \frac{\| OO' \|}{\| D'O' \| - \| DO \|}.$$

Prin urmare

$$\frac{\| AB \|}{\| DC \|} = \frac{\| OO' \|}{\| D'O' \| - \| DO \|}.$$

$\| OO' \|$, $\| DC \|$, $\| D'O' \|$, $\| DO \|$ se determină cu mijloace simple deci $\| AB \| =$

$$= \frac{\| DC \| \cdot \| OO' \|}{\| D'O' \| - \| DO \|}.$$

Exerciţii

3. Fie ABC un triunghi şi fie A', B', C' trei puncte coliniare distincte astfel ca $A' \in BC$, $B' \in CA$, $C' \in AD$. Să se arate că

$$\frac{\| A'B \|}{\| A'C \|} \cdot \frac{\| B'C \|}{\| B'A \|} \cdot \frac{\| C'A \|}{\| C'B \|} = 1 \text{ (teorema lui Menelaus).}$$

Indicaţie. Se duce o paralelă prin C la AB care intersectează pe $A'B'$ în P. Din proporţionalitatea laturilor rezultată din asemănările $\triangle CPA' \sim \triangle BC'A'$, $\triangle AB'C' \sim \triangle CB'P$ se obţine relaţia cerută.

4. Se consideră punctele A', B', C' situate pe dreptele BC, AC, AB determinate de laturile triunghiului ABC. Dacă două dintre ele sînt situate pe laturile triunghiului şi unul pe prelungirea laturii, sau nici unul nu e situat pe laturile triunghiului şi este verificată relaţia din problema precedentă, atunci cele trei puncte sînt coliniare (reciproca teoremei lui Menelaus).

Indicaţie. Se arată că de exemplu $B'C'$ nu poate fi paralelă cu BC şi se notează $\{A''\} = BC \cap B'C'$. Din relaţia dată şi din exerciţiul 3 rezultă $A' = A''$.

5. Se consideră un triunghi ABC şi trei drepte concurente AM, BM, CM care mai intersectează suporturile laturilor triunghiului în punctele A', B', C'. Să se demonstreze relaţia

$$\frac{\|A'B\|}{\|A'C\|} \cdot \frac{\|B'C\|}{\|B'A\|} \cdot \frac{\|C'A\|}{\|C'B\|} = 1 \text{ (teorema lui Ceva)}$$

Indicaţie. Se aplică teorema lui Menelaus în triunghiul $B'BC$ pentru punctele coliniare A, M, A' şi în triunghiul ABB' pentru punctele coliniare C, M, C'.

6. Fie A', B', C' trei puncte situate pe laturile $|BC|$, $|AB|$, $|AC|$ ale triunghiului ABC. Să se demonstreze că dacă este verificată relaţia din problema precedentă atunci dreptele AA', BB', CC' sînt concurente (reciproca teoremei lui Ceva).

7. Să se demonstreze că într-un triunghi produsul dintre lungimea unei înălţimi şi lungimea laturii corespunzătoare este acelaşi pentru fiecare înălţime.

8. Să se demonstreze că distanţele de la un punct M al medianei $|AD|$ la laturile $|AB|$, $|AC|$ ale unui triunghi sînt în raport invers cu lungimile acestor laturi. Se va deduce că distanţele de la centrul de greutate la laturi sînt invers proporţionale cu lungimile laturilor.

9. Dintr-o tablă triunghiulară se cere să se taie un pătrat cu o latură pe latura cea mai mare a triunghiului şi cu celelalte două vîrfuri pe celelalte laturi ale triunghiului.

10. Pe latura $|AB|$ a triunghiului ABC se consideră un punct C_1. Prin A se duce paralela la CC_1 care intersectează BC în A_1 şi prin B paralela la CC_1 care intersectează AC în B_1. Să se demonstreze că $\dfrac{1}{\|AA_1\|} + \dfrac{1}{\|BB_1\|} = \dfrac{1}{\|CC_1\|}$.

Indicaţie

$$\frac{\|CC_1\|}{\|B_1B\|} = \frac{\|AC_1\|}{\|AB\|}, \quad \frac{\|CC_1\|}{\|AA_1\|} = \frac{\|C_1B\|}{\|AB\|},$$

$$\frac{\|CC_1\|}{\|A_1A\|} + \frac{\|CC_1\|}{\|B_1B\|} = \frac{\|AC_1\| + \|C_1B\|}{\|AB\|} = 1.$$

11. În triunghiul ABC se consideră bisectoarea unghiului $\hat{C}$ care intersectează latura $|AB|$ în D. Demonstraţi că $\|CD\| < \sqrt{\|AC\| \cdot \|BC\|}$.

Indicaţie. Fie $E \in |AC|$ astfel ca $\widehat{CDE} \equiv \widehat{CBD}$. Deoarece $\widehat{CDA} > \widehat{CBD}$ şi

$$\frac{\|CB\|}{\|CD\|} = \frac{\|CD\|}{\|CE\|}, \quad \|CD\|^2 = \|CE\| \cdot \|CB\| < \|CB\| \cdot \|AC\|.$$

12. Prin punctul de intersecţie O al diagonalelor unui trapez se duce o paralelă la baze, care taie laturile neparalele în E şi F. Să se arate că O este mijlocul segmentului $|EF|$.

13. Să se arate că dreapta determinată de punctul de intersecţie al laturilor neparalele ale unui trapez şi punctul de intersecţie O al diagonalelor trece prin mijloacele bazelor trapezului.

§ 9. Relaţii metrice

Definiţie. Fie o dreaptă d şi un punct M, $M \notin d$. Se numeşte *proiecţie ortogonală* a punctului M pe dreapta d piciorul perpendicularei din M pe d. Dacă $MM' \perp d$, $M' \in d$, se notează $M' = \mathrm{pr}_d M$. Pentru $M \in d$ se defineşte

$pr_d M = \dot{M}$. Pentru prescurtarea exprimării, în continuare, se va folosi doar termenul *proiecţie* care va desemna proiecţia ortogonală (fig. II.28.).

Definiţie. Fie $\mathcal{M}$ o mulţime de puncte şi d o dreaptă. Mulţimea $\mathcal{M}'$ se numeşte proiecţia ortogonală a mulţimii $\mathcal{M}$ pe d dacă $\mathcal{M}'$ este mulţimea proiecţiilor pe d a punctelor mulţimii $\mathcal{M}$. Se notează $\mathcal{M}' = pr_d \mathcal{M}$.

Exerciţii

1. Să se arate că proiecţia unui segment $|AB|$ pe o dreaptă d este segmentul $|CD|$ unde $C = pr_d A$ şi $D = pr_d B$.

2. Să se arate că proiecţia unui poligon pe o dreaptă este un segment închis.

Teorema 1. (Teorema catetei.) Lungimea catetei unui triunghi dreptunghic este medie proporţională între lungimea ipotenuzei şi a proiecţiei catetei pe ipotenuză.

Teorema 2. (Teorema înălţimii.) Într-un triunghi dreptunghic, lungimea înălţimii duse din vîrful unghiului drept este medie proporţională între lungimile proiecţiilor catetelor pe ipotenuză.

Se reaminteşte că numărul pozitiv „a" se numeşte *medie proporţională* (sau geometrică) a numerelor pozitive „b" şi „c" dacă $a^2 = bc$.

Demonstraţie. Fie triunghiul ABC, $\hat{A} \in 90°$ şi fie $D = pr_{BC} A$ (fig. II.29). Deoarece $\hat{B}$ şi $\hat{C}$ sînt ascuţite rezultă că $D \in |BC|$ (ex. 1. § 12. I) şi $|BD| = pr_{BC}|AB|$, $|CD| = pr_{BC}|AC|$. $\triangle BDA \sim \triangle BAC$ fiind dreptunghice şi avînd unghiul $\hat{B}$ comun, deci $\frac{\|AB\|}{\|CB\|} = \frac{\|BD\|}{\|BA\|}$ de unde $\|AB\|^2 = \|CB\| \cdot \|BD\|$ ceea ce demonstrează teorema 1.

Analog $\triangle ADC \sim \triangle BAC$ de unde rezultă $\triangle BDA \sim \triangle ADC$ şi $\frac{\|DB\|}{\|DA\|} = \frac{\|DA\|}{\|DC\|}$ deci $\|DA\|^2 = \|DB\| \cdot \|DC\|$ ceea ce demonstrează teorema 2.

Teorema 3. (Teorema lui Pitagora.) Într-un triunghi dreptunghic pătratul lungimii ipotenuzei este egal cu suma pătratelor lungimilor catetelor.

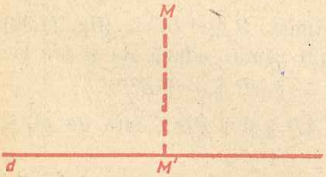


Fig. II.28

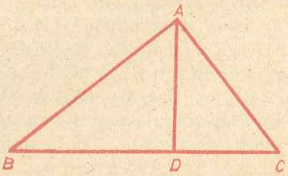


Fig. II.29

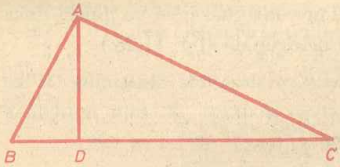


Fig. II.30

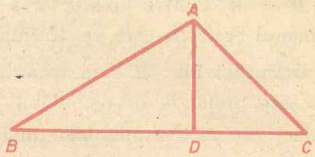


Fig. II. 31

Demonstrație

Fie triunghiul ABC, $\hat{A} \in 90°$ și $D = \mathrm{pr}_{BC}A$ (fig. II.30). Atunci

$$\| AB \|^2 = \| BC \| \cdot \| BD \|,$$

$$\| AC \|^2 = \| BC \| \cdot \| DC \|.$$

Deci $\| AB \|^2 + \| AC \|^2 = \| BC \| \cdot (\| BD \| + \| DC \|) = \| BC \|^2.$

Teorema 4. (Reciprocele teoremelor 1, 2.) Se consideră triunghiul ABC, $D = \mathrm{pr}_{BC}A$. Dacă $D \in | BC |$ și este verificată una din condițiile:

i) $\| AB \|^2 = \| BC \| \cdot \| BD \|$,

ii) $\| AD \|^2 = \| BD \| \cdot \| DC \|$, **atunci** $\hat{A} \in 90°$.

Demonstrația se face prin reducere la absurd și se lasă ca exercițiu.

Teorema 5'. (Teorema lui Pitagora generalizată.) Dacă în triunghiul ABC, $\hat{C}$ este un unghi ascuțit și $D = \mathrm{pr}_{BC}A$, atunci

(1) $\| AB \|^2 = \| AC \|^2 + \| BC \|^2 - 2 \| BC \| \cdot \| DC \|.$

Demonstrație. Se consideră trei cazuri

a) $\hat{B}$ ascuțit, atunci $D \in | BC |$ (fig. II.31). Triunghiurile ABD și ADC fiind dreptunghice au loc egalitățile:

(2) $$\| AB \|^2 = \| AD \|^2 + \| BD \|^2,$$

(3) $$\| AD \|^2 = \| AC \|^2 - \| DC \|^2,$$

(4) $$\| BD \| = \| BC \| - \| DC \|.$$

Se înlocuiește în (2) $\| AD \|$ și $\| BD \|$ date de egalitățile (3) și (4), atunci

$$\| AB \|^2 = \| AC \|^2 - \| DC \|^2 + (\| BC \| - \| DC \|)^2,$$

$$\| AB \|^2 = \| AC \|^2 + \| BC \|^2 - 2 \| BC \| \cdot \| DC \|.$$

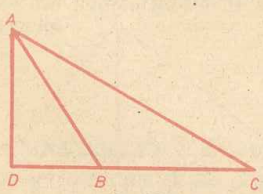


Fig. II.32

b) $\hat{B}$ obtuz, atunci $B \in | DC |$, (fig. II.32) egalitățile (2) și (3) rămîn adevărate și are loc

(5) $$\| BD \| = \| DC \| - \| BC \|.$$

Înlocuind în (2) $\| AD \|$ și $\| BD \|$ date de (3) și (5) se obține

$$\| AB \|^2 = \| AC \|^2 - \| DC \|^2 + (\| DC \| - \| BC \|)^2$$

deci

$$\| AB \|^2 = \| AC \|^2 + \| BC \|^2 - 2 \| BC \| \cdot \| DC \|.$$

c) $\hat{B} \in 90°$, atunci (1) rezultă din teorema lui Pitagora

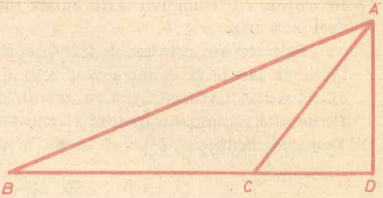


Fig. II.33

Teorema 5″. (Teorema lui Pitagora generalizată.) Dacă în triunghiul ABC, $\hat{C}$ este obtuz şi $D = \mathrm{pr}_{BC} A$, atunci

(6) $$\| AB \|^2 = \| AC \|^2 + \| BC \|^2 + 2 \| BC \| \cdot \| DC \|.$$

Demonstraţie. $\hat{C}$ fiind obtuz rezultă că $C \in | BD |$ (fig. II.33). Din triunghiurile dreptunghice ABD şi ACD se obţine:

(7) $$\| AB \|^2 = \| AD \|^2 + \| BD \|^2,$$

(8) $$\| AD \|^2 = \| AC \|^2 - \| CD \|^2,$$

(9) $$\| BD \| = \| BC \| + \| CD \|.$$

Înlocuind $\| AD \|$, $\| BD \|$ din (8) şi (9) în egalitatea (7) se obţine:

$$\| AB \|^2 = \| AC \|^2 + \| BC \|^2 + 2 \| BC \| \cdot \| DC \|.$$

Teorema 6. (Reciproca teoremei lui Pitagora.) Dacă într-un triunghi suma pătratelor lungimilor a două laturi este egală cu pătratul lungimii laturii a treia, atunci triunghiul este dreptunghic.

Demonstraţie. Se consideră triunghiul ABC în care

$$\| AB \|^2 = \| AC \|^2 + \| BC \|^2.$$

Fie D proiecţia lui A pe BC. Dacă $\widehat{ACB}$ nu este unghi drept atunci $D \neq C$. Ţinînd seama de ipoteză şi de relaţiile (1) sau (6), (după cum ACB este ascuţit sau obtuz) rezultă $\| BC \| \cdot \| DC \| = 0$, adică $\| DC \| = 0$, ceea ce este în contradicţie cu $C \neq D$. Rezultă că $\widehat{ACB} \in 90°$.

Aplicaţie. Să se arate că fiind date trei numere reale pozitive a, b, c astfel încît $a < b + c$, $b < a + c$, $c < a + b$, există un triunghi ABC pentru care $\| AB \| = c$, $\| AC \| = b$, $\| BC \| = a$.

Rezolvare. Se poate presupune că $a \leqslant b \leqslant c$, şi pe o dreaptă d se consideră punctele A, B astfel ca $\| AB \| = c$. Se va arăta că se poate determina poziţia unui punct M, $M \in | AB |$ şi a unui punct C care aparţine perpendicularei în M pe AB astfel ca $\| AC \| = b$ şi $\| BC \| = a$. Poziţia acestor puncte este determinată dacă se cunosc numerele $x = \| AM \|$ şi $y = \| MC \|$ (fig. II.34). În acest scop vom presupune că există triunghiul cerut ABC şi notînd cu M proiecţia lui C pe AB se calculează valorile lui x şi y. Deoarece am presupus că $a \leqslant b \leqslant c$ rezultă că unghiurile A şi B sînt ascuţite şi deci $M \in | AB |$ (ex. 1, § 12, I). Aplicînd teorema lui Pitagora generalizată se obţine $a^2 = b^2 + c^2 - 2cx$, deci:

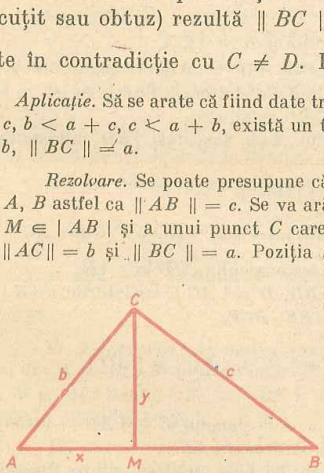


Fig. II.34

(10) $$x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} \text{ şi } y = \sqrt{b^2 - x^2}.$$

În ipoteza că triunghiul ABC există rezultă că există și segmentele $|AM|$, $|CM|$, deci $x > 0$ și $x < b$.

Se trece acum la rezolvarea propriu-zisă a problemei propuse. Se va arăta că în ipotezele făcute în enunț și $a \leqslant b \leqslant c$, numerele x și y definite prin formulele (10) există și sînt pozitive, ceea ce revine la $0 < x < b$. Din $b \geqslant a$ și $c > 0$ rezultă $x > 0$. Pe de altă parte, prin ipoteză $c < a + b$, deci $0 \leqslant c - b < a$ și astfel $(c - b)^2 < a^2$. De aici se deduce că $b^2 + c^2 - 2bc < a^2$ și $b^2 + c^2 - a^2 < 2bc$, de unde rezultă

$$x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} < b.$$

Se determină pe $|AB$ (pe baza teoremei de construcție a unui segment) punctul M astfel ca $\|AM\| = x$ și pe perpendiculara în M pe AB punctul C astfel ca $\|MC\| = y$. Cum $x < b \leqslant c$, rezultă $M \in |AB|$ și $\|AC\|^2 = x^2 + y^2 = x^2 + b^2 - x^2 = b^2$, $\|BC\|^2 = \|MB\|^2 + \|CM\|^2 = (c - x)^2 + y^2 = c^2 - 2cx + x^2 + y^2 = c^2 - 2c\dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} + x^2 + b^2 - x^2 = a^2$.

S-a demonstrat că triunghiul ABC astfel construit îndeplinește cerințele problemei.

Exerciții

3. Se consideră triunghiul ABC ($\hat{A} \in 90°$) în care $AD \perp BC$, $D \in BC$. Să se arate că

$$\frac{1}{\|AD\|^2} = \frac{1}{\|AB\|^2} + \frac{1}{\|AC\|^2}.$$

4. Să se demonstreze că raportul lungimilor proiecțiilor catetelor unui triunghi dreptunghic pe ipotenuză este egal cu raportul pătratelor lungimilor catetelor.

5. Se consideră un triunghi ABC și fie D proiecția lui A pe BC. Perpendiculara în A pe AB intersectează pe BC în E. Dacă $\|AB\| = 13$, $\|BC\| = 21$ și $\|AD\| = 12$ să se afle perimetrul triunghiului ACE.

6. Prin vîrful A al triunghiului isoscel ABC se duce o paralelă la BC pe care se consideră un punct M. Să se demonstreze că:

$$\|MB\|^2 + \|MC\|^2 = 2(\|MA\|^2 + \|AB\|^2.$$

Indicație. Se notează cu B', C' proiecțiile lui B, C pe AM. Unul din triunghiurile MAB și MAC are unghiul din A obtuz și celălalt are unghiul din A ascuțit. Se calculează cu teorema lui Pitagora generalizată $\|MB\|^2$ și $\|MC\|^2$ și se adună.

7. În dreptunghiul $ABCD$, perpendiculara din A pe diagonala $|BD|$ intersectează dreapta BC în F. Să se demonstreze că

$$\|AB\|^2 = \|BF\| \cdot \|BC\|.$$

8. Se consideră triunghiul ABC, $\hat{A} \in 90°$ în care $\|AB\| = \|AC\| + 6$ și $\|BC\| = 30$. Să se determine $\|CD\|$, $|CD$ fiind bisectoarea unghiului $\hat{C}$, $D \in |AB|$.

9. Se consideră triunghiul ABC și înălțimea BD, $D \in |AC|$. Pe laturile $|AB|$ și $|BC|$ se construiesc triunghiurile dreptunghice ABE, BCF,

$$m(\widehat{BAE}) = m(\widehat{BCF}) = 90 \text{ și } |AE| \equiv |DC|, \ |FC| \equiv |AD|.$$

Să se arate că $|BF| \equiv |BE|$.

10. Se consideră pătratul $ABCD$, cu $\|AB\| = 4$ și punctul $E \in |AD|$, astfel ca $\|AE\| = 1$. Să se afle distanța de la punctul B la dreapta CE.

Indicație: Se folosește proprietatea că într-un triunghi produsul dintre lungimea înălțimii și lungimea laturii corespunzătoare este constant.

Exerciţii recapitulative

1. Lungimile bazelor unui trapez sînt a, b, $a > b$ şi distanţa dintre baze este h. Să se afle:

i) distanţa dintre punctul de intersecţie a laturilor neparalele şi baza mică,

ii) distanţa dintre punctul de intersecţie a diagonalelor şi baza mare.

◇ **2.** Să se arate că lungimea medianei $|AM|$ $(M \in |BC|)$ a triunghiului ABC, este:

$$\|AM\|^2 = \frac{2(\|AB\|^2 + \|AC\|^2) - \|BC\|^2}{4}.$$

3. Se consideră triunghiul ABC în care $\|AB\| = 40$, $\|BC\| = 50$, $\|CA\| = 60$ şi bisectoarea $|AD|$, $D \in |BC|$. Să se afle în ce raport împarte bisectoarea $|BE|$, segmentul $|AD|$.

4. Se dă un pătrat $ABCD$ şi $M \in \text{Int } ABCD$ astfel încît

$$m(\widehat{MCD}) = m(\widehat{MDC}) = 15.$$

Să se arate că triunghiul ABM este echilateral.

5. Se consideră pătratul $ABCD$ şi punctele E, F, care determină pe $|CD|$ segmentele $|DE| \equiv |EF| \equiv |FC|$. Fie $\{G\} = AE \cap BC$ şi H mijlocul lui $|AG|$. Să se arate că $\|DH\| = \frac{1}{2}\|AC\|$.

6. Fie $|AC|$ cea mai lungă dintre diagonalele paralelogramului $ABCD$ şi E, F, picioarele perpendicularelor din C pe AB şi AD. Să se arate că:

$$\|AB\| \cdot \|AE\| + \|AD\| \cdot \|AF\| = \|AC\|^2.$$

7. Se consideră triunghiul ascuţitunghic ABC şi D piciorul perpendicularei din A pe BC. Se notează cu E şi F intersecţia perpendicularelor pe BC în punctele B şi C cu înălţimile din C şi B. Să se demonstreze că dacă $|AD| \equiv |BC|$ atunci:

i) triunghiurile BDE şi CDF sînt isoscele,

ii) triunghiul EDF este dreptunghic şi $|DA|$ este bisectoarea unghiului $\widehat{EDF}$.

8. Fie A, B, C, D, centrele de simetrie ale pătratelor construite în exterior pe laturile unui romb. Să se arate că $ABCD$ este pătrat.

9. Se consideră triunghiul ABC cu

$$\|AB\| = 34,\ \|BC\| = 56,\ M \in |AC|,\ |AM| \equiv |MC|,\ \|BM\| = 39.$$

Să se afle distanţa de la M la dreapta BC.

10. Se consideră triunghiul ABC cu

$$\|AB\| = \|AC\|,\ \widehat{BAC} \text{ obtuz şi } AD \perp AB,\ D \in |BC|.$$

Să se afle $\frac{\|CD\|}{\|BD\|}$ ştiind că $\|BC\| = 32$ şi distanţa de la A la dreapta BC este 12.

11. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC $(\hat{A} \in 90°)$, M piciorul perpendicularei din A pe BC, N mijlocul laturii $|BC|$ şi P intersecţia dreptei AN cu perpendiculara din M pe AC. Dacă $|AP| \equiv |PN|$, să se arate că unghiurile ascuţite ale triunghiului ABC au măsurile 60 şi 30.

12. Fie un dreptunghi $ABCD$. Să se demonstreze că pentru orice punct M este verificată relaţia $\|MA\|^2 + \|MC\|^2 = \|MB\|^2 + \|MD\|^2$.

Indicaţie. Se utilizează rezultatul exerciţiului 2.

13. A, B, C fiind trei puncte coliniare $B \in |AC|$ şi O un punct exterior dreptei AC, să se demonstreze relaţia: $\| OA \|^2 \cdot \| BC \| - \| OB \|^2 \cdot \| AC \| + \| OC \|^2 \cdot \| AB \| = \| AB \| \cdot \| BC \| \cdot \| AC \|$. (Relaţia lui Stewart).

Indicaţie. Se aplică teorema lui Pitagora generalizată în triunghiurile OAB şi OBC; relaţiile obţinute se înmulţesc respectiv cu $\|BC\|$ şi $\| AB \|$ şi se adună membru cu membru.

◇ **14.** Să se afle locul geometric al punctelor M, pentru care diferenţa pătratelor distanţelor la două puncte date A, B să fie o constantă k.

Indicaţie. Fie O mijlocul segmentului $| AB |$ şi N proiecţia lui M pe AB. Presupunînd $k > 0$, avem $\| MA \| > \| MB \|$ şi $N \in | BO |$. Aplicînd teorema lui Pitagora generalizată în triunghiurile AMO şi BMO se deduce: $\| MA \|^2 - \| MB \|^2 = 2 \| AB \| \cdot \| NO \| = k$, $\| NO \| = \dfrac{k}{2 \| AB \|}$ deci $\| NO \|$ este constant şi locul geometric este perpendiculara pe AB, dusă prin punctul fix N.

15. Se dă pătratul $ABCD$ cu laturile de lungime a. Pe laturile $| BC |$ şi $| CD |$ se iau punctele E, respectiv F astfel încît $\| BE \| = \dfrac{1}{3} a$ şi $\| CF \| = \dfrac{2}{9} a$. Să se arate că triunghiul AEF este dreptunghic.

16. Să se demonstreze că într-un paralelogram, suma pătratelor lungimilor diagonalelor este egală cu suma pătratelor lungimilor laturilor.

17. Să se afle raportul dintre suma pătratelor lungimilor laturilor unui triunghi şi suma pătratelor medianelor. Să se deducă de aici că într-un triunghi dreptunghic, suma pătratelor medianelor corespunzătoare catetelor este egală cu de cinci ori pătratul medianei relativă la ipotenuză.

18. Se consideră trapezul $ABCD$. Paralela cu bazele BC şi AD ale trapezului ce trece prin punctul de intersecţie al diagonalelor intersectează laturile neparalele în punctele E şi F. Să se arate că:

$$\| EF \| = \frac{2}{\dfrac{1}{\| BC \|} + \dfrac{1}{\| AD \|}}.$$

19*. În patrulaterul convex $ABCD$, E este mijlocul laturii $| AB |$ şi F mijlocul laturii $| CD |$. Să se demonstreze că mijloacele segmentelor $| AF |$, $| CE |$, $| BF |$, $| DE |$ sînt vîrfurile unui paralelogram.

20. Printr-un punct variabil D situat pe latura $[BC]$ a unui triunghi ABC se duce o paralelă la mediana AM, M fiind mijlocul laturii $| BC |$. Această paralelă intersectează dreptele AB şi AC în punctele E, respectiv F. Să se arate că:

$$\frac{\| AF \|}{\| AC \|} = \frac{\| AE \|}{\| AB \|} \text{ şi } \| DE \| + \| DF \| = \text{const.}$$

21. Se consideră un trapez isoscel $ABCD$ cu bazele $| AB |$, $| DC |$, $\| AB \| = 2a$ $\| DC \| = 2b$, în care diagonala AC este bisectoarea unghiului $\hat{A}$. Să se exprime cu a şi b lungimile diagonalelor şi lungimile laturilor neparalele ale trapezului. (Se presupune $b < a < 3b$).

Capitolul III

Cercul

§ 1. Definiții

În capitolele precedente s-au definit și studiat diferite mulțimi de puncte din plan (unghi, poligon convex, mediatoare, bisectoare etc.). Utilizînd noțiunea de loc geometric se pot defini și alte tipuri de mulțimi de puncte dintre care, în acest capitol, vom studia cercul.

Definiție. Fie $r \in \mathbf{R}$, $r > 0$ și O un punct din plan. Se numește *cerc de centru O și rază r* locul geometric al punctelor M din plan pentru care $\|OM\| = r$. Se notează $\mathcal{C}(O, r) = \{M \mid \|OM\| = r\}$. Pentru trasarea cercului se folosește compasul (fig. III.1). Dacă $M \in \mathcal{C}(O,r)$ atunci pentru segmentul $|OM|$ se va folosi denumirea de raza $|OM|$. Deci cuvîntul „rază" are două sensuri: poate fi un număr r sau un segment $|OM|$. În general, din text se înțelege despre care sens este vorba.

Definiție. Fiind dat cercul $\mathcal{C}(O, r)$ mulțimea punctelor P din plan pentru care $\|OP\| < r$ se numește *interiorul* cercului. Se notează

$$\text{Int } \mathcal{C}(O, r) = \{P \mid \|OP\| < r\}.$$

Se definește și *exteriorul* unui cerc și anume: $\text{Ext } \mathcal{C}(O,r) = \{Q \mid \|OQ\| > r\}$.

Teorema 1. Interiorul unui cerc este o mulțime convexă.

Demonstrație. Fie $\mathcal{C}(O, r)$ și $A \in \text{Int } \mathcal{C}(O, r)$, $B \in \text{Int. } \mathcal{C}(O, r)$, deci $\|OA\| < r$, $\|OB\| < r$ (fig. III.2). Dacă $P \in |AB|$ atunci $\|OP\| < \|OA\|$ sau $\|OP\| < \|OB\|$ (vezi ex. 5 § 12, cap. I). În ambele cazuri rezultă $\|OP\| < r$, deci $P \in \text{Int } \mathcal{C}(O, r)$.

Definiție. Se numește *disc* de centru O și rază r, $r > 0$, mulțimea $\mathcal{C}(O,r) \cup \text{Int } \mathcal{C}(O, r)$.

Se observă că $\mathcal{C}(O, r) \cup \text{Int } \mathcal{C}(0, r) = \{M \mid \|OM\| \leqslant r\}$.

Două cercuri care au razele egale se numesc *congruente*.

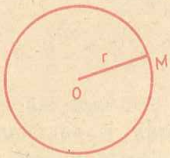


Fig. III.1

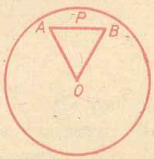


Fig. III.2

Teorema 2. Fie cercul $\mathcal{C}(O, r)$, $r > 0$ și dreapta h.

a) Dacă $d(O,h) < r$, atunci dreapta h și cercul $\mathcal{C}(O, r)$ au exact două puncte comune.

b) Dacă $d(O,h) = r$, atunci dreapta h și cercul $\mathcal{C}(O, r)$ au exact un punct comun.

c). Dacă $d(O,h) > r$ atunci dreapta h și cercul $\mathcal{C}(O, r)$ nu au puncte comune.

Demonstrație. a) Dacă $d(O,h) = 0$ deci $O \in h$, atunci pe cele două semidrepte h' și h'' determinate de O pe h, există cîte un singur punct $A \in h'$, $B \in h''$, astfel ca $\|OA\| = \|OB\| = r$ (fig. III.3).

Dacă $0 < d(O,h) = r_1 < r$, atunci se notează $O' = \mathrm{pr}_h O$ (fig. III.4) și pe semidreptele h' și h'' determinate de O' pe h, există punctele unice $A \in h'$, $B \in h''$, astfel încît lungimile segmentelor $|O'A|$ și $|O'B|$ să fie de o anumită valoare, de exemplu $\|O'A\| = \|O'B\| = \sqrt{r^2 - r_1^2}$. Triunghiurile $OO'A$ și $OO'B$ fiind dreptunghice, din teorema lui Pitagora se determină $\|OA\| = \|OB\| = \sqrt{\|OO'\|^2 + \|O'A\|^2} = r$, deci punctele A și B aparțin cercului $\mathcal{C}(O,r)$. Oricare ar fi punctul M, $M \in h$, astfel încît $\|O'M\| < \sqrt{r^2 - r_1^2}$, rezultă că $\|OM\| = \sqrt{\|OO'\|^2 + \|O'M\|^2} < r$ și $M \in \mathrm{Int}\, \mathcal{C}(O, r)$, iar dacă $\|O'M\| > \sqrt{r^2 - r_1^2}$, atunci $\|OM\| > r$, și $M \in \mathrm{Ext}\, \mathcal{C}(O, r)$.

b) Dacă $d(O,h) = r$, fie $O' = \mathrm{pr}_h O$, deci $\|OO'\| = r$ adică $O' \in \mathcal{C}(O,r)$. Dacă $M \in h$, $M \neq O'$, atunci $\|OM\| > \|OO'\| = r$ și deci $M \in \mathrm{Ext}\, \mathcal{C}(O, r)$ (fig. III.5).

c) Dacă $d(O, h) > r$ atunci pentru orice punct M, $M \in h$, $\|OM\| \geqslant d(O, h) > r$, deci $M \in \mathrm{Ext}\, \mathcal{C}(O, r)$ (fig. III.6).

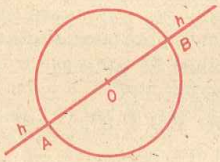


Fig. III.3

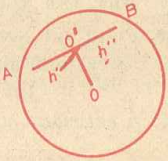


Fig. III.4

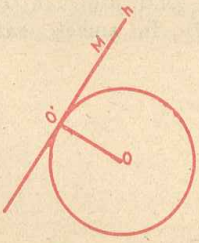


Fig. III.5

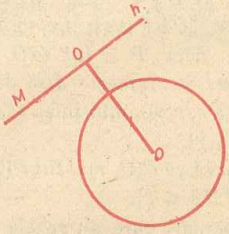


Fig. III.6

Definiţie. Dreapta h se numeşte *tangentă* cercului $\mathcal{C}(O, r)$ dacă există exact un punct comun cercului $\mathcal{C}(O, r)$ şi dreptei h.

Din teorema 2 rezultă că dreapta h este tangentă la cercul $\mathcal{C}(O,r)$ dacă şi numai dacă $d(O,h) = r$. Punctul O' comun tangentei h şi cercului $\mathcal{C}(O,r)$ se numeşte *punct de tangenţă*. Din demonstraţia punctului b) a teoremei 2 rezultă că

raza $|OO'|$ *este perpendiculară pe tangenta prin* O'.

O dreaptă h se numeşte *secantă* unui cerc dacă dreapta h şi cercul au două puncte distincte comune. Dreapta h se numeşte *exterioară* unui cerc dacă dreapta h şi cercul nu au nici un punct comun.

Exerciţii

1. Să se arate că prin două puncte distincte trec o infinitate de cercuri, şi să se determine locul geometric al centrelor acestor cercuri.

2. Fie A, B, C trei puncte distincte ale unui cerc. Să se arate că ele nu pot fi coliniare şi că centrul cercului este intersecţia mediatoarelor laturilor triunghiului ABC.

◇ **3.** Să se arate că dacă două cercuri au trei puncte distincte comune, cercurile coincid.

4. Să se arate că discul este o mulţime convexă.

5. Să se demonstreze că centrul unui cerc este centru de simetrie al său şi al discului pe care-l determină.

6. Arătaţi că orice dreaptă care conţine centrul cercului este axă de simetrie a cercului (şi a discului).

Indicaţie. Se consideră un punct M pentru care $\|OM\| = r$ şi o dreaptă d care conţine centrul cercului; dacă M' este simetricul punctului M faţă de dreapta d atunci $\|OM'\| = \|OM\| = r$.

7. Să se arate că dacă punctele A şi B aparţin unui disc de rază r atunci $\|AB\| \leqslant 2r$.

Indicaţie. În triunghiul OAB (O centrul cercului), $\|AB\| < \|OA\| + \|OB\| \leqslant 2r$.

Dacă A, O, B sînt coliniare şi $O \in [AB]$, $\|AB\| = \|AO\| + \|OB\| \leqslant 2r$, iar dacă $A \in |OB|$ sau $B \in |OA|$ atunci $\|AB\| < \|OA\| + \|OB\| \leqslant 2r$.

8. Să se arate că o dreaptă care conţine un punct din interiorul unui cerc intersectează cercul.

◇ **9.** Fie d o tangentă sau o dreaptă exterioară cercului $\mathcal{C}(O,r)$. Arătaţi că $\mathcal{C}(O,r) \subset [dO$.

10. Să se afle locul geometric al centrelor cercurilor tangente la o dreaptă dată într-un punct dat.

11. Fie A, B două puncte fixe. Se consideră un cerc variabil de centru M, tangent dreptei AB în punctul B. Perpendiculara din B pe AM taie din nou cercul în T. Să se afle locul geometric al punctului T.

12. Să se afle locul geometric al mijloacelor segmentelor care unesc un punct fix A cu un punct variabil M, situat pe un cerc dat $\mathcal{C}(O, r)$.

13. Vîrfurile A, B ale triunghiului ABM sînt fixe, iar M este un punct variabil. Să se afle locul geometric al punctului M, ştiind că mediana $|AA'|$ a triunghiului ABM are o lungime dată l.

◇ **14.** Dacă vîrfurile unui patrulater aparţin unui cerc, atunci patrulaterul este convex.

§ 2. Coarde. Arce. Unghiuri la centru

Segmentul determinat de două puncte ale unui cerc se numeşte *coardă*. Dacă coarda conţine centrul cercului atunci ea se numeşte *diametru*, iar capetele unui diametru se numesc puncte *diametral opuse*. Pentru un cerc de

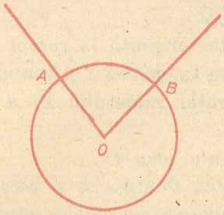


Fig. III.7

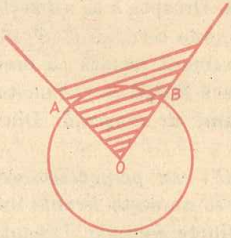


Fig. III.8

rază r, lungimea unui diametru este $2r$ şi este mai mare sau egală decît lungimea oricărei coarde.

Definiţie. Un unghi cu vîrful în centrul unui cerc se numeşte *unghi la centru* pentru acel cerc.

Fie cercul $\mathcal{C}(O, r)$ şi punctele $A \in \mathcal{C}(O,r)$, $B \in \mathcal{C}(O,r)$; dacă A şi B nu sînt diametral opuse atunci ele determină unghiul la centru propriu $\widehat{AOB}$ (fig. III.7). Dacă A şi B sînt diametral opuse atunci unghiul $\widehat{AOB}$ este un unghi alungit.

Definiţie. Fie A şi B două puncte ale cercului $\mathcal{C}(O,r)$ care nu sînt diametral opuse. Se numeşte *arc mic* $\widehat{AB}$ mulţimea formată din A,B şi punctele cercului $\mathcal{C}(O,r)$ care aparţin interiorului unghiului $\widehat{AOB}$. Se numeşte *arc mare* $\widehat{AB}$ mulţimea punctelor cercului $\mathcal{C}(O,r)$ care nu aparţin interiorului unghiului $\widehat{AOB}$. A şi B se numesc *capetele* celor două arce (fig. III.8).

Se introduce o notaţie a arcului folosind încă un punct M al lui, diferit de capete: $\widehat{AMB}$ este arcul cu capetele A,B căreia îi aparţine şi punctul M. Dacă nu e pericol de confuzie, arcul $\widehat{AMB}$ poate fi notat $\widehat{AB}$. De exemplu dacă se precizează arc mic, arc mare. Mulţimea $\widehat{AB}-\{A, B\}$ se numeşte *arc deschis*.

Definiţie. Dacă A şi B sînt puncte diametral opuse ale cercului $\mathcal{C}(O, r)$ şi M un punct al cercului diferit de acestea, atunci arcul $\widehat{AMB}$ este mulţimea punctelor cercului situate în semiplanul închis determinat de dreapta AB căreia îi aparţine punctul M şi se numeşte *semicercul* $\widehat{AMB}$.

Evident, orice diametru determină două semicercuri.

În capitolul I fiecărui unghi i s-a pus în corespondenţă un număr real α, $\alpha \in [0, 180]$ care reprezintă măsura unghiului. Deoarece arcele unui cerc sînt determinate prin unghiuri, rezultă că fiecărui arc i se poate asocia un număr real, numit măsura arcului.

Definiţie. Fie A şi B două puncte ale cercului $\mathcal{C}(O, r)$.

1. Dacă A și B nu sînt diametral opuse *măsura arcului mic* $\widehat{AB}$ este egală cu măsura unghiului la centru $\widehat{AOB}$, adică $m(\widehat{AB}) = m(\widehat{AOB})$.

2. Dacă A și B nu sînt diametral opuse, *măsura arcului mare* $\widehat{AB}$ este egală cu 360 minus măsura unghiului la centru $\widehat{AOB}$, adică $m(\widehat{AB}) = 360 - m(\widehat{AOB})$.

3. Dacă A și B sînt diametral opuse, măsura semicercului $\widehat{AB}$ este 180, adică $m(\widehat{AB}) = 180$.

Se poate considera convențional că un cerc este un arc mare $\widehat{AB}$ ale cărui capete A și B coincid, deci $m(\widehat{AOB}) = 0$ și măsura cercului este conform definiției egală cu 360.

Definiție. Două arce ale aceluiași cerc (sau din două cercuri congruente) se numesc *congruente* dacă au aceeași măsură.

În multe probleme teoretice și practice se pune problema determinării măsurii unui arc cînd acesta poate fi considerat ca reuniune de două arce avînd comun doar unul din capete. Pentru o rezolvare corectă a problemelor de acest fel, reprezentarea intuitivă nefiind o justificare, se va stabili următoarea teoremă.

Teorema 1. Fie cercul $\mathcal{C}(O, r)$, $\widehat{AB}$ un arc al cercului și M un punct diferit de A și B al arcului $\widehat{AB}$. Atunci, $m(\widehat{AMB}) = m(\widehat{AM}) + m(\widehat{BM})$, unde $B \notin \widehat{AM}$ și $A \notin \widehat{BM}$.

Demonstrație.

1) Dacă $\widehat{AMB}$ este un arc mic, deoarece $|OM \subset \text{Int}\ \widehat{AOB}$ (fig. III.9) are loc $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{AOM}) + m(\widehat{MOB})$ adică $m(\widehat{AMB}) = m(\widehat{AM}) + m(\widehat{BM})$.

2) Dacă $\widehat{AMB}$ este un semicerc (fig. III.10) atunci $m(\widehat{AMB}) = 180$, iar $\widehat{AOM}$ și $\widehat{BOM}$ sînt suplementare, $m(\widehat{AOM}) + m(\widehat{BOM}) = 180$, adică $m(\widehat{AMB}) = m(\widehat{AM}) + m(\widehat{BM}) = 180$.

3) Dacă $\widehat{AMB}$ este un arc mare, punctele A și B fiind situate în același semiplan față de dreapta OM (fig. III.11) și presupunînd că B aparține arcului mic $\widehat{AM}$, se

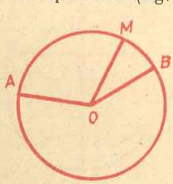


Fig. III.9

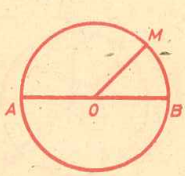


Fig. III.10

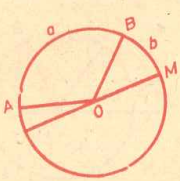


Fig. III.11

notează $m(\widehat{AOB}) = a$, $m(\widehat{MOB}) = b$. Atunci $m(\widehat{AMB}) = 360 - a$; pentru arcul mare $\widehat{AM}$, $m(\widehat{AM}) = 360 - m(\widehat{AOM}) = 360 - (a + b)$. Deci

$$m(\widehat{AM}) + m(\widehat{MB}) = 360 - (a + b) + b = 360 - a = m(\widehat{AMB}).$$

Dacă B aparține arcului mare $\widehat{AM}$, demonstrația se face în mod analog.

4) Dacă $\widehat{AMB}$ este un arc mare, iar punctele A și B sînt în semiplane opuse față de dreapta OM, M' fiind diametral opus lui M, (fig. III.12) avem $|OM' \subset \text{Int } \widehat{AOB}$ căci $M \notin \text{Int } \widehat{AOB}$ (Cap. I, § 6, ex 12). Se notează $m(\widehat{AOM'}) = a$, $m(\widehat{M'OA}) = b$.

$$m(\widehat{AMB}) = 360 - m(\widehat{AOB}) = 360 - a.$$

$$m(\widehat{M'OB}) = a - b, \quad m(\widehat{MOB}) = 180 - (a - b), \quad m(\widehat{MOA}) = 180 - b.$$

Atunci $m(\widehat{AM}) + m(\widehat{BM}) = 180 - b + 180 - (a - b) = 360 - a = m(\widehat{AMB})$.

5) Dacă $\widehat{AMB}$ este un arc mare, M și A (sau M și B) fiind diametral opuse (fig. III.13), $m(\widehat{AM}) = 180$, $m(\widehat{MOB}) = 180 - m(\widehat{AOB})$ deci

$$m(\widehat{AM}) + m(\widehat{BM}) = 180 + 180 - m(\widehat{AOB}) = 360 - m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{AMB}).$$

Se vor stabili în continuare cîteva proprietăți relative la arce și coarde a căror demonstrație poate reprezenta și un exercițiu pentru cititor.

Punctul M se numește *mijlocul* arcului $\widehat{AB}$ dacă aparține arcului $\widehat{AB}$ și arcele mici $\widehat{AM}$ și $\widehat{BM}$ sînt congruente. Existența mijlocului unui arc rezultă din

Teorema 2. Dacă A și B sînt puncte distincte ale unui cerc, atunci diametrul perpendicular pe coarda $|AB|$ conține mijlocul coardei $|AB|$ și mijloacele arcelor $\widehat{AB}$ (arcul mic și arcul mare).

Demonstrație. Dacă A și B nu sînt diametral opuse se notează $O' = \text{pr}_{AB}O$ (fig. III. 14). Fie $\{C\} = \mathcal{C}(O, r) \cap |OO'$ și D punctul diametral opus lui C. $\triangle AOO' \equiv \triangle BOO'$ (C.I.), deci $|AO'| \equiv |BO'|$, $\widehat{AOC} \equiv \widehat{BOC}$ și $\widehat{AOD} \equiv \widehat{BOD}$ (avînd suplemente congruente) din care rezultă că C este mijlocul

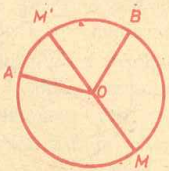


Fig. III.12

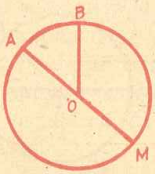


Fig. III.13

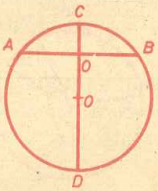


Fig. III.14

arcului mic $\widehat{AB}$ şi D mijlocul arcului mare $\widehat{AB}$. Evident, teorema este adevărată şi dacă A şi B sînt diametral opuse.

Teorema 3. Dacă două coarde $|AB|$ şi $|CD|$ din acelaşi cerc $\mathcal{C}(O, r)$ sînt congruente, atunci arcele mici $\widehat{AB}$ şi $\widehat{CD}$ sînt congruente şi reciproc, dacă arcele mici $\widehat{AB}$ şi $\widehat{CD}$ ale unui cerc sînt congruente, atunci coardele $|AB|$ şi $|CD|$ sînt congruente.

Demonstraţie. a) Dacă $|AB| \equiv |CD|$, $|AB|$, $|CD|$ fiind coarde ale cercului $\mathcal{C}(O, r)$, atunci $\triangle AOB \equiv \triangle COD$ (L.L.L.), deci $\widehat{AOB} \equiv \widehat{COD}$ deci $\widehat{AB} \equiv \widehat{CD}$ (fig. III.15). b) Dacă $\widehat{AB} \equiv \widehat{CD}$ atunci $\triangle AOB \equiv \triangle COD$ (L.U.L.) deci $|AB| \equiv |CD|$.

Teorema 4. Dacă două coarde ale unui cerc sînt congruente atunci distanţele de la centrul cercului la coarde sînt egale.

Demonstraţie. Dacă $|AB| \equiv |CD|$, $|AB|$, $|CD|$ fiind coarde ale cercului $\mathcal{C}(O, r)$, atunci $\triangle AOB \equiv \triangle COD$ şi înălţimile din O ale acestor triunghiuri sînt congruente (fig. III.16).

Teoremele 3 şi 4 sînt adevărate şi dacă cele două coarde aparţin la două cercuri congruente.

Teorema 5. Dacă două coarde $|AB|$ şi $|CD|$ ale cercului $\mathcal{C}(O, r)$ sînt paralele, A şi C fiind situate în acelaşi semiplan faţă de diametrul perpendicular pe cele două coarde, atunci arcele mici $\widehat{AC}$ şi $\widehat{BD}$ sînt congruente şi coardele $|AC|$ şi $|BD|$ sînt congruente.

Demonstraţie. Fie $|MN|$ diametrul perpendicular pe coarda $|AB|$, M şi N aparţinînd cercului astfel ca M şi A să fie de aceeaşi parte a dreptei CD (fig. III.17).

Atunci $\widehat{AM} \equiv \widehat{MB}$, $\widehat{CN} \equiv \widehat{ND}$; folosind teorema 1 se obţine $m(\widehat{AC}) = 180 - [m(\widehat{AM}) + m(\widehat{CN})] = 180 - [m(\widehat{MB}) + m(\widehat{ND})] = m(\widehat{BD})$. Deci $\widehat{AC} \equiv \widehat{BD}$ şi $|AC| \equiv |BD|$.

Teorema 5 poate fi formulată într-un enunţ mai uşor de memorat, dar nu suficient de precis: „arcele situate între două coarde paralele sînt congruente".

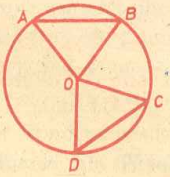


Fig. III.15

Fig. III.16

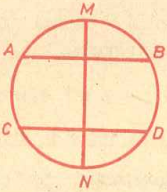


Fig. III.17

Exerciţii

1. Să se demonstreze că dacă diametrul unui cerc conţine mijlocul unui arc $\widehat{AB}$ sau a coardei $|AB|$, atunci diametrul este perpendicular pe coarda $|AB|$ (reciproca teoremei 2).

2. Dacă centrul unui cerc este la distanţe egale de două coarde ale cercului, atunci coardele sînt congruente (reciproca teoremei 4).

3*. Dacă coardele $|AB|$ şi $|CD|$ ale unui cerc sînt congruente atunci $AC \parallel BD$ sau $AD \parallel BC$ (reciproca teoremei 5).

4. Se consideră cercul $\mathcal{C}(O, r)$, punctul $M \in \mathcal{C}(O, r)$ şi h tangenta în M la cerc. Să se demonstreze că pentru orice coardă $|AB|$, $AB \parallel h$, punctul M este mijlocul arcului $\widehat{AMB}$.

5. Fie A şi B două puncte ale cercului $\mathcal{C}(O, r)$, A şi B nefiind diametral opuse, şi C punctul comun al tangentelor în A şi B, la cercul $\mathcal{C}(O, r)$. Să se arate că dreapta AB separă punctele O şi C.

Indicaţie. Triunghiurile dreptunghice OAC şi OBC fiind şi congruente, triunghiul ABC este isoscel, deci $\widehat{CAB} \equiv \widehat{CBA}$ şi unghiurile $\widehat{CAB}$, $\widehat{CBA}$ vor fi ascuţite; rezultă $|BA \subset \subset \text{Int } \widehat{CBO}$, deci C şi O sînt în semiplane opuse faţă de AB.

6. Să se arate că dacă două coarde ale unui cerc nu sînt congruente, atunci coarda cu lungimea mai mare are distanţa la centru mai mică şi reciproc.

7. Să se demonstreze unicitatea mijlocului unui arc.

8. Fie $\widehat{AB}$ un arc mare al cercului $\mathcal{C}(O, r)$ şi $d = AB$. Să se arate că $\widehat{AB} = \mathcal{C}(O, r) \cap \cap [dO$.

9. Se dau: un cerc $\mathcal{C}(O, r)$, un punct $A \in \mathcal{C}(O, r)$ şi un număr real $\alpha \in (0,360)$. $\alpha \neq 180$. Să se arate că există exact două puncte M, $M \in \mathcal{C}(O, r)$ astfel ca $m(\widehat{AM}) = \alpha$.

10. Să se afle locul geometric al mijloacelor coardelor unui cerc, care au o lungime dată.

11. Se dau punctele distincte A, B şi dreapta d perpendiculară pe AB. M fiind un punct variabil pe d, să se afle locul geometric al punctului diametral opus lui M în cercul care trece prin A, B şi M.

12*. Două cercuri se intersectează în A, B. O secantă variabilă trecînd prin A taie cercurile a doua oară în M, N. Să se afle locul geometric al mijlocului segmentului $|MN|$.

§ 3. Unghi înscris

Definiţie. Unghiul $\widehat{AMB}$ se numeşte *unghi înscris* unui cerc $\mathcal{C}(O, r)$ dacă A, M, B sînt puncte ale cercului $\mathcal{C}(O, r)$.

Arcul $\widehat{AB}$ căruia nu-i aparţine punctul M se numeşte *arc cuprins între laturile unghiului.*

Teorema 1. Măsura unui unghi înscris în cerc este $\frac{1}{2}$ din măsura arcului cuprins între laturile sale.

Demonstraţie. Se consideră unghiul $\widehat{AMB}$ înscris în cercul $\mathcal{C}(O, r)$.

Cazul I. Una din laturile unghiului conţine centrul cercului, de exemplu

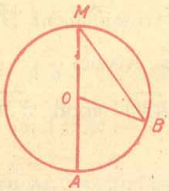


Fig. III.18

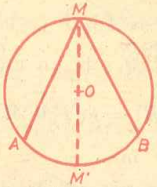


Fig. III.19

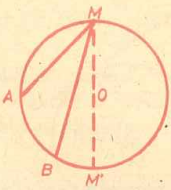


Fig. III.20

$O \in AM$ (fig. III.18); atunci $\widehat{AOB}$ este exterior triunghiului isoscel OMB și $m(\widehat{AMB}) = \frac{1}{2} m(\widehat{AOB}) = \frac{1}{2} m(\widehat{AB})$.

Cazul II. Centrul cercului este în interiorul unghiului $\widehat{AMB}$ (fig. III.19). Atunci M' fiind diametral opus lui M, din cazul I și teorema 1 § 2 rezultă

$$m(\widehat{AMB}) = m(\widehat{AMM'}) + m(\widehat{M'MB}) = \frac{1}{2} m(\widehat{AM'}) - \frac{1}{2} m(\widehat{M'B}) = \frac{1}{2} m(\widehat{AB}).$$

Cazul III. Centrul cercului nu aparține interiorului unghiului $\widehat{AMB}$ (fig. III. 20). Punctul M' fiind diametral opus punctului M, și $\mid MB \subset$ $\subset$ Int $\widehat{AMM'}$ prin aplicarea cazului I se obține:

$$m(\widehat{AMB}) = m(\widehat{AMM'}) - m(\widehat{BMM'}) = \frac{1}{2} m(\widehat{AM'}) - \frac{1}{2} m(\widehat{BM'}) = \frac{1}{2} m(\widehat{AB}).$$

Cele trei cazuri demonstrează teorema.

Din teorema 1 rezultă că fiind date două puncte fixe A și B ale unui cerc și un punct M variabil pe arcul mare $\widehat{AB}$, diferit de A și B, unghiurile $\widehat{AMB}$ au aceeași măsură, egală cu $\frac{1}{2} m(\widehat{AOB})$, iar dacă M aparține arcului mic $\widehat{AB}$, măsura unghiurilor $\widehat{AMB}$ este deasemenea constantă egală cu $\frac{1}{2}$ (360 — —$m(\widehat{AOB})$). Dacă $\widehat{AB}$ este semicerc, $m(\widehat{AMB}) = 90°$.

Teorema 2. Măsura unui unghi cu vîrful pe cerc, una din laturi fiind secantă cercului, iar cealaltă tangentă cercului este $\frac{1}{2}$ din măsura arcului de cerc inclus în interiorul unghiului.

Demonstrație. Fie unghiul $\widehat{AMB}$, $M \in \mathcal{C}(O, r)$, $B \in \mathcal{C}(O, r)$, MA tangentă cercului.

Cazul I. (fig. III.21) $\widehat{AMB}$ este un unghi ascuțit; M' fiind punctul diametral opus lui M, ținînd seama că B și M' sînt de aceeași parte a tangentei, rezultă $\mid MB \subset$ Int $\widehat{AMM'}$, deci

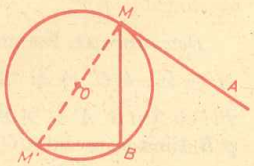


Fig. III.21

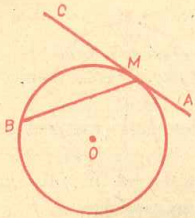


Fig. III.22

$\widehat{BM'M} \equiv \widehat{AMB}$ (avînd același complement $\widehat{BMM'}$), iar $\widehat{BM'M}$ este un unghi înscris. Atunci $m(\widehat{AMB}) = m(\widehat{BM'M}) = \frac{1}{2} m(\overset{\frown}{BM})$, arcul $\overset{\frown}{BM}$ fiind un arc mic.

Cazul II. $\widehat{AMB}$ este un unghi obtuz (fig. III.22). Fie $C \in AM$, $M \in |AC|$, iar D un punct al arcului mare $\overset{\frown}{BM}$. Unghiurile $\widehat{CMB}$ și $\widehat{AMB}$ sînt suplementare; $\widehat{CMB}$ fiind un unghi ascuțit, conform cazului I, $m(\widehat{CMB}) = \frac{1}{2} m(\overset{\frown}{MB})$ (arcul mic $\overset{\frown}{MB}$). Atunci

$$m(\widehat{AMB}) = 180 - m(\widehat{CMB}) = \frac{1}{2}[360 - 2m(\widehat{CMB})] =$$

$$= \frac{1}{2}[360 - m(\overset{\frown}{MB})] = \frac{1}{2} m(\overset{\frown}{BDM}).$$

Cazul III. Dacă $\widehat{AMB}$ este unghi drept, atunci M,B sînt diametral opuse și $\overset{\frown}{MB}$ este semicerc, deci $m(\widehat{AMB}) = 90 = \frac{1}{2} m(\overset{\frown}{MB})$.

Definiție. Unghiul $\widehat{AMB}$ se numește *unghiul cu vîrful în interiorul* unui cerc $\mathcal{C}(O,r)$ dacă $M \in \text{Int}\, \mathcal{C}(O, r)$, iar A și B sînt puncte ale cercului $\mathcal{C}(O, r)$.

Dacă $\widehat{AMB}$ este un unghi cu vîrful în interiorul unui cerc (fig. III. 23), dreptele MA și MB avînd un punct în interiorul cercului vor avea cîte două puncte comune cu cercul A,A' respectiv B,B'. Unghiul $\widehat{A'MB'}$ este deasemenea un unghi cu vîrful în interiorul cercului și $\widehat{AMB} \equiv \widehat{A'MB'}$ ca unghiuri opuse la vîrf. Arcele $\overset{\frown}{AB}$ și $\overset{\frown}{A'B'}$ care sînt incluse în Int $\widehat{AMB}$ respectiv Int $\widehat{A'MB'}$ se numesc *arc cuprins între laturile unghiului* respectiv arc cuprins între prelungirile laturilor unghiului cu vîrful în interiorul cercului.

Teorema 3. Măsura unui unghi cu vîrful în interiorul unui cerc este $\frac{1}{2}$ din suma măsurilor arcului cuprinse între laturile unghiului și a arcului cuprins între prelungirile acestora.

Demonstrație. Fie unghiul $\widehat{AMB}$ cu $M \in \text{Int}\, \mathcal{C}(O, r)$ și $\widehat{A'MB'}$ opus la vîrf cu $\widehat{AMB}$, $A' \in AM$, $B' \in BM$, A' și B' fiind pe cercul $\mathcal{C}(O,r)$ (fig. III.24). Unghiurile $\widehat{A'AB'}$ și $\widehat{AB'B}$ fiind

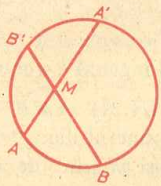


Fig. III.23

Fig. III.24

unghiuri înscrise în cerc, $m(\widehat{A'AB'}) = \frac{1}{2} m(\widehat{A'B'})$ şi $m(\widehat{AB'B}) = \frac{1}{2} m(\widehat{AB})$.

Unghiul $\widehat{AMB}$ este unghi exterior pentru triunghiul AMB' şi deci

$$m(\widehat{AMB}) = m(\widehat{A'AB'}) + m(\widehat{AB'B}) = \frac{1}{2}[m(\widehat{A'B'}) + m(\widehat{AB})].$$

Definiţie. Unghiul $\widehat{hk}$ se numeşte *unghi cu vîrful în exteriorul* unui cerc dacă vîrful său aparţine exteriorului cercului, iar semidreptele h şi k sînt tangente sau secante cercului.

Laturile unui unghi exterior determină pe cerc două arce care aparţin interiorului unghiului; acestea se numesc *arce cuprinse între laturile unghiului.*

Teorema 4. Măsura unui unghi cu vîrful în exteriorul unui cerc este egală cu $\frac{1}{2}$ din valoarea absolută a diferenţei măsurilor arcelor cuprinse între laturile sale.

Demonstraţie. Fie $\widehat{hk}$ un unghi cu vîrful în $M, M \in \text{Ext}\ \mathcal{C}(O, r)$.

Cazul I. Laturile h şi k sînt secante cercului în punctele A, C respectiv B, D, $A \in h$, $C \in h$, $A \in |MC|$, $B \in k$, $D \in k$, $B \in |MD|$ (fig. III.25). Unghiurile $\widehat{CAD}$ şi $\widehat{ADB}$ fiind unghiuri înscrise în cercul $\mathcal{C}(O, r)$, $m(\widehat{CAD}) = \frac{1}{2} m(\widehat{CD})$, $m(\widehat{ADB}) = \frac{1}{2} m(\widehat{AB})$. Unghiul $\widehat{CAD}$ este un unghi exterior triunghiului AMD, deci $m(\widehat{CAD}) = m(\widehat{ADM}) + m(\widehat{CMD})$, de unde rezultă că $m(\widehat{CMD}) = m(\widehat{CAD}) - m(\widehat{ADM}) = \frac{1}{2}\left[m(\widehat{CD}) - m(\widehat{AB})\right]$.

Cazul II. Latura h este tangentă cercului în A, iar k este secantă cercului $\mathcal{C}(O,r)$, B şi D fiind punctele comune cercului şi secantei, $B \in |MD|$ (fig. III.26). Se alege un punct C, $C \in h$, $A \in |CM|$; $\widehat{CAD}$ fiind unghi exterior triunghiului AMD, $m(\widehat{CAD}) = m(\widehat{AMD}) + m(\widehat{ADM})$.

Dar, $m(\widehat{ADM}) = \frac{1}{2} m(\widehat{AB})$ şi $m(\widehat{CAD}) = \frac{1}{2} m(\widehat{AD})$. Rezultă

$$m(\widehat{AMD}) = m(\widehat{CAD}) - m(\widehat{ADM}) = \frac{1}{2} m(\widehat{AD}) - \frac{1}{2} m(\widehat{AB}) = \frac{1}{2}\left[m(\widehat{AD}) - m(\widehat{AB})\right].$$

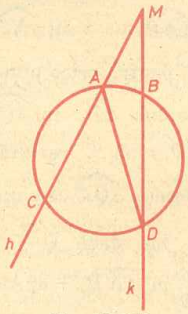


Fig. III.25

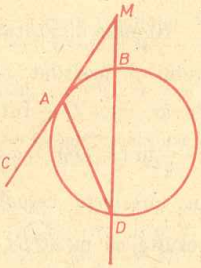


Fig. III.26

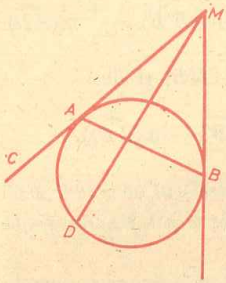


Fig. III.27

Cazul III. Laturile h şi k sînt tangente cercului în punctele A şi B, $A \in h$, $B \in k$ (fig. III.27). Se alege punctul C, $C \in h$, $A \in |CM|$ şi un punct D al arcului mare $\widehat{AB}$. Unghiul $\widehat{CAB}$ este exterior triunghiului ABM deci $m(\widehat{CAB}) = m(\widehat{AMB}) + m(\widehat{MBA})$ şi $m(\widehat{CAB}) = \frac{1}{2} m(\widehat{ADB})$, $m(\widehat{MBA}) = \frac{1}{2} m(\widehat{AB})$.

Atunci

$$m(\widehat{AMB}) = m(\widehat{CAB}) - m(\widehat{MBA}) = \frac{1}{2}[m(\widehat{ADB}) - m(\widehat{AB})].$$

Aplicaţie. Arc capabil de unghi dat

Se consideră punctele fixe A şi B şi un număr real α, $\alpha \in (0,180)$. Să se determine locul geometric al punctelor M situate într-unul din semiplanele limitate de dreapta AB, pentru care $m(\widehat{AMB}) = \alpha$.

Rezolvare. Se consideră punctele A, B, $A \neq B$ şi S unul din semiplanele limitate de dreapta AB (fig. III. 28).

Fie semidreapta $|AC$ în semiplanul opus lui S astfel încît $m(\widehat{CAB}) = \alpha$ şi O punctul de intersecţie al mediatoarei segmentului $|AB|$ cu perpendiculara prin A pe AC. Pe cercul de centru O şi rază $r = \|OA\|$, punctele A şi B determină arcul $\widehat{AB}$ situat în semiplanul S. Se va arăta că *acest arc, fără capetele A, B este locul geometric căutat.* Fie M un punct al arcului $\widehat{AB}$ din semiplanul S şi N un punct al cercului care nu aparţine semiplanului S. Atunci $m(\widehat{AMB}) = \frac{1}{2} m(\widehat{ANB})$. Deoarece AC este tangentă cercului ($AC \perp AO$), rezultă că $m(\widehat{CAB}) = \frac{1}{2} m(\widehat{ANB})$ deci $m(\widehat{AMB}) = m(\widehat{CAB}) = \alpha$.

Rămîne de arătat că pentru orice punct Q al semiplanului S nesituat pe arcul $\widehat{AB}$, $m(\widehat{AQB}) \neq \alpha$. Într-adevăr, dacă $Q \in \text{Int}\, \mathcal{C}(O, r) \cap S$, rezultă că $m(\widehat{AQB}) > \frac{1}{2} m(\widehat{ANB}) = \alpha$ deoarece $\widehat{AQB}$ este un unghi cu vîrful în interiorul cercului, iar dacă $Q \in \text{Ext}\, \mathcal{C}(O, r) \cap S$ rezultă că $m(\widehat{AQB}) < \frac{1}{2} m(\widehat{ANB}) = \alpha$. Arcul deschis $\widehat{AMB}$ din semiplanul S astfel construit este locul geometric

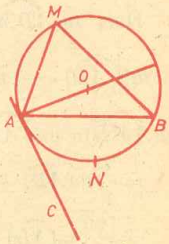


Fig. III.28

al punctelor M pentru care $m(\widehat{AMB}) = \alpha$ și se numește *arc capabil de* α°.

Arcul deschis $\widehat{ANB}$ din semiplanul opus este arcul capabil de unghiul $180 - \alpha$.

Exerciții

1. Pe cercul $\mathcal{C}(O, r)$ se consideră coarda $|AB|$ și unghiul $\widehat{ABM}$. Să se demonstreze că dacă $m(\widehat{ABM}) = \frac{1}{2} m(\widehat{AB})$, arcul $\widehat{AB}$ fiind inclus în Int $\widehat{ABM}$, atunci BM este tangentă cercului $\mathcal{C}(O, r)$ în B.

2. Două cercuri se intersectează în M și N. Fie M' și M'' punctele diametral opuse lui M în cele două cercuri. Să se arate că M', N și M'' sînt coliniare.

3. Într-un cerc se duc două coarde perpendiculare $|AB|$ și $|CD|$. Fie M un punct al cercului situat pe arcul $\widehat{BD}$ sau $\widehat{AC}$. Să se arate că $m(\widehat{AMD}) + m(\widehat{BMC}) = 90$.

4. Într-un cerc $\mathcal{C}(O, r)$ se înscrie triunghiul ABC. Dacă $m(\hat{B}) = 35$ și $m(\hat{C}) = 43$, să se găsească măsurile unghiurilor $\widehat{BAO}$ și $\widehat{CAO}$.

5. În triunghiul ABC înscris într-un cerc $\mathcal{C}(O, r)$ se duc înălțimile corespunzătoare vîrfurilor B și C și diametrul prin punctul A. Să se arate că cele două înălțimi și diametrul determină un triunghi asemenea cu ABC.

6. Pe un cerc se dau trei puncte oarecare A, B, C. Fie D mijlocul arcului $\widehat{AB}$, E mijlocul arcului $\widehat{AC}$; dreapta DE intersectează pe AB în F și pe AC în G. Să se arate că $|AF| \equiv |AG|$.

7. Se dă triunghiul ABC înscris în cercul $\mathcal{C}(O, r)$ și se notează cu D mijlocul laturii BC. Să se demonstreze că măsura unghiului $\widehat{ADO}$ este egală cu jumătatea diferenței dintre măsurile unghiurilor $\widehat{ABC}$ și $\widehat{ACB}$.

8. Se dă un cerc $\mathcal{C}(O, r)$ și un punct exterior A din care se duc tangentele AB și AC. Diametrul $|BO|$ intersectează cercul a doua oară în E. Să se arate că $\widehat{BAO} \equiv \widehat{ECF}$, unde F este intersecția dintre tangenta AC și dreapta BE.

9. În triunghiul ABC înscris într-un cerc $\mathcal{C}(O, r)$ se duce perpendiculara din A pe BC care taie cercul a doua oară în D. Notînd cu E punctul diametral opus lui A, să se arate că unghiurile $\widehat{BAC}$ și $\widehat{DAE}$ au aceeași bisectoare.

10. Două cercuri se intersectează în A și B. O secantă variabilă trecînd prin A taie cercurile a doua oară respectiv în M și N. a) Să se arate că măsura unghiului $\widehat{MBN}$ este constantă. b) Să se determine poziția secantei MN astfel ca distanța $\|MN\|$ să fie maximă.

11. Să se afle locul geometric al mijloacelor coardelor unui cerc $\mathcal{C}(O, r)$ care trec printr-un punct fix A.

12. Fie $|AB|$ un diametru fix al unei cerc $\mathcal{C}(O, r)$, iar M un punct variabil pe cerc. Se ia pe raza $|OM|$ un punct P astfel ca $\|OP\|$ să fie egală cu distanța de la M la dreapta AB. Să se afle locul geometric al punctului P.

13. Fie $|AB|$ o coardă fixă a unui cerc, iar $|PQ|$ o coardă variabilă ca poziție, dar de lungime fixă. Să se afle locurile geometrice ale punctelor $AP \cap BQ$ și $AQ \cap BP$.

14. $|AB|$ fiind o coardă fixă, iar M un punct variabil al unui cerc, să se afle locul geometric al punctului P astfel încît $M \in |AP|$ și $|MP| \equiv |MB|$.

15*. Se dau un cerc, pe el un punct fix A, o dreaptă d și un punct fix $B \in d$. Prin A și B ducem un cerc variabil, care taie din nou cercul dat în P și dreapta dată în Q. Să se arate că dreapta PQ trece printr-un punct fix.

◇ **16.** Fie ABC un triunghi, $|CB'$ semidreapta opusă lui $|CB$, iar $D \in \text{Int}\,\widehat{ACB'}$. Să se arate că dreapta CD este tangentă cercului circumscris triunghiului ABC dacă și numai dacă $\widehat{ACD} \equiv \widehat{ABC}$.

17. Fie $|AB|$ un diametru al unui cerc, $|AC|$ o coardă, $D \in |AB|$, $E = \text{pr}_{AC}D$ și F unul dintre punctele de intersecție ale dreptei DE cu cercul dat. Să se demonstreze că cercurile circumscrise triunghiurilor FCE și FBD sînt tangente.

18. Triunghiul MAB înscris în cercul dat $\mathcal{C}(O, r)$ are vîrfurile A și B fixe, iar vîrful M variabil pe cerc. Să se afle locurile geometrice descrise de: a) ortocentrul, b) centrul cercului înscris și c) centrul de greutate al triunghiului MAB.

§ 4. Poligoane înscrise și circumscrise

Definiție. Un poligon se numește *înscris într-un cerc* dacă vîrfurile poligonului aparțin cercului. În acest caz cercul se numește *circumscris poligonului*.

Un poligon se numește *circumscris unui cerc* dacă laturile sale sînt tangente la cerc. În acest caz, cercul se numește *înscris în poligon*.

Fiind dat un triunghi ABC, există întotdeauna un cerc unic circumscris triunghiului și un cerc unic înscris în triunghi. Centrul cercului circumscris triunghiului este punctul de concurență al mediatoarelor laturilor triunghiului și centrul cercului înscris în triunghi este punctul de concurență al bisectoarelor unghiurilor triunghiului. În cazul poligoanelor cu mai mult de trei laturi nu întotdeauna există cerc înscris sau circumscris.

Teorema 1. Un poligon convex poate fi înscris într-un cerc dacă mediatoarele laturilor sale sînt concurente și reciproc, dacă un poligon convex este înscris într-un cerc, atunci mediatoarele laturilor sale sînt concurente.

Demonstrație. a) Se consideră poligonul $A_1 A_2 A_3 \ldots A_n$ și se presupune că mediatoarele laturilor sale au un punct comun O (fig. III.29). Atunci pe baza proprietății punctelor mediatoarei rezultă că $\|OA_1\| = \|OA_2\| = \ldots = \|OA_n\|$. Deci vîrfurile $A_1, A_2, \ldots, A_n$ aparțin unui cerc de centru O și rază $r = \|OA_1\|$.

b) Dacă poligonul $A_1A_2\ldots A_n$ are vîrfurile pe cercul $\mathcal{C}(O,r)$ atunci $\|OA_1\| = \|OA_2\| = \ldots = \|OA_n\| = r$, deci O se află pe mediatoarele segmentelor $|A_1A_2|$, $|A_2A_3|, \ldots, |A_{n-1}A_n|$, $|A_nA_1|$.

Un poligon care poate fi înscris într-un cerc se numește poligon *inscriptibil*.

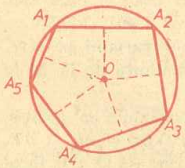


Fig. III.29

Teorema 2. Un poligon convex poate fi circumscris unui cerc dacă bisectoarele unghiurilor sale sînt concurente și reciproc, dacă un poligon convex este circumscris unui cerc atunci bisectoarele unghiurilor sale sînt concurente.

Demonstrație. a) Se consideră poligonul $A_1A_2A_3\ldots A_n$ și O punctul de concurență al bisectoarelor

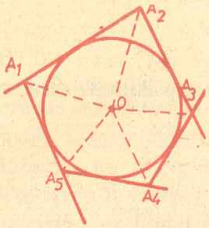


Fig. III.30

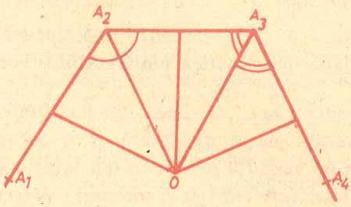


Fig. III.31

unghiurilor sale (fig. III.30). Atunci pe baza proprietăţii punctelor bisectoarei rezultă că $d(O, A_1A_2) = d(O, A_2A_3) = \ldots = d(O, A_nA_1)$. Cercul de centru O şi rază $r = d(O, A_1A_2)$ este tangent fiecărei laturi a poligonului.

b) Dacă poligonul $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ are laturile tangente cercului $\mathcal{C}(O, r)$ atunci $d(O, A_1A_2) = d(O, A_2A_3) = \ldots = d(O, A_cA_1) = r$ deci O se află pe bisectoarele unghiurilor $\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_3, \ldots, \hat{A}_n$.

Definiţie. Un poligon convex se numeşte *poligon regulat* dacă toate laturile şi toate unghiurile sînt congruente.

Teorema 3. Orice poligon regulat poate fi înscris într-un cerc şi poate fi circumscris unui cerc.

Demonstraţie. a) Fie poligonul regulat $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ (fig. III.31). Mediatoarele laturilor $|A_1A_2|$ şi $|A_2A_3|$ sînt concurente într-un punct O. Triunghiurile OA_1A_2 şi OA_2A_3 sînt isoscele şi congruente, deci $\widehat{OA_1A_2} \equiv \widehat{OA_2A_1} \equiv \widehat{OA_2A_3} \equiv \widehat{A_2A_3O}$. Deoarece $\hat{A}_1 \equiv \hat{A}_2 \equiv \hat{A}_3 \equiv \ldots \equiv \hat{A}_n$ rezultă că $\widehat{A_2A_3O} \equiv \widehat{OA_3A_4}$, deci $\triangle OA_3A_4 \equiv \triangle OA_3A_2$ (L.U.L.). Rezultă că OA_3A_4 este isoscel, $|OA_3| \equiv |OA_4|$, deci O aparţine şi mediatoarei segmentului $|A_3A_4|$. În mod analog se arată succesiv că triunghiurile $OA_4A_5, \ldots, OA_nA_1$ sînt isoscele şi congruente, deci O aparţine mediatoarelor laturilor poligonului. Mediatoarele fiind concurente, conform teoremei 1, poligonul $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ poate fi înscris într-un cerc.

b) Din demonstraţia de la punctul a) rezultă că $|A_1O|$, $|A_2O|$, $|A_3O|$, ..., $|A_nO|$ sînt bisectoarele unghiurilor $\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_3, \ldots, \hat{A}_n$. O fiind deci punctul lor comun, conform teoremei 2 poligonul $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ poate fi circumscris unui cerc.

Se observă că în cazul poligoanelor regulate centrul cercului înscris coincide cu centrul cercului circumscris şi se numeşte *centrul* poligonului. Raza cercului înscris într-un poligon regulat se mai numeşte şi *apotema* poligonului regulat.

Patrulatere inscriptibile

Ştim că un *patrulater inscriptibil este convex* (§ 1, exer. 14). În cazul patrulaterelor convexe pot fi stabilite condiţii de inscriptibilitate caracteristice.

Teorema 4. Dacă un patrulater este inscriptibil atunci orice unghi determinat de o diagonală şi o latură este congruent cu unghiul determinat de cealaltă diagonală cu latura opusă primei laturi şi reciproc dacă un patrulater este convex şi un unghi determinat de o latură şi o diagonală este congruent cu unghiul determinat de latura opusă primei laturi şi cealaltă diagonală, atunci patrulaterul este inscriptibil.

Demonstraţie. a) Fie patrulaterul $ABCD$ inscriptibil şi $\mathcal{C}(O,r)$ cercul circumscris acestuia (fig. III.32); atunci $m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{DBC}) = \frac{1}{2} m(\widehat{DC})$.

b) Fie patrulaterul $ABCD$ convex şi $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{ACD})$ (fig. III.33). Atunci ţinînd seama că B şi C se află în acelaşi semiplan limitat de AD, din proprietatea arcului capabil de unghi dat, rezultă că punctele B şi C aparţin unui cerc în care $|AD|$ este coardă.

Teorema 5. Dacă un patrulater este inscriptibil atunci suma măsurilor a două unghiuri opuse este 180 şi reciproc dacă suma măsurilor a două unghiuri opuse dintr-un patrulater convex este 180, atunci patrulaterul este inscriptibil.

Demonstraţia acestei teoreme se lasă ca exerciţiu.

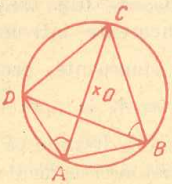


Fig. III.32

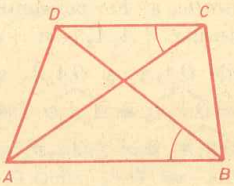


Fig. III.33

Exerciţii

1. Fiind dat triunghiul ABC, să se arate că există patru cercuri tangente dreptelor AB, BC, CA (un cerc *înscris* şi trei cercuri *exînscrise*).

2. Să se calculeze apotema şi lungimea laturii unui poligon regulat cu n laturi, înscris în cercul de rază r pentru $n = 3, 4, 6, 8$.

3. Să se arate că orice dreptunghi este inscriptibil.

4. Să se arate că dacă în trapezul isoscel $ABCD$ poate fi înscris un cerc, atunci distanţa dintre cele două baze este medie proporţională între lungimile bazelor.

5. Să se arate că dacă un trapez este inscriptibil, atunci el este isoscel.

6. Să se determine măsura arcului mic determinat de o latură a unui poligon regulat cu n laturi înscris în $\mathcal{C}(O, r)$.

7. Fie un cerc $\mathcal{C}(O, r)$. Să se demonstreze că pentru orice număr natural $n > 2$ există un poligon regulat cu n laturi înscris în cerc şi un poligon regulat cu n laturi circumscris cercului.

Indicaţie. Se utilizează axioma de construcţie a unghiurilor şi faptul că măsura unghiului la centru ale cărui laturi trec prin două vîrfuri consecutive ale poligonului este $\alpha = \frac{2 \cdot 180}{n}$.

8. Se consideră un cerc $\mathcal{C}(O, r)$ şi două poligoane regulate cu n laturi, unul înscris şi celălalt circumscris cercului. Să se arate că dacă se notează cu l_n şi L_n lungimile laturilor celor două poligoane, atunci

$$L_n = \frac{2rl_n}{\sqrt{4r^2 - l_n^2}}.$$

9. Să se arate că într-un patrulater inscriptibil o bisectoare interioară se intersectează cu bisectoarea exterioară a unghiului opus, pe cercul circumscris patrulaterului.

Indicaţie. Se arată că se obţine un patrulater inscriptibil.

10. Prin punctele comune A şi B a două cercuri $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ şi $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ se duc secantele arbitrare MAN şi PBQ, $M \in \mathcal{C}(O_1, r_1)$ şi $P \in \mathcal{C}(O_1, r_1)$. Să se demonstreze că $MP \parallel NQ$.

11. În cercul $\mathcal{C}(O, r)$ se duce diametrul $|AB|$ şi tangenta în A, pe care se iau două puncte oarecare C şi D, A separă C şi D. Dreptele CB şi DB intersectează cercul $\mathcal{C}(O, r)$ în E şi F. Să se arate că patrulaterul $CDFE$ este inscriptibil. Ce devine acest patrulater în cazul cînd $|AC| \equiv |AD|$.

Indicaţie. Se arată că un unghi interior al patrulaterului este congruent cu unghiul opus exterior; în cazul particular se obţine trapez isoscel.

12. Să se arate că un paralelogram este inscriptibil dacă şi numai dacă este un dreptunghi.

13. Fie A', B', C' mijloacele laturilor unui triunghi ABC, iar D piciorul unei înălţimi ($D = \mathrm{pr}_{BC}A$). Să se arate că punctele A', B', C' şi D sînt pe un cerc.

14. Fie ABC un triunghi, A', B' mijloacele laturilor $|BC|$ şi $|AC|$, D piciorul înălţimii duse din A, H ortocentrul, iar A_1 mijlocul segmentului $|AH|$. Să se arate că punctele A', B', A_1 şi D sînt situate pe un cerc în fiecare din următoarele cazuri posibile: a) $H \in |AD|$, b) $H = D$, c) $A \in |HD|$.

15. Fie ABC un triunghi, D, E, F picioarele înălţimilor, A', B', C' mijloacele laturilor, H ortocentrul, iar A_1, B_1, C_1 mijloacele segmentelor $|AH|$, $|BH|$, $|CH|$. Să se arate că punctele D, E, F, A', B', C', A_1, B_1, C_1 sînt pe un cerc (numit „cercul lui Euler" sau „cercul celor nouă puncte" al triunghiului ABC).

Indicaţie. Se vor folosi exerciţiile 13 şi 14.

16*. Folosind notaţiile exerciţiului 15 să se arate că dreptele $A'A_1$, $B'B_1$, $C'C_1$ sînt concurente.

17. Fie ABC un triunghi şi D, E, F picioarele înălţimilor. Să se arate că cercurile circumscrise triunghiurilor AEF, BFD, CDE au un punct comun.

18. Se consideră un patrulater convex avînd diagonalele perpendiculare, care se intersectează în punctul O. Să se arate că proiecţiile lui O pe laturi sînt vîrfurile unui patrulater înscriptibil.

19. Fie $\widehat{AOB}$ un unghi drept, M şi N puncte variabile respectiv pe $|OA|$ şi $|OB|$, iar $MNPQ$ un pătrat astfel ca MN să se separe punctele O şi P. Să se afle locul geometric al centrului pătratului.

20*. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic şi $D \in |BC|$ un punct fix. Paralela prin D la AB taie AC în E. Fie M un punct variabil pe segmentul $|AE|$ şi $\{N\} = AB \cap DM$. Cercurile circumscrise triunghiurilor CDM şi AMN se intersectează a doua oară în P. Să se afle locul geometric al punctului P.

21*. Fie ABC un triunghi şi D, E, F picioarele înălţimilor. Să se arate: a) triunghiurile AEF, DEC şi DBF sînt asemenea cu triunghiul ABC. b) Bisectoarele triunghiului DEF (numit „triunghi ortic") coincid cu înălţimile triunghiului ABC.

22*. Se ia un punct M pe cercul circumscris unui triunghi ascuţitunghic ABC. Să se arate că proiecţiile P, Q, R ale punctului M pe BC, CA, AB sînt trei puncte situate pe o dreaptă („dreapta lui Simson"). Să se considere apoi cazul triunghiului obtuzunghic.

§ 5. Poziţia relativă a două cercuri

Fiind date două cercuri $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ şi $\mathcal{C}(O_2, r_2)$, $O_1 \neq O_2$ se pune problema dacă există puncte comune cercurilor şi cîte sînt acestea. Din ex. 3 § 1. rezultă că două cercuri distincte nu pot avea decît cel mult două puncte comune. Stabilirea exactă a numărului de puncte comune a două cercuri se face prin următoarea teoremă:

Teoremă. Fie cercurile $\mathcal{C}(O_1, r_1)$, $\mathcal{C}(O_2, r_2)$, $O_1 \neq O_2$ şi $d = \|O_1O_2\|$. Dacă 1) $d > r_1 + r_2$, cercurile nu au puncte comune

2) $d = r_1 + r_2$, cercurile au exact un punct comun

3) $d < r_1 + r_2$ şi $d > |r_2 - r_1|$, cercurile au exact două puncte comune.

4) $d = |r_1 - r_2|$, cercurile au exact un punct comun

5) $d < |r_1 - r_2|$, cercurile nu au puncte comune.

Demonstraţie. **1.** Presupunînd că M este un punct comun celor două cercuri adică $\|O_1M\| = r_1$ şi $\|O_2M\| = r_2$, are loc $\|O_1O_2\| \leqslant \|O_1M\| + \|O_2M\|$ sau $d \leqslant r_1 + r_2$, ceea ce contrazice ipoteza (fig. III.34).

2. Pe semidreapta $|O_1O_2$ se construieşte punctul unic M, astfel încît $\|O_1M\| = r_1$ (fig. III.35). Deoarece $d > r_1$, rezultă că $M \in |O_1O_2|$, deci $\|O_2M\| = d - r_1 = r_2$; aşadar M aparţine celor două cercuri. Pentru orice alt punct Q, $Q \notin |O_1O_2|$ are loc inegalitatea: $\|O_1Q\| + \|O_2Q\| > \|O_1O_2\| = r_1 + r_2$, deci Q nu poate fi comun celor două cercuri.

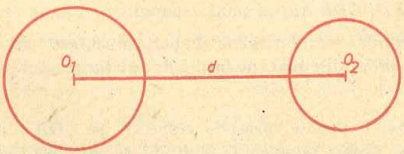


Fig. III.34

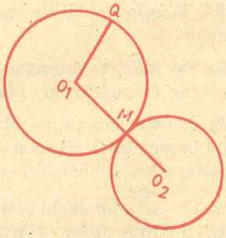


Fig. III.35

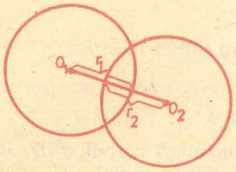


Fig. III.36

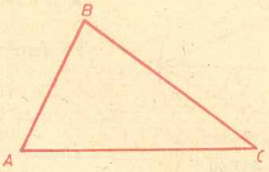


Fig. III.37

3. Se presupune că $r_2 \geqslant r_1$ și se va arăta că numerele r_1, r_2, d pot fi lungimile laturilor unui triunghi (fig. III.36). Din $d > |r_2 - r_1|$ rezultă $d > r_2 - r_1$ adică $r_2 < d + r_1$. Inegalitatea $d < r_1 + r_2$ este verificată prin ipoteză, iar $r_1 < r_2 + d$ rezultă din presupunerea $r_2 \geqslant r_1$. Din § 9 cap. II, aplicații, rezultă că există un triunghi ABC cu $\| AB \| = r_1, \| BC \| = r_2, \| AC \| = d = \| O_1O_2 \|$ (fig. III.37). Într-unul din semiplanele determinate de dreapta O_1O_2 se construiesc semidreptele $| O_1M$ și $| O_2N$ astfel încît $\widehat{O_2O_1M} \equiv \widehat{CAB}$ și $\widehat{O_1O_2N} \equiv \widehat{BCA}$. Se notează cu P punctul de intersecție al semidreptelor $| O_1M$ și $| O_2N$. $\triangle O_1O_2P \equiv \triangle ACB$ deci $\| O_1P \| = r_1$ și $\| O_2P \| = r_2$. Fie P' simetricul lui P față de O_1O_2.

Atunci $\| O_1P' \| = \| O_1P \| = r_1$, deci P și P' aparțin cercului $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ și $\| O_2P' \| = \| O_2P \| = r_2$, deci P și P' aparțin cercului $\mathcal{C}(O_2, r_2)$. Dacă $r_1 > r_2$ se face un raționament analog.

4. Se presupune $r_2 > r_1$, deci $r_2 = d + r_1$ (fig. III.38). Pe semidreapta $| O_2O_1$ există punctul unic M astfel încît $\| O_2M \| = r_2$. Atunci $O_1 \in | O_2M |$ și $\| O_1M \| = r_1$, deci M aparține celor două cercuri. Să arătăm că cercurile nu au nici un alt punct comun. Dacă M' este diametral opus lui M în cercul $\mathcal{C}(O_2, r_2)$, atunci $\| M'O_1 \| = r_2 + d > r_1$ deci pe dreapta O_1O_2 nu poate exista alt punct comun celor două cercuri. Fie P un punct pe cercul $\mathcal{C}(O_2, r_2)$, $P \notin O_1O_2$. Atunci $\| O_1P \| > \| O_2P \| - \| O_1O_2 \| = r_2 - d = r_1$, deci P nu poate aparține și cercului $\mathcal{C}(O_1, r_1)$.

5. Presupunînd că M este un punct comun celor două cercuri (fig. III.39), adică $\| O_1M \| = r_1$ și $\| O_2M \| = r_2$, are loc

$$\| O_1O_2 \| \geqslant | \, \| O_1M \| - \| O_2M \| \, |$$

sau $d \geqslant | r_1 - r_2 |$, ceea ce contrazice ipoteza.

Definiție. Două cercuri se numesc *tangente* dacă au exact un punct comun și se numesc *secante* dacă au două puncte distincte comune.

În teorema precedentă s-a studiat cazul cercurilor cu centre diferite. Dacă centrele a două cercuri coincid, cercurile se vor numi *concentrice*. Este ușor de verificat că două cercuri concentrice sau coincid sau nu au nici un punct comun.

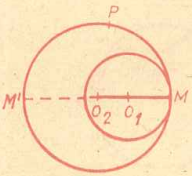


Fig. III.38

Fig. III.39

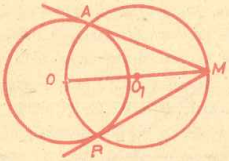


Fig. III.40

1. Tangente dintr-un punct exterior

Teoremă. Prin orice punct exterior unui cerc trec două drepte tangente la cerc.

Demonstrație. Se consideră cercul $\mathcal{C}(O, r)$ și un punct $M \in \text{Ext}\ \mathcal{C}(O, r)$. Fie O_1 mijlocul segmentului $|OM|$ și $r_1 = \frac{\|OM\|}{2}$. Deoarece $\|O_1O\| = r_1$ și $\|OM\| > r$ rezultă că r, r_1, $\|OO_1\|$ verifică condițiile de la punctul 3 al teoremei, deci cercurile $\mathcal{C}(O,r)$ și $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ sînt secante în punctele A și B (fig. III. 40), $m(\widehat{OAM}) = m(\widehat{OBM}) = 90$ fiind înscrise în semicercurile $\overset{\frown}{OAM}$ și $\overset{\frown}{OBM}$; rezultă că $OA \perp AM$ și $OB \perp BM$, deci AM, și BM, sînt tangente din M la cercul $\mathcal{C}(O,r)$.

Arătați că nu există alte tangente din M la cercul $\mathcal{C}(O, r)$!

2. Puterea unui punct față de un cerc

Teorema 1. Fie cercul $\mathcal{C}(O, r)$ și $M \in \text{Int}\ \mathcal{C}(O, r)$. Atunci pentru orice coardă $|AB|$ care conține punctul M, produsul $\|AM\| \cdot \|BM\|$ este constant.

Demonstrație. În cercul $\mathcal{C}(O, r)$ se consideră coardele $|AB|$ și $|CD|$ care conțin punctul M (fig. III.41). $\triangle MAC \sim \triangle MDB$ deoarece $\widehat{CMA} \equiv \widehat{BMD}$ (opuse la vîrf) și $\widehat{CAB} \equiv \widehat{CDB}$ (cuprind același arc între laturi). Atunci $\frac{\|MA\|}{\|MD\|} = \frac{\|MC\|}{\|MB\|}$ și $\|MA\| \cdot \|MB\| = \|MC\| \cdot \|MD\|$.

Valoarea constantă a acestui produs înmulțită cu (-1) se notează $\rho(M)$ și se numește *puterea punctului* M, interior cercului, față de cerc.

Teorema 2. Fie cercul $\mathcal{C}(O, r)$ și $M \in \text{Ext}\ \mathcal{C}(O, r)$. Atunci pentru orice secantă AB, $A \in \mathcal{C}(O, r)$, $B \in \mathcal{C}(O, r)$ care conține punctul M, produsul $\|MA\| \cdot \|MB\|$ este constant.

Demonstrație. Se consideră secantele AB și CD care conțin punctul M (fig. III.42), A, B, C, D fiind pe cercul $\mathcal{C}(O, r)$, $A \in |BM|$ și $C \in |DM|$. $\triangle MBC \sim \triangle MDA$ deoarece $\widehat{BMC} \equiv \widehat{DMA}$ și $\widehat{MBC} \equiv \widehat{MDA}$

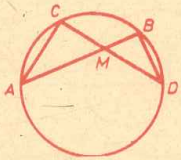


Fig. III.41

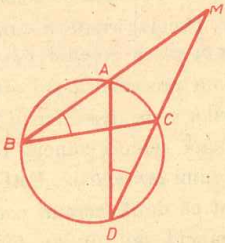


Fig. III.42

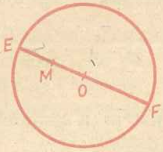


Fig. III.43

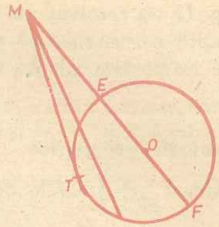


Fig. III.44

(cuprind acelaşi arc între laturi). Atunci $\frac{\| MB \|}{\| MC \|} = \frac{\| MD \|}{\| MA \|}$, deci $\| MA \| \cdot \| MB \| = \| MC \| \cdot \| MD \|$.

Valoarea constantă a acestui produs se notează cu $\rho(M)$ şi se numeşte *puterea punctului M*, exterior cercului, faţă de cerc.

Se va da în continuare expresia puterii unui punct faţă de cerc cînd se cunoaşte raza cercului r şi distanţa de la punct la centrul cercului.

a) $M \in \text{Int}\, \mathcal{C}(O, r)$ (fig. III. 43). Fie $| EF |$ diametrul prin M. Atunci $\rho(M) = - \| ME \| \cdot \| MF \| = -[r - \| OM \|] \cdot [r + \| OM \|] = -(r^2 - \| OM \|^2) = \| OM \|^2 - r^2$.

b) $M \in \text{Ext}\, \mathcal{C}(O, r)$ (fig. III. 44). $| EF |$ fiind un diametru şi $E \in | MF |$, are loc: $\rho(M) = \| ME \| \cdot \| MF \| = [\| OM \| - r] \cdot [\| OM \| + r] = \| OM^2 \| - r^2$.

Se observă că dacă MT este tangentă la cerc, T fiind punctul de tangenţă, $\| TM \|^2 = \| OM \|^2 - r^2 = \rho(M)$.

Observaţie. În mod convenţional, dacă punctul M aparţine cercului $\mathcal{C}(O, r)$, $\rho(M) = 0$. **În concluzie, oricare ar fi punctul M din planul cercului $\mathcal{C}(O, r)$, avem**

$$\rho(M) = \| OM \|^2 - r^2.$$

3. Axa radicală a două cercuri

Se consideră două cercuri $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ şi $\mathcal{C}(O_2, r_2)$, $O_1 \neq O_2$ şi se pune problema să se găsească locul geometric al punctelor care au puteri egale faţă de cele două cercuri (fig. III.45). Aceasta revine la găsirea punctelor M, pentru care

$$\| O_1M \|^2 - r_1^2 = \| O_2M \|^2 - r_2^2.$$

Dacă $r_1 \geqslant r_2$, atunci se poate nota $a^2 = r_1^2 - r_2^2$ şi condiţia se scrie

$$\| O_1M \|^2 - \| O_2M \|^2 = a^2.$$

Deci trebuie găsit locul geometric al punctelor pentru care diferenţa pătratelor distanţelor la două puncte fixe este constantă. În exerciţiul recapitulativ

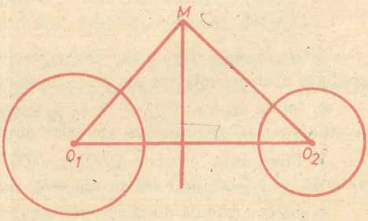


Fig. III.45

nr. 16, cap. II s-a rezolvat această problemă și s-a găsit că locul geometric este o dreaptă perpendiculară pe O_1O_2.

Dreapta astfel determinată se numește *axa radicală* a cercurilor $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ și $\mathcal{C}(O_2, r_2)$.

4. Construcții geometrice

Se consideră următoarele operații numite construcții geometrice fundamentale:

— trasarea unei drepte cu rigla cînd se cunosc două puncte distincte care îi aparțin;

— determinarea punctului de intersecție a două drepte date;

— trasarea cu compasul a unui cerc cînd este dat centrul și un segment a cărui lungime este raza;

— determinarea punctelor de intersecție dintre o dreaptă și un cerc;

— determinarea punctelor de intersecție a două cercuri.

Prin construcție geometrică sau construcție cu rigla (negradată) și compasul se va înțelege o succesiune de construcții geometrice fundamentale.

În clasele precedente s-au învățat diferite construcții geometrice.

O altă construcție geometrică, la care se aplică puterea punctului, este determinarea unui segment a cărui lungime este medie proporțională a două segmente date.

Fie segmentele $|AB|$ și $|CD|$ cu $\|AB\| = a$, $\|CD\| = b$, $a > b$ (fig. III.46). *Să se construiască un segment de lungime* $\sqrt{a.b}$. Pe segmentul $|AB|$ se construiește punctul M, astfel ca $\|AM\| = b$. Se construiesc în continuare punctele O_1, mijlocul segmentului $|MB|$, și O_2, mijlocul segmentului $|AO_1|$. Se notează cu N și P punctele de intersecție ale cercurilor cu centrele în O_1 și O_2 de raze $\|O_1B\|$, respectiv $\|O_2A\|$. Triunghiul ANO_1 este dreptunghic de unde rezultă că AN este tangentă la cercul $\mathcal{C}(O_1, \|O_1B\|)$ și deci $\|AN\|^2 = \|AM\| \cdot \|AB\| = a \cdot b$. Analog, $\|AP\|^2 = a \cdot b$.

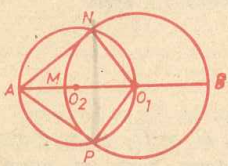


Fig. III.46

Exerciții

1. Două cercuri $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ și $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ au razele $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $\|O_1O_2\| = d$. Să se studieze pozițiile relative ale celor două cercuri după valorile lui d.

2. Se dă un cerc $\mathcal{C}(O, r)$, $r = 3$, și punctul O', $\|OO'\| = 2$. Fie cercul $\mathcal{C}(O', x)$. Să se studieze pozițiile relative ale celor două cercuri după valorile lui x.

3. Fiind date cercurile $\mathcal{C}(O_1, r)$, $\mathcal{C}(O_2, 5)$ și $\|O_1O_2\| = 2(r - 5)$, să se discute după valorile lui r pozițiile relative ale celor două cercuri.

4. Să se arate că două cercuri tangente au o tangentă comună în punctul comun.

5. Să se arate că două cercuri cu interioarele disjuncte au tangente comune.

6. Fie cercurile $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ și $\mathcal{C}(O_2, r_2)$. Să se arate că dacă există punctele $A \in \mathcal{C}(O_1, r_1)$ și $B \in \mathcal{C}(O_1, r_1)$ astfel încît $A \in \operatorname{Int} \mathcal{C}(O_2, r_2)$ și $B \in \operatorname{Ext} \mathcal{C}(O_2, r_2)$, atunci cercurile sînt secante.

7. Să se arate că, dacă cercurile $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ și $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ sînt tangente, axa lor radicală este tangenta comună, iar dacă cercurile sînt secante, axa lor radicală este dreapta determinată de punctele comune celor două cercuri.

8. Să se construiască tangentele comune la două cercuri date.

9. Să se construiască tangentele la un cerc, paralele cu o dreaptă dată.

10*. Să se construiască cercul care trece prin două puncte date și este tangent unei drepte date.

11*. Să se construiască cercul care trece prin punctele A și B și este tangent unui cerc dat $\mathcal{C}(O, r)$.

12*. Să se construiască un cerc care să treacă printr-un punct dat și să fie tangent la două drepte date.

13. Se dă un cerc $\mathcal{C}(O, r)$ în care este înscris triunghiul isoscel ABC ($|AB| \equiv |AC|$). Prin A se duce o secantă care intersectează BC în E și cercul în F. Să se arate că AB este tangentă la cercul circumscris triunghiului BEF.

14. Se dă cercul $\mathcal{C}(O, r)$ și punctul exterior M a cărui distanță la centrul cercului este $2r$. Din M se duce tangenta MN la cercul $\mathcal{C}(O, r)$ și se prelungește $|MO|$ pînă ce intersectează cercul în P. Tangenta în P la cerc intersectează tangenta MN în Q. Să se arate că $2\,\|PQ\| = \|MQ\|$ și $\|QM\| = 2\sqrt{3}\,r$, iar triunghiul PQN este echilateral.

15. Fiind date punctele A, C și $B \in |AC|$, ducem tangenta CT la cercul de diametru $|AB|$. Cercul cu centrul C și rază $|CT|$ intersectează AB în M și N. Să se arate că avem relația $\|AM\| \cdot \|AN\| = \|AB\| \cdot \|AC\|$.

Indicație. Se scrie puterea punctului C față de cercul de diametru $|AB|$ și apoi puterea punctului A față de cercul cu diametru $|MN|$ sub forma $\|AM\| \cdot \|AN\| = (\|AC\| - \|CT\|) \cdot (\|AC\| + \|CT\|)$.

16*. O dreaptă arbitrară d taie două cercuri în punctele A, B, C, D și axa lor radicală în O. Să se arate că avem relațiile:

$$\frac{\|OA\|}{\|OB\|} = \frac{\|CA\|}{\|CB\|} = \frac{\|DA\|}{\|DB\|}.$$

§ 6. Lungimea cercului

Lungimea unui segment a fost considerată ca noțiune fundamentală, însă lungimea unui cerc sau a unui arc de cerc sînt noțiuni care se definesc.

Definiție. *Lungimea unui cerc* este un număr real pozitiv mai mare decît perimetrul oricărui poligon convex înscris în cerc și mai mic decît perimetrul oricărui poligon convex circumscris cercului.

Admitem că orice cerc are lungime.

O proprietate importantă a lungimii cercului este dată de:

Teorema 1. Raportul dintre lungimea unui cerc și lungimea razei este același pentru toate cercurile.

Vom accepta fără demonstrație această teoremă întrucît necesită cunoștințe suplimentare.

Numărul care reprezintă raportul dintre lungimea unui cerc oarecare și lungimea diametrului său se notează cu π. Acesta este un număr irațional și o aproximare a sa este $\pi \approx 3{,}1415$.

Cu această notație rezultă că lungimea unui cerc $\mathcal{C}(O, r)$ notată l_{cerc} este:

$$l_{\text{cerc}} = 2\pi r.$$

Pentru a defini lungimea unui arc al unui cerc $\mathcal{C}(O, r)$ se poate proceda în mod analog considerîndu-se linii poligonale înscrise în cerc și avînd aceleași extremități cu arcul.

Calcularea lungimii unui arc se face ținînd cont de faptul că arcele congruente au lungimi egale și dacă un arc este reuniunea a două arce care au un singur punct comun, atunci lungimea sa este suma lungimilor celor două arce. În acest mod va rezulta (prin analogie cu demonstrația teoremei lui Thales) că:

a) lungimea unui arc $\widehat{AB}$ pentru care $m(\widehat{AB}) = p \cdot \frac{180}{n}$, $p, n \in \mathbf{N}^*$ este $l_{\widehat{AB}} = p \cdot \frac{\pi r}{n}$;

b) dacă $m(\widehat{AB}) = \alpha$, $\alpha \in [0,180]$, atunci $l_{\widehat{AB}} = \frac{\pi r \alpha}{180}$;

c) lungimea unui arc mare $\widehat{AB}$ pentru care $m(\widehat{AB}) = 360 - \alpha$ este

$$l_{\widehat{AB}} = 2\pi r - \frac{\pi r}{180}\alpha = \frac{\pi r}{180}(360 - \alpha).$$

Astfel, rezultă:

Teorema 2. Pentru orice arc $\widehat{AB}$, $l_{\widehat{AB}} = \frac{\pi r}{180} \cdot m(\widehat{AB})$.

Din această teoremă rezultă că raportul dintre lungimea unui arc și raza cercului nu depinde decît de măsura arcului respectiv. Aceasta face posibilă introducerea unei noi măsuri pentru arce și unghiuri.

Definiție. *Măsura în radiani* a unui arc $\widehat{AB}$ al cercului $\mathcal{C}(O,r)$, notată $\mu(\widehat{AB})$ este

$$\mu(\widehat{AB}) = \frac{l_{\widehat{AB}}}{r} = \frac{\pi}{180} m(\widehat{AB}).$$

Măsura în radiani a unui unghi $\widehat{hk}$ este lungimea arcului de pe cercul de rază 1 și cu centrul în vîrful unghiului, aparținînd interiorului unghiului.

Se observă că, de fapt, măsura în radiani a unui unghi este măsura în radiani a unui arc de pe un cerc de rază r cu centrul în vîrful unghiului, aparținînd interiorului unghiului. Reamintim că măsura notată $m(\widehat{hk})$ este măsura în grade a unghiului.

Exerciţii

1. Să se afle măsura în radiani a unghiurilor de 30°, 45°, 20°, 12°, 135°.

2. Să se calculeze o valoare aproximativă a lui π cu ajutorul unui octogon regulat înscris într-un cerc.

3. Fie cercurile $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ şi $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ şi patrulaterele convexe $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$, înscrise respectiv în cercurile $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ şi $\mathcal{C}(O_2, r_2)$. Să se arate că dacă patrulaterele sînt asemenea, atunci

$$\frac{\text{Perimetrul } A_1B_1C_1D_1}{r_1} = \frac{\text{Perimetrul } A_2B_2C_2D_2}{r_2}.$$

4. Să se afle lungimea unui arc cuprins între laturile unui unghi la centru cu măsura de 1 radian şi măsura în grade a acestui unghi.

5. Fie cercurile $\mathcal{C}(O_1, r_1)$, $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ pentru care $\| O_1O_2 \| = 2$, $r_1 = 1$, $r_2 = \sqrt{3}$. Să se arate că sînt secante şi să se afle perimetrul figurii formate din cele două arce mici determinate de punctele comune celor două cercuri.

6. Fie $| AB |$ un diametru al cercului $\mathcal{C}(O, r)$ şi M, N două puncte distincte, $M \in |AB|$, $N \in | AB |$ şi cercurile $\mathcal{C}(M, r_1)$, $\mathcal{C}(O, r_1)$, $\mathcal{C}(N, r_1)$, astfel încît perechile de cercuri $\mathcal{C}(M, r_1)$, $\mathcal{C}(O, r_1)$ şi $\mathcal{C}(O, r_1)$, $\mathcal{C}(N, r_1)$ să fie tangente exterioare, iar cercurile $\mathcal{C}(M, r_1)$ şi $\mathcal{C}(N, r_1)$ să fie tangente interior cu cercul $\mathcal{C}(O, r)$. Să se calculeze suma lungimilor cercurilor $\mathcal{C}(M, r_1)$, $\mathcal{C}(O, r_1)$, $\mathcal{C}(N, r_1)$ în funcţie de r. Generalizare.

Exerciţii recapitulative

1. Să se arate că lungimea segmentului determinat de punctele de tangenţă pe tangenta comună la două cercuri tangente exterioare este media geometrică a diametrelor celor două cercuri.

2. Să se calculeze raza cercului circumscris unui triunghi isoscel ABC, în care $\| AB \| = \| AC \| = 20$, $\| BC \| = 24$.

3*. Distanţa de la un punct oarecare al unui cerc la o coardă dată este media geometrică a distanţelor de la acelaşi punct la tangentele duse la cerc prin extremităţile coardei.

4. Fie două puncte fixe A, B situate pe diametrul unui semicerc şi egal depărtate de centru, iar M şi N două puncte variabile pe semicerc, astfel ca $AM \parallel BN$. Să se demonstreze că produsul $\| AM \| \cdot \| BN \|$ este constant.

5. Fie H ortocentrul unui triunghi ABC, iar A', B', C' picioarele înălţimilor. Să se arate că: $\| HA \| \cdot \| HA' \| = \| HB \| \cdot \| HB' \| = \| HC \| \cdot \| HC' \|$.

6. Pe laturile unui hexagon regulat se construiesc în exterior pătrate care au cîte o latură comună cu hexagonul. Să se arate că vîrfurile acestor pătrate, diferite de vîrfurile hexagonului, formează un dodecagon regulat.

7. Dacă trei cercuri sînt două cîte două tangente exterioare, care este raportul între suma lungimilor acestor cercuri şi perimetrul triunghiului format de centrele lor?

8. Considerăm trapezul $ABCD$ cu laturile paralele $| AB |$ şi $| CD |$; fie E intersecţia dreptei AD cu cercul circumscris triunghiului BCD şi F intersecţia dreptei AD cu paralela din C la BE. Presupunînd că $D \in | AE |$, să se arate că

1) Patrulaterul $ABCF$ este inscriptibil

2) $\| BC \|$ este medie geometrică între $\| AD \|$ şi $\| EF \|$.

9. Se dau două cercuri $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ şi $\mathcal{C}(O_2, r_1)$ tangente exterioare. Prin punctul lor comun de tangenţă T se duc două drepte arbitrare ATC şi DTB care intersectează cercul $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ în A şi D şi cercul $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ în C şi B. Să se arate că patrulaterul $ABCD$ este un trapez.

10*. Se dă triunghiul ABC înscris în cercul $\mathcal{C}(O, r)$, $O \in \text{Int } ABC$; se duce înălţimea AD şi diametrul prin A. Se proiectează vîrfurile B şi C pe acest diametru în E şi F şi se intersectează DE şi DF cu AC şi AB, respectiv, în G şi H. Să se demonstreze că punctele A, H, D, G sînt conciclice.

11. Fie cercurile $\mathcal{C}(O_1, r_1)$, $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ secante în A şi B. Prin punctele A şi B se duc două secante paralele CAD şi EBF care intersectează cele două cercuri, respectiv, în punctele C, D şi E, F. Să se demonstreze că patrulaterul $CDFE$ este paralelogram.

12. Se dau două cercuri $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ şi $\mathcal{C}(O_2, r_2)$, cercul $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ trecînd prin centrul O_1. Tangentele comune la aceste cercuri au punctele de contact cu cercul $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ în A şi B. Să se demonstreze că dreapta AB este tangentă cercului $\mathcal{C}(O_1, r_1)$.

13. Se consideră două cercuri $\mathcal{C}(O_1, r_1)$, şi $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ tangente exterioare în punctul T. Tangenta exterioară comună AB se intersectează cu tangenta în T la cele două cercuri în punctul C, iar cu linia centrelor O_1O_2 în punctul M.

1) Să se calculeze lungimea segmentelor $|AB|$ şi $|TC|$ în funcţie de r_1 şi r_2.

2) Să se arate că dreptele AT şi BT sînt perpendiculare.

3) Să se calculeze lungimea segmentului $|MO_1|$ şi măsura unghiului $\widehat{OMA}$ în cazul particular $r_1 = a$, $r_2 = 3a$.

Capitolul

IV

Elemente de geometrie analitică

§ 1. Coordonate în plan

Alegem în plan dreptele perpendiculare OA și OB, $\| OA \| = 1$, $\| OB \| = 1$ (fig. IV. 1) și considerăm cîte un sistem de coordonate pe OA, respectiv, OB astfel ca $x_O = 0$, $x_A > 0$ și $y_O = 0$, $y_B > 0$ (notăm coordonatele pe OA cu x și pe OB cu y). Cum $\| OA \| = 1$, $\| OB \| = 1$, rezultă $x_A = 1$, $y_B = 1$. Dacă P este un punct din plan, există o singură dreaptă paralelă cu OB care conține punctul P și care intersectează dreapta OA în M. De asemenea, există o singură dreaptă paralelă cu OA, care conține punctul P și care intersectează pe OB în N. Dacă $x = x_M$ și $y = y_N$, atunci punctului P i se asociază în acest fel o pereche ordonată unică de numere reale (x, y). Numărul x se numește *abscisa* punctului P, iar numărul y se numește ordonata lui P. Axa OA o numim *axa absciselor*, iar axa OB *axa ordonatelor*.

Fiind date numerele reale x și y, conform axiomei riglei numărului x i se asociază un punct unic M pe OA cu $x_M = x$ și numărului y i se asociază un singur punct N pe OB cu $y_N = y$. Ducînd prin M o paralelă la OB și prin N o paralelă la OA, cele două paralele se intersectează în punctul unic P. În acest fel, perechii de numere reale (x, y) i se asociază punctul unic P.

Constatăm deci că există o funcție bijectivă definită pe mulțimea punctelor planului și cu valori în $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, care asociază fiecărui punct P din plan o pereche ordonată de numere reale (x, y).

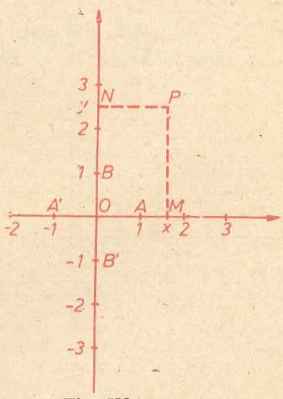


Fig. IV.1

Funcția descrisă mai sus ne definește așanumitul *sistem de coordonate* în plan.

Punctele O, A, B determină sistemul de coordonate în mod unic. Tripletul ordonat

(O, A, B) se numește *reperul sistemului de coordonate*. Reperul determină în mod unic sistemul de coordonate.

Fie A', B' cîte un punct pe semidreptele opuse lui $|OA$, respectiv, $|OB$. Mulțimile de puncte Int $\widehat{AOB}$, Int $\widehat{BOA'}$, Int $\widehat{A'OB'}$, Int $\widehat{B'OA}$ se numesc, respectiv, *cadranele* I, II, III, IV.

$(x, y) \in$ Cadranului I $\Leftrightarrow x > 0$ și $y > 0$,
$(x, y) \in$ Cadranului II $\Leftrightarrow x < 0$ și $y > 0$,
$(x, y) \in$ Cadranului III $\Leftrightarrow x < 0$ și $y < 0$,
$(x, y) \in$ Cadranului IV $\Leftrightarrow x > 0$ și $y < 0$.

Exemplu. Pe figura IV. 2 avem $A(1, 0)$, $B(0,1)$, $A'(-1, 0)$, $B'(0, -1)$, $C(3, 2)$, $D(-2, 3)$, $E(0, -3)$, $F(-2, -1)$, $G(2, -1)$.

Exerciții

1. Figurați punctele $M(3, 5)$, $N(-1, 4)$, $P(2, -2)$, $Q(0, 4)$, $R(-6, 0)$.
2. Aflați locul geometric al punctelor $M(x, 2)$, cînd x ia toate valorile din **R**.
3. Aflați locul geometric al punctelor care au abscisa egală cu 5.

Teorema 1. Fie $M(x_1, y_1)$ și $N(x_2, y_2)$ două puncte date și $P(x, y)$ mijlocul segmentului $|MN|$. Atunci coordonatele lui P se calculează din formulele

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \tag{1}$$

Demonstrație. Dacă $x_1 = x_2$, evident $x = x_1 = \frac{x_1 + x_2}{2}$. Fie $x_1 \neq x_2$ și M_1, N_1, P_1, proiecțiile pe axa absciselor a punctelor M, N, P (fig. IV.3).

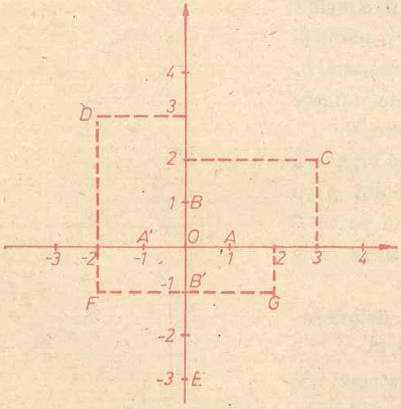


Fig. IV.2

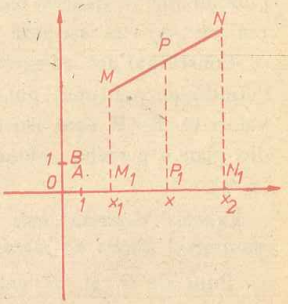


Fig. IV.3

Proprietatea liniei mijlocii în trapez ne arată că P_1 este mijlocul lui $|M_1N_1|$ și prima formulă (1) rezultă din teorema 4, Cap. I. § 8. Analog se arată și a doua formulă.

Exerciții

4. Să se afle coordonatele mijlocului segmentului $|CD|$, știind că $C(1, 6)$, $D(5, 3)$.

5. Fie $M(2, -1)$ și $N(4, 3)$. Să se afle coordonatele simetricelor lui M față de originea O și față de punctul N. Să se arate că abscisele și ordonatele a două puncte simetrice față de originea O a axelor de coordonate sînt numere opuse.

Teorema 2. Distanța dintre punctele $M(x_1, y_1)$ și $N(x_2, y_2)$ este dată de formula.

$$\|MN\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{2}$$

Demonstrație. Fie M_1, N_1 și M_2, N_2 proiecțiile punctelor M și N pe cele două axe de coordonate (fig. IV. 4) și $\{Q\} = MM_2 \cap NN_1$. Dacă $x_1 = x_2$, atunci dreptele MN și OB sînt paralele și $|x_2 - x_1| = 0$. În acest caz, formula rezultă astfel:

$$\|MN\| = |y_2 - y_1| = \sqrt{(y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Cazul $y_2 = y_1$ se demonstrează în mod analog.

Să presupunem că $x_1 \neq x_2$ și $y_1 \neq y_2$. Triunghiul MNQ (fig. IV.4) este dreptunghic în Q și $\|MQ\| = |x_2 - x_1|$, $\|QN\| = \|M_2, N_2\| = |y_2 - y_1|$. Conform teoremei lui Pitagora, $\|MN\|^2 = \|MQ\|^2 + \|QN\|^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$ și formula (2) rezultă imediat.

Exemple. 1. Aflați distanța dintre punctele $M(a + 2, b - 3)$ și $N(a - 5, b + 7)$.

Soluție. Aplicînd formula demonstrată, rezultă:

$$\|MN\|^2 = (a - 5 - a - 2)^2 + (b + 7 - b + 3)^2 = 149.$$

Deci $\|MN\| = \sqrt{149}$.

2. Să se arate că triunghiul cu vîrfurile în punctele $M(a, 2a - 1)$, $N(5, -1)$ și $P(1, 1)$ este dreptunghic în P, oricare ar fi numărul real $a \neq 1$.

Soluție. Se calculează lungimile laturilor:

$$\|PM\| = \sqrt{(a - 1)^2 + (2a - 2)^2} = |a - 1|\sqrt{5}, \quad \|PN\| = 2\sqrt{5} \text{ și}$$

$$\|MN\| = \sqrt{(a - 5)^2 + (2a)^2} = \sqrt{5a^2 - 10a + 25}.$$

Deoarece $\|PM\|^2 + \|PN\|^2 = 5a^2 - 10a + 25 = \|MN\|^2$, conform reciprocei teoremei lui Pitagora, triunghiul este dreptunghic, oricare ar fi valorile lui a, $a \neq 1$. În cazul cînd $a = 1$, punctele P și M coincid și nu există triunghiul.

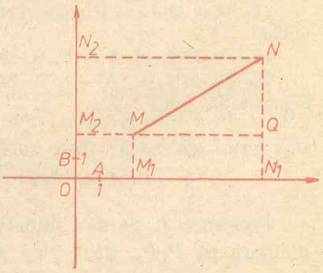


Fig. IV.4

Exerciţii

6. Aflaţi distanţa dintre punctele:

a) $M(-2, 7)$ şi $N(5, -2)$; b) $P\left(-\frac{\pi}{2}, 2\right)$ şi $Q\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$;

c) $S(-2\sqrt{5}, -4\sqrt{5})$ şi $T(6\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$;

d) $P(a, b+1)$ şi $Q(a-3, b)$.

7. Să se determine x ştiind că distanţa dintre punctele $P(-5, 2)$ şi $Q(7, x)$ este 13.

8. Să se arate că triunghiul cu vîrfurile în punctele $M(1, 2)$, $N(3, -4)$ şi $P(5, -2)$ este dreptunghic.

9. Să se arate că triunghiul cu vîrfurile în punctele $M(1, 2)$, $N(4, 5)$, $P(a, 6-a)$ este isoscel, oricare ar fi a număr real, $a \neq \frac{5}{2}$.

10. Să se arate că patrulaterul cu vîrfurile în punctele $M(1,5)$, $N\left(\frac{2}{5}, \frac{19}{5}\right)$, $P(2, 3)$, $Q\left(\frac{13}{5}, \frac{21}{5}\right)$ este dreptunghi.

Indicaţie. Se arată că laturile opuse sînt congruente şi că diagonalele sînt şi ele congruente.

Teorema 3. (Condiţie de perpendicularitate.) Fie $P_0(x_0, y_0)$ punctul de intersecţie al dreptelor d_1 şi d_2, iar $P_1(x_1, y_1)$ şi $P_2(x_2, y_2)$ cîte un punct pe d_1, respectiv, d_2, diferite de P_0 (fig. IV. 5). Atunci $d_1 \perp d_2$ dacă şi numai dacă

$$(x_1 - x_0)(x_2 - x_0) + (y_1 - y_0)(y_2 - y_0) = 0. \tag{3}$$

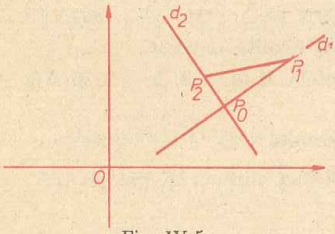


Fig. IV.5.

Demonstraţie. Avem $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow P_1P_0P_2$ triunghi dreptunghic $\Leftrightarrow \| P_0P_1 \|^2 + \| P_0P_2 \|^2 = \| P_1P_2 \|^2$, ceea ce se scrie conform cu (2) sub forma

$$(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2;$$

efectuînd calculele, se obţine relaţia (3)

Exerciţii

11. Să se arate că triunghiul cu vîrfurile $M(1, 2)$, $N(6, -1)$ şi $P(5, -2)$ este dreptunghic.

12. Fie $M(2, 3)$, $N(3, 2)$. Să se afle punctul $P(x, 0)$, ştiind că $MP \perp MN$.

13. Fie $M(1, 3)$, $N(-3, 5)$. Să se afle intersecţia axei ordonatelor cu mediatoarea segmentului $|MN|$.

§ 2. Ecuaţia dreptei

Problema 1. Se dau punctele $P_1(3,1)$, $P_2(5,2)$ şi se notează cu d perpendiculara pe P_1P_2, dusă prin P_1 (fig. IV. 6). Ce condiţie trebuie să verifice x şi y pentru ca punctul $P(x, y)$ să fie situat pe dreapta d?

Soluție. Să ne ocupăm mai întîi de punctele P, $P \neq P_1$. Atunci $P \in d \Leftrightarrow P_1P_2 \perp \perp P_1P$ și putem aplica teorema 3, 1§: $P \in d \Leftrightarrow (5-3)(x-3)+(2-1)(y-1)=0 \Leftrightarrow 2(x-3)+(y-1)=0$. Așadar un punct $P(x, y)$, diferit de $P_1(3,1)$ atunci și numai atunci se află pe dreapta d dacă

(4) $$2x + y - 7 = 0.$$

Deoarece și coordonatele lui P_1 verifică această ecuație, am aflat soluția problemei:

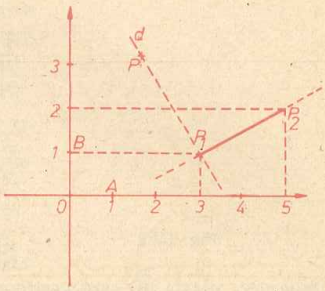


Fig. IV.6

(5) $$P(x, y) \in d \Leftrightarrow 2x + y - 7 = 0.$$

Echivalența (5) poate fi citită în mai multe feluri, de exemplu:

a) $P(x, y) \in d$ dacă și numai dacă $2x + y - 7 = 0$.

b) Coordonatele x, y ale unui punct aparținînd dreptei d satisfac ecuația (4), iar cele ale unui punct nesituat pe d nu o satisfac.

Putem să scriem

$$d = \{P(x, y) \mid 2x + y - 7 = 0\},$$

adică dreapta d este locul geometric al punctelor din plan ale căror coordonate verifică ecuația $2x + y - 7 = 0$.

Definiție. Fie $\mathcal{L}$ un loc geometric. O relație în x și y, care este satisfăcută dacă și numai dacă $P(x, y) \in \mathcal{L}$, se numește *ecuația lui* $\mathcal{L}$, iar $\mathcal{L}$ se numește *graficul* ecuației respective.

Echivalența (5) arată că ecuația lui d este $2x + y - 7 = 0$. Graficul ecuației (4) este dreapta d.

Problema 2. Să se afle ecuația cercului $\mathcal{C}(0,1)$ (fig. IV. 7).

Soluție. Deoarece $P(x, y) \in \mathcal{C}(0,1) \Leftrightarrow \| OP \| = 1$ și $\| OP \| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}$, găsim imediat:

$$P(x, y) \in \mathcal{C}(0,1) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1.$$

Așadar ecuația cercului $\mathcal{C}(0,1)$ este

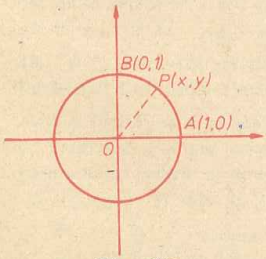


Fig. IV.7

(6) $$x^2 + y^2 = 1.$$

Spre deosebire de acest rezultat, dreapta din problema 1 are o ecuație de gradul 1 în x și y *(ecuație liniară)*. Vom arăta că același lucru este valabil pentru o dreaptă oarecare.

Teorema 1. Orice dreaptă are o ecuație de forma

(7) $$ax + by + c = 0,$$

unde a și b nu sînt ambele nule.

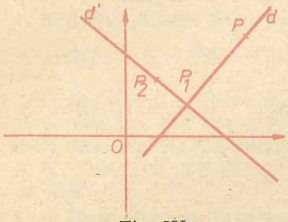


Fig. IV.8

Demonstrație. Fie d o dreaptă și $P_1(x_1, y_1) \in d$. Luăm un punct $P_2(x_2, y_2) \neq P_1$, aparținînd perpendicularei pe d, dusă prin P_1 (fig. IV. 8). Atunci numerele $x_2 - x_1$ și $y_2 - y_1$ nu sînt ambele nule. Un punct $P(x, y) \neq P_1$ se găsește pe d dacă și numai dacă $P_1P_2 \perp P_1P$, ceea ce conform teoremei 3, § 1 se scrie

$$(8) \quad (x_2 - x_1)(x - x_1) + (y_2 - y_1)(y - y_1) = 0.$$

Deoarece relația (8) este verificată și de $P_1(x_1, y_1)$, ea este ecuația dreptei d. Dacă notăm $x_2 - x_1 = a$, $y_2 - y_1 = b$ și $-ax_1 - by_1 = c$, obținem ecuația (7).

Observație. Dacă se cunosc două puncte distincte $P_1(x_1, y_1)$ și $P_2(x_2, y_2)$ și dacă P_1 este situat pe o dreaptă d, iar $P_1P_2 \perp d$, atunci ecuația dreptei d este de forma (8).

Demonstrăm reciproca teoremei 1.

Teorema 2. Graficul unei ecuații de forma (7), unde a, b nu sînt ambele nule, este o dreaptă.

Demonstrație. Putem găsi numere reale x_1, y_1 care satisfac ecuația (7). Într-adevăr, dacă $a \neq 0$ putem lua y_1 arbitrar și $x_1 = -\frac{by_1 + c}{a}$; dacă $a = 0$ luăm x_1 în mod arbitrar și $y_1 = -\frac{c}{b}$. În toate cazurile avem $ax_1 + by_1 + c = 0$, deci

$$(9) \qquad -ax_1 - by_1 = c.$$

Dacă punctul P_1 are coordonatele (x_1, y_1) determinate în acest fel, fie $P_2(x_1 + a, y_1 + b)$ (fig. IV. 9). Atunci ecuația perpendicularei d pe P_1P_2, dusă prin P_1 are, conform observației, următoarea formă:

$$(x_1 + a - x_1)(x - x_1) + (y_1 + b - y_1)(y - y_1) = 0$$

sau

$$ax + by - ax_1 - by_1 = 0$$

și în virtutea lui (9)

$$ax + by + c = 0.$$

Astfel am pus în evidență o dreaptă d a cărei ecuație este tocmai (7) și teorema este demonstrată.

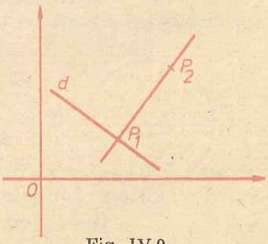


Fig. IV.9

Cazuri speciale. 1) În ecuația (8) putem avea $x_1 = x_2$; atunci $y_1 \neq y_2$ (căci $P_1 \neq P_2$). În acest

caz $P_1P_2 \parallel OB$ (fig. IV. 10) şi $d \parallel OA$, iar ecuaţia (8) se reduce la $y = y_1$. Prin urmare, ecuaţia unei drepte paralele cu axa absciselor este

(10) $$y = y_1$$

şi în particular axa absciselor are ecuaţia $y = 0$.

2) Analog, o dreaptă paralelă cu axa ordonatelor are o ecuaţie de forma

(11) $$x = x_1$$

(fig. IV. 11) şi ecuaţia axei ordonatelor este $x = 0$.

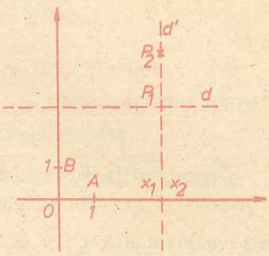


Fig. IV.10

3) Dacă dreapta d trece prin originea $O(0,0)$ (fig. IV. 12) în ecuaţia (8), avem $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, deci conform cu (7), $c = 0$. Ecuaţia lui d se scrie în acest caz

(12) $$ax + by = 0.$$

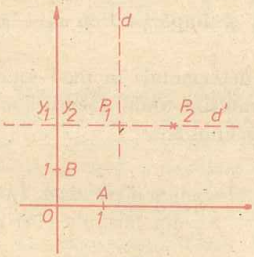


Fig. IV.11

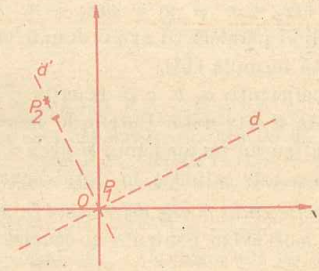


Fig. IV.12

Exerciţii

14. Să se reprezinte grafic ecuaţiile

a) $2x - 3y = 1$; b) $2x = 3$; c) $5y - 4 = 0$;

d) $3x - y = 0$.

15. Să se determine a şi b astfel ca punctele P_1 (2, 3) şi P_2 (1, -5) să fie situate pe dreapta de ecuaţie $3x - ay - b = 0$.

16. Fie P_1 punctul de abscisă 5 al dreptei d de ecuaţie $2x - 3y = 7$. Să se determine ecuaţia dreptei d' perpendiculară pe d în P_1.

Soluţie. Din $P_1 \in d$, rezultă $2 \cdot 5 - 3y = 7$, deci $y = 1$ şi $P_1(5, 1)$. Pentru a scrie ecuaţia dreptei $d' \perp d$ mai avem nevoie de un punct P_2 al dreptei d diferit de P_1. Din ecuaţia dreptei d pentru $x=8$, de exemplu, se obţine $y=3$ şi $P_2(8, 3)$. Ecuaţia dreptei d', conform formulei (8) este $3x + 2y - 17 = 0$.

17. Fie $x - 2y = 5$ ecuaţia dreptei P_1P_2, unde $P_1(2, y_1)$ şi $P_2(x_2, 3)$. Să se scrie ecuaţia dreptei perpendiculare pe dreapta P_1P_2 în P_1.

§ 3. Coeficientul unghiular al dreptei

Teorema 1. Ecuaţia unei drepte d neparalelă cu axa ordonatelor se poate scrie sub forma

$$y = mx + n. \tag{13}$$

Demonstraţie. Ecuaţia dreptei d este o ecuaţie liniară în x şi y de forma (7). Deoarece d nu este paralelă cu axa ordonatelor, $b \neq 0$. Aşadar ecuaţia (7) este echivalentă cu $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$. Punînd $m = -\frac{a}{b}$ şi $n = -\frac{c}{b}$, ecuaţia obţinută are forma (13).

Teorema 2. Dacă d este graficul ecuaţiei $y = mx + n$, iar $P_1(x_1, y_1)$ şi $P_2(x_2, y_2)$ sînt două puncte distincte pe d, atunci

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{14}$$

Demonstraţie. Într-adevăr, deoarece P_1 şi P_2 sînt puncte pe d, avem $y_2 = mx_2 + n$ şi $y_1 = mx_1 + n$. Aşadar $y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$. Dreapta d nefiind paralelă cu axa ordonatelor, $x_2 \neq x_1$ şi împărţind cu $x_2 - x_1 \neq 0$, rezultă formula (14).

Coeficienţii a, b, c în ecuaţia (7) nu sînt determinaţi în mod unic, cînd dreapta d este dată. Putem, de exemplu, să înmulţim ambii membri ai ecuaţiei (4) cu un factor nenul şi atunci a, b, c se schimbă.

Alta este situaţia în cazul ecuaţiei (13).

Coeficientul m este determinat în mod unic cînd dreapta d este dată. Într-adevăr, dacă avem pentru d şi ecuaţia $y = m'x + n'$, din formula (14) rezultă

$$m' = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m.$$

Numărul m se numeşte *panta* sau *coeficientul unghiular al dreptei d.*

Observaţie. O dreaptă paralelă cu axa ordonatelor nu are coeficient unghiular, iar dreptele paralele cu axa absciselor au coeficientul unghiular egal cu zero.

Teorema 3. Fie d şi d' drepte neparalele cu axele de coordonate, de coeficienţi unghiulari m, respectiv, m'. Dreptele d şi d' sînt perpendiculare dacă şi numai dacă

$$m' = -\frac{1}{m}. \tag{15}$$

Demonstraţie. Dacă $P_0(x_0, y_0) \in d \cap d'$, $P_1(x_1, y_1) \in d$ şi $P_2(x_2, y_2) \in d'$ sînt puncte distincte, atunci $x_1 \neq x_0$, $x_2 \neq x_0$ şi conform teoremei 3, § 1, $d \perp d'$ dacă şi numai dacă

$$1 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \cdot \frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} = 0.$$

Ţinînd seama de (12), această condiţie devine $1 + mm' = 0$, adică $m' = \frac{1}{m}$.

Intersecția a două drepte. Fie dreptele d și d' de ecuații

$d)\ y = mx + n,$

$d')\ y = m'x + n'.$

Punctul lor de intersecție $P(x_0, y_0)$, dacă există, satisface ambele ecuații, deci se obține prin rezolvarea acestui sistem de ecuații. Avem

$$(m - m')x_0 + n - n' = 0. \tag{16}$$

1) Dacă $m \neq m'$, obținem

$$x_0 = -\frac{n - n'}{m - m'},\ y_0 = mx_0 + n$$

și cele două drepte sînt secante.

2) Dacă $m = m'$, $n \neq n'$, ecuația (16) devine $0 \cdot x = n' - n$, care nu are soluție. În acest caz $d \parallel d'$.

3) Dacă $m = m'$, $n = n'$, ecuația (16) devine $0 \cdot x = 0$, care este verificată de orice $x \in \mathbf{R}$. Evident $d = d'$.

Exerciții

18. Să se scrie ecuația dreptei determinată de punctele $P_1(1, -1)$ și $P_2(-3, -3)$.

Soluție. Deoarece P_1P_2 nu este paralelă cu axa ordonatelor are ecuația de forma $y = mx + n$ (teorema 1). Din $P_1 \in P_1P_2$ și $P_2 \in P_1P_2$, rezultă $-1 = m \cdot 1 + n$ și $-3 = m \cdot (-3) + n$. Rezolvînd sistemul format cu aceste două ecuații, se obține $m = \frac{1}{2}$ și $n = -\frac{3}{2}$, deci ecuația dreptei P_1P_2 este $x - 2y - 3 = 0$.

19. Să se scrie ecuația dreptei care conține punctul $M(1, -5)$ și care este paralelă cu dreapta de ecuație $5x + 2y - 1 = 0$.

20. Să se arate că punctele $M(1, 2)$, $N(-5, 7)$ și $P(-1, -2)$ nu sînt coliniare.

Indicație. Se scrie ecuația dreptei determinată de două din aceste puncte și se arată că nu este verificată de coordonatele celui de-al treilea punct.

21. Sînt coliniare punctele $M(1, 1)$, $N(-5, 5)$, $P\left(0, \frac{5}{3}\right)$?

22. Să se scrie ecuația dreptei care conține punctul $M(-1, 3)$ și care este perpendiculară pe dreapta $3x - 5y = 0$.

23. Să se determine numerele reale a și b, astfel ca dreapta $ax + by - 1 = 0$ să conțină punctul $P(2, 1)$ și să fie perpendiculară pe dreapta $ax + y - 5 = 0$.

24. Fie punctele $P_1(2, a + 1)$, $P_2(0, 1 - a)$, $P_3(1 - 2a, 3)$ și $P_4(1 + 2a, -1)$. Să se arate că dreptele P_1P_2 și P_3P_4 sînt perpendiculare, oricare ar fi numărul real a.

25. Să se arate că punctele $P_1(a, 2a + 3)$, $P_2(1 + a, 2a + 5)$, $P_3(b, 2b - 5)$ și $P_4(1 + b, 2b - 3)$ sînt vîrfurile unui paralelogram.

Indicație. Se arată, de exemplu, că segmentele $|P_1P_2|$ și $|P_3P_4|$ sînt paralele și au aceeași lungime.

26. Să se arate că ecuația unei drepte care conține punctul $P_1(x_1, y_1)$ și care are coeficientul unghiular m este

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Soluție. Se scrie că $P_1(x_1, y_1)$ verifică ecuația (13), deci $y_1 = mx_1 + n$. De aici se exprimă n și se înlocuiește în (13).

27. Fie $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $x_1 \neq x_2$. Să se arate că ecuația lui P_1P_2 este

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

28. Fie $P_1(a, 0)$, $a \neq 0$ și $P_2(0, b)$, $b \neq 0$. Să se arate că ecuația dreptei P_1P_2 este $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$. (Se numește ecuația dreptei dată prin tăieturi. De ce?)

§ 4. Funcțiile sin și cos definite pe intervalul $[0, \pi]$

În acest paragraf vom introduce funcțiile sin și cos definite pe $[0,\pi]$. Funcțiile sin și cos, definite pe $\mathbf{R}$, vor fi studiate în capitolul următor. Studiul lor va face obiectul trigonometriei.

Termenul trigonometrie provine de la cuvintele grecești trigon „triunghi" și metron „măsură". Pentru a stabili poziția corpurilor cerești grecii antici au descoperit relații între măsurile laturilor și măsurile unghiurilor triunghiurilor sferice.

Definiții. Să considerăm în plan un sistem de coordonate, reperul ales fiind (O, A, B). Notăm cu S mulțimea punctelor din plan de ordonată $y \geqslant 0$. Punctele $A(1,0)$, $B(0,1)$, $A'(-1, 0)$ se găsesc pe cercul $C = \mathcal{C}(0, 1)$ de centru O și rază 1 numit *cerc unitate*. Notăm cu s semicercul $S \cap C$.

Fie numărul $t \in [0, \pi]$. Pe semicercul s există un singur punct M (fig. IV. 13), astfel ca $\mu(\widehat{AOM}) = t$ (rezultă din axioma de construcție a unghiurilor). Am definit astfel o funcție care asociază fiecărui număr real $t \in [0, \pi]$ un punct al semicercului s. Numărul 0 este asociat cu punctul A, numărul $\frac{\pi}{2}$ cu punctul B, numărul π cu punctul A' și așa mai departe. Dacă (x, y) sînt coordonatele punctului M, prin această funcție, fiecare număr real $t \in [0, \pi]$ este asociat cu o pereche ordonată de numere reale (x, y).

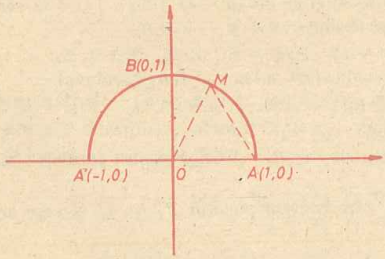


Fig. IV.13

Este util să se considere separat coordonatele x și y ale punctului M și să definim două funcții, una numită „cosinus" și alta numită „sinus", notate prescurtat prin cos și sin. Aceste două funcții sînt cos: $[0, \pi] \to \mathbf{R}$, cos $t = x$ și sin: $[0, \pi] \to \mathbf{R}$, sin $t = y$, unde (x, y) sînt coordonatele punctului $M \in s$, asociat cu numărul real $t \in [0, \pi]$.

În definiția funcțiilor cos și sin intervine cercul unitate ales, dar valorile cos t și sin t nu depind de această alegere (căci considerînd două cercuri unitate, triunghiurile respective OMM', unde M' este proiecția lui M pe OA, figura IV.13, sînt congruente). Așadar funcțiile cos și sin sînt bine definite pe intervalul real $[0, \pi]$.

Cîteva *valori particulare ale* acestor funcții sînt:

$$\cos 0 = 1, \ \cos \frac{\pi}{2} = 0, \ \cos \pi = -1;$$

$$\sin 0 = 0, \ \sin \frac{\pi}{2} = 1, \ \sin \pi = 0.$$

Funcția cos se anulează numai în $\frac{\pi}{2}$ deoarece pe s nu există, în afară de B, alte puncte care au abscisa 0. De asemenea, funcția sin se anulează numai în 0 și π.

Cu ajutorul funcțiilor cos și sin se definesc funcțiile numite „tangentă" și „cotangentă", notate prescurtat cu tg și ctg. Aceste funcții sînt:

$$\text{tg}: \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \to \mathbf{R}, \ \text{tg}\, t = \frac{\sin t}{\cos t}$$

și

$$\text{ctg}: (0, \pi) \to \mathbf{R}, \ \text{ctg}\, t = \frac{\cos t}{\sin t}.$$

Avem: $\text{tg}\, 0 = \frac{0}{1} = 0$, $\text{tg}\, \frac{\pi}{2}$ — nu există, $\text{tg}\, \pi = \frac{0}{-1} = 0$ și $\text{ctg}\, 0$ — nu există, $\text{ctg}\, \frac{\pi}{2} = \frac{0}{1} = 0$, $\text{ctg}\, \pi$ — nu există.

De menționat este faptul că semicercul s este mulțimea punctelor $M(\cos t, \sin t)$, $t \in [0, \pi]$, unde $t = \mu(\widehat{AOM})$ = lungimea arcului mic $\widehat{AM}$.

Deoarece abscisele acestor puncte sînt cuprinse în intervalul $[-1, 1]$, iar ordonatele în intervalul $[0, 1]$, putem scrie

$$-1 \leqslant \cos t \leqslant 1 \text{ și } 0 \leqslant \sin t \leqslant 1,$$

oricare ar fi $t \in [0, \pi]$.

După cadranul în care este situat punctul M se poate stabili semnul funcției cos: dacă $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos t \geqslant 0$, iar dacă $t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $\cos t < 0$. Se constată ușor că funcțiile tg și ctg au același semn cu funcția cos, deoarece funcția sin are numai valori numerice pozitive.

Funcția $\cos: [0, \pi] \to [-1, 1]$ este bijectivă. Într-adevăr, numere distincte din $[0, \pi]$ sînt asociate cu puncte de pe s de abscise distincte, deci cos este injectivă. Funcția este și surjectivă pentru că, oricare ar fi $x \in [-1, 1]$, există $t \in [0, \pi]$, astfel ca $x = \cos t$. Într-adevăr, oricare ar fi $x \in [-1, 1]$, pe axa OA există un punct de abscisă x și, ducînd prin acest punct o paralelă la axa ordonatelor, aceasta intersectează semicercul s în M, abscisa acestui punct fiind $x = \cos t$ unde $t = \mu(\widehat{AOM})$.

Vom nota $(\cos t)^2$ cu $\cos^2 t$, $(\sin x)^3$ cu $\sin^3 x$ etc. Deoarece $\| OM \| = 1$, unde $M(\cos t, \sin t)$, rezultă

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1, \quad \forall t \in [0, \pi]. \tag{17}$$

Dacă $\widehat{hk} \in \alpha^\circ = \beta^{rad}$, fără să se producă confuzii se fac convenţiile de notaţii:

$$\sin \beta = \sin \alpha^\circ = \sin \widehat{hk}, \quad \cos \beta = \cos \alpha^\circ = \cos \widehat{hk} \text{ etc.}$$

De exemplu: $\sin \frac{\pi}{2} = \sin 90^\circ = \sin \left(\frac{\pi}{4}\right)^{rad} = 1,$

$$\cos \frac{\pi}{4} = \cos 45^\circ = \cos \left(\frac{\pi}{4}\right)^{rad}$$

Folosind anumite proprietăţi geometrice, se pot calcula unele valori ale funcţiilor introduse.

Exemplu. Fie M punctul de intersecţie al semicercului s cu dreapta de ecuaţie $3x + 4y = 0$. Să se calculeze $\sin a$, $\cos a$, $\operatorname{tg} a$ şi $\operatorname{ctg} a$, unde $a = \mu(\widehat{AOM})$.

Soluţie. Punctul M are coordonatele $(\cos a, \sin a)$. Deoarece coordonatele lui M verifică ecuaţia $3x + 4y = 0$, numerele $\cos a$ şi $\sin a$ se obţin rezolvînd sistemul

$$\begin{cases} \cos^2 a + \sin^2 a = 1 \\ 3 \cos a + 4 \sin a = 0 \end{cases}$$

Ţinînd seama de faptul că $\sin a \geqslant 0$, rezultă $\cos a = -\frac{4}{5}$, $\sin a = \frac{3}{5}$, $\operatorname{tg} a = -\frac{3}{4}$, $\operatorname{ctg} a = -\frac{4}{3}$.

Exerciţii

29. Notăm cu M punctul de intersecţie al dreptei de ecuaţie $x - 3y = 0$ cu semicercul s. Dacă $t = \mu(\widehat{AOM})$, să se calculeze numerele $\cos t$, $\sin t$, $\operatorname{tg} t$, $\operatorname{ctg} t$.

30. Dacă $\cos a = -\frac{3}{5}$, să se calculeze $\sin a$, $\operatorname{tg} a$, $\operatorname{ctg} a$.

31. Dacă $\operatorname{tg} a = -\frac{5}{12}$, să se calculeze $\sin a$, $\cos a$, $\operatorname{ctg} a$.

Unele valori ale funcţiilor sin, cos, tg, ctg. Valorile acestor funcţii sînt trecute în tabele speciale, întîlnite în clasele anterioare. Unele valori pot fi determinate fără a utiliza aceste tabele.

1. $t = \frac{\pi}{4}$. Punctul $M\left(\cos \frac{\pi}{4}, \sin \frac{\pi}{4}\right)$ este situat atît pe semicercul s, cît şi pe bisectoarea unghiului $\widehat{AOB}$ (fig. IV.14). Deci $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4}$. Dacă

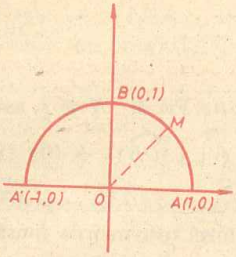


Fig. IV.14

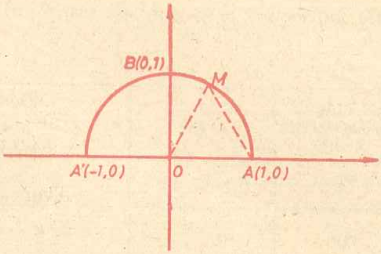


Fig. IV.15

$\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = x$, din $\|OM\| = 1$, rezultă $x^2 + x^2 = 1$ sau $x^2 = \frac{1}{2}$. Deoarece $x > 0$ (punctul M este în cadranul întîi), se obține $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ și $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = 1$.

2. $t = \frac{\pi}{3}$. Fie $M\left(\cos\frac{\pi}{3}, \sin\frac{\pi}{3}\right)$. Triunghiul AOM este echilateral (fig. IV.15). Înseamnă că $\|AM\| = \|OA\| = 1$. Conform formulei (2), din $\|AM\| = 1$ și $A(1, 0)$, rezultă $\left(\cos\frac{\pi}{3} - 1\right)^2 + \left(\sin\frac{\pi}{3} - 0\right)^2 = 1$ sau $\cos^2\frac{\pi}{3} + \sin^2\frac{\pi}{3} - 2\cos\frac{\pi}{3} + 1 = 1$. Ținînd seama de egalitatea (17), se obține $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

3. $t = \frac{\pi}{6}$. Dacă $M\left(\cos\frac{\pi}{6}, \sin\frac{\pi}{6}\right)$, triunghiul BOM (fig. IV.16) este echilateral, deci $\|MB\| = \|OB\| = 1$.

În mod analog se obține

$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}.$$

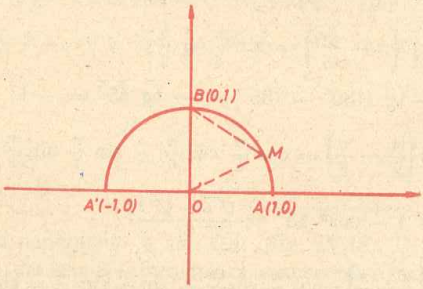


Fig. IV.16

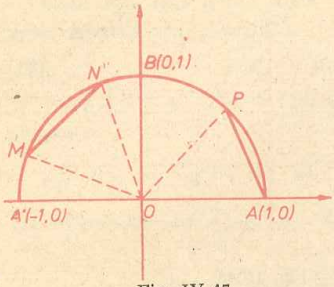


Fig. IV.17

Teoremă. **Dacă** $a, b \in [0, \pi]$, $a \geqslant b$, **atunci**

(16) $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.

Demonstrație. Fie $M, N \in s$, astfel ca $\mu(\widehat{AOM}) = a$ și $\mu(\widehat{AON}) = b$. (fig. IV. 17). Avem $\mu(\widehat{MON}) = \mu(\widehat{AOM}) - \mu(\widehat{AON}) = a - b$. Conform teoremei de construcție a unghiurilor, pe semicercul s există punctul P, astfel ca

$$\widehat{AOP} \equiv \widehat{MON}, \text{ deci } \mu(\widehat{AOP}) = a - b.$$

Triunghiurile isoscele MON și AOP fiind congruente, rezultă $\| MN \| = \| AP \|$. Coordonatele punctelor M, N, P sînt, respectiv, $(\cos a, \sin a)$, $(\cos b, \sin b)$, $(\cos(a-b), \sin(a-b))$, deci $\| MN \|^2 = (\cos a - \cos b)^2 + (\sin a - \sin b)^2 = 2 - 2(\cos a \cos b + \sin a \sin b)$ și $\| AP \|^2 = [1 - \cos(a-b)]^2 + [0 - \sin(a-b)]^2 = 2 - 2\cos(a-b)$. Egalînd cele două rezultate, se obține egalitatea (18).

Consecință. **Dacă** $x \in [0, \pi]$, **atunci** $\cos(\pi - x) = -\cos x$, $\sin(\pi - x) = \sin x$.

Demonstrație. Avem succesiv $\cos(\pi - x) = \cos \pi \cos x + \sin \pi \sin x = (-1) \cos x + 0 \cdot \sin x = -\cos x$ și $\sin(\pi - x) = \sqrt{1 - \cos^2(\pi - x)} = \sqrt{1 - (-\cos x)^2} = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{\sin^2 x} = |\sin x| = \sin x$.

În plus, dacă $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $\operatorname{tg}(\pi - x) = -\operatorname{tg} x$ și dacă $x \in (0, \pi)$, $\operatorname{ctg}(\pi - x) = -\operatorname{ctg} x$.

Utilizînd consecința, se pot calcula mai repede unele valori ale funcțiilor cos, sin, tg și ctg. De exemplu:

a) $\cos \frac{2\pi}{3} = -\cos\left(\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$;

b) $\sin \frac{5\pi}{6} = \sin\left(\pi - \frac{5\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$;

c) $\operatorname{tg} 135° = -\operatorname{tg}(180° - 135°) = -\operatorname{tg} 45° = -1$;

d) $\cos \frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$;

e) $\sin 15° = \sqrt{1 - \cos^2 15°} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$;

f) $\cos \frac{5\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \cos \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{12} = \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

Dăm mai jos un tabel cu valorile funcţiilor sin, cos, tg şi ctg pentru cîteva numere reale din intervalul $[0, \pi]$.

Numărul a	sin a	cos a	tg a	ctg a	Unghiul corespunzător lui a
0	0	1	0	nu există	$0°$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$30°$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$45°$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$60°$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	nu există	0	$90°$
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$120°$
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1	$135°$
$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	$150°$
π	0	-1	0	nu există	$180°$

Exerciţii

32. Să se calculeze: a) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$; b) $\sin\frac{7\pi}{12}$; c) $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{12}$; d) $\operatorname{ctg}\frac{11\pi}{12}$.

33. Dacă $\cos a = 0{,}8$, $\cos b = \frac{1}{3}$, să se calculeze $\cos(a-b)$.

34. Dacă $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, să se demonstreze că: $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$. În plus, dacă $x \neq 0$ şi $x \neq \frac{\pi}{2}$, să se arate că $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{ctg} x$ şi $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{tg} x$.

§ 5. Unghiul unei drepte cu axa absciselor

Fie d o dreaptă neparalelă cu axa OA (fig. IV.18). O paralelă prin originea O a axelor la dreapta d intersectează semicercul s în punctul M. Dacă $d \parallel OA$, atunci $M = A$.

Prin definiție, *unghiul dreptei d cu axa OA* este $\widehat{AOM}$. Notăm acest unghi cu $(\widehat{d,OA})$.

Teoremă. Dacă o dreaptă d nu este paralelă cu axa ordonatelor, coeficientul său unghiular este tg a, unde $a = \mu(\widehat{d, OA})$.

Demonstrație. Ecuația dreptei d poate fi scrisă sub forma $y = mx + n$. Dreapta OM (fig. IV. 18) are același coeficient unghiular m, deoarece $OM \parallel d$. Punctul M are coordonatele (cos a, sin a). Conform formulei (14), § 3, coeficientul unghiular al dreptei OM este

$$\frac{\sin a - 0}{\cos a - 0} = \operatorname{tg} a.$$

Deci $m = \operatorname{tg} a$, și teorema este demonstrată.

Se constată că, dacă $m > 0$, unghiul $(\widehat{d, OA})$ este ascuțit, iar dacă $m < 0$, acest unghi este obtuz.

Consecință. Fie triunghiul ABC dreptunghic în A. Dacă $\| BC \| = a$, $\| AC \| = b$, $\| AB \| = c$, $\mu(\widehat{ABC}) = B$, atunci

$$\sin B = \frac{b}{a}, \quad \cos B = \frac{c}{a}, \quad \operatorname{tg} B = \frac{b}{c}, \quad \operatorname{ctg} B = \frac{c}{b}.$$

Demonstrație. Alegem un sistem de axe cu originea în vîrful B al triunghiului (fig. IV. 19), cu axele paralele cu catetele triunghiului, în așa fel încît vîrful C să fie în cadranul I. Cu notațiile din enunț, punctul C are coordonatele (c, b). Conform teoremei, coeficientul unghiular al dreptei BC este $\operatorname{tg} B = \frac{b}{c}$ și egalitatea a treia este demonstrată. Ultima egalitate rezultă imediat din $\operatorname{ctg} B = \frac{1}{\operatorname{tg} B}$. Pentru demonstrarea primei egalități pornim de la $c = b \operatorname{ctg} B$, de unde rezultă $c^2 = b^2 \operatorname{ctg}^2 B$. Folosind definiția funcției ctg, ajungem la $(b^2 + c^2) \sin^2 B = b^2$. Dar $b^2 + c^2 = a^2$, deci $a^2 \sin^2 B = b^2$. Din această egalitate rezultă prima formulă. Cea de-a doua egalitate rezultă din $a^2 \sin^2 B = b^2$ și din $\cos^2 B + \sin^2 B = 1$, ținînd seama de egalitatea $a^2 - b^2 = c^2$.

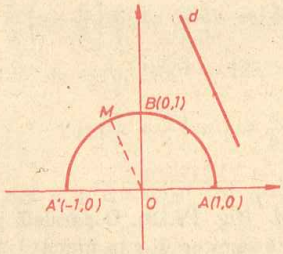


Fig. IV.18

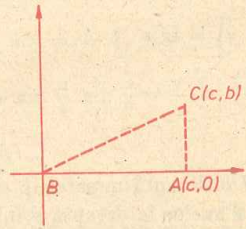


Fig. IV.19

Consecința se poate formula într-un enunț ușor de reținut: „Într-un triunghi dreptunghic lungimea unei catete este egală cu produsul dintre lungimea ipotenuzei și sinusul unghiului opus sau cu produsul dintre lungimea ipotenuzei și cosinusul unghiului alăturat".

Aplicații. **1.** Să se determine unghiul dreptei d de ecuație $3x + y\sqrt{3} + 2 = 0$ cu axa absciselor.

Soluție. Din $y = -\sqrt{3}\,x - \frac{2\sqrt{3}}{3}$, rezultă $m = -\sqrt{3}$. Dacă $a = \mu\,(\widehat{d,OA})$, din $\operatorname{tg} a = -\sqrt{3}$, rezultă $\cos^2 a = \frac{1}{4}$. Deci $\cos a = -\frac{1}{2}$. Funcția cos fiind bijectivă, din tabel găsim $a = \frac{2\pi}{3}$. Deci $(\widehat{d, OA}) \in 120°$.

2. Să se determine unghiurile triunghiului cu laturile de lungimi $8, 4, 4\sqrt{3}$.

Soluție. Deoarece $(4\sqrt{3})^2 + 4^2 = 8^2$, triunghiul este dreptunghic (fig. IV. 19). $\cos B = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, deci $\mu(\hat{B}) = \frac{\pi}{3}$ sau $\hat{B} \in 60°$. Apoi $\mu(\hat{C}) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$ sau $\hat{C} \in 30°$.

Exerciții

35. Să se determine unghiul următoarelor drepte cu axa absciselor:
a) $y = 0$; b) $x = 0$; c) $y = x\sqrt{3} + 1$; d) $y + x = 1$.

36. Se dă punctul $P\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{a}{2}\right)$, $a > 0$.
Să se afle $m(\widehat{AOP})$ și $\mu(\widehat{AOP})$.

37. Dreptele de ecuații $x\sqrt{7} + y\sqrt{2} = 0$ și $3x - 4y = 0$ intersectează semicercul s, respectiv, în punctele M și N. Să se calculeze $\cos t$, unde $t = \mu\,(\widehat{MON})$.

Capitolul

V

Funcţii trigonometrice

Acele indicatoare ale ceasului, în mişcarea lor continuă, indicînd la nesfîrşit repetarea orelor, constituie un model simplu pentru toate fenomenele care se repetă periodic. În acest capitol se vor studia funcţii ale căror valori se repetă în mod periodic. În special vor fi studiate funcţiile trigonometrice, o categorie de funcţii definite prin intermediul unui cerc de rază 1. Aceste funcţii sînt folosite ca modele matematice a mai multor feluri de situaţii practice. Vom vedea apoi cum se deduc formule referitoare la diferite valori ale acestor funcţii şi cum formulele stabilite pentru unele din ele pot fi folosite pentru a determina formule pentru alte funcţii.

§ 1. Funcţia de acoperire universală a cercului unitate

Lema 1. Orice număr real t poate fi scris în mod unic sub forma

(1) $$t = t^* + 2k\pi, \text{ unde } t^* \in [0, 2\pi),\ k \in \mathbf{Z}.$$

Demonstraţie. Fie k partea întreagă a numărului $\frac{t}{2\pi}$, adică

$$k \leqslant \frac{t}{2\pi} < k + 1.$$

Atunci $2k\pi \leqslant t < 2k\pi + 2\pi$, din care se obţine imediat că $t^* = t - 2k\pi \in [0, 2\pi)$. Am determinat în acest fel numerele k şi t^* verificînd condiţiile (1).

Pentru a arăta unicitatea, să presupunem că mai avem şi $t = t_1 + 2k_1\pi$, $t_1 \in [0, 2\pi)$, $k_1 \in \mathbf{Z}$. Rezultă că $t^* - t_1 = 2(k_1 - k)\pi$. Deoarece $t^* - t_1 \leqslant t^* < 2\pi$ şi $t^* - t_1 \geqslant -t_1 > -2\pi$, rezultă $-2\pi < t^* - t_1 < 2\pi$ sau $-2\pi < (k_1 - k)2\pi < 2\pi$. Deci $-1 < k_1 - k < 1$ şi în mod necesar $k_1 - k = 0$. Aşadar $t_1 = t^*$ şi t^* este unic.

Exemple. 1. Dacă $t = -\frac{112\pi}{17}$, atunci $\frac{t}{2\pi} = -\frac{56}{17}$. Din $-4 < \frac{t}{2\pi} < -3$, rezultă $0 < \frac{t}{2\pi} + 4 > 1$. Deci $\frac{t}{2\pi} + 4 = 4 - \frac{56}{17} = \frac{12}{17}$. Aşadar $t = \frac{24\pi}{17} + 2(-4)\pi$, unde $t^* = \frac{24\pi}{17}$, $k = -4$.

2. Dacă $t = 31{,}45$, atunci $5 < \frac{t}{2\pi} < 6$. Deci $t = (31{,}45 - 10\pi) + 2 \cdot 5 \cdot \pi$, unde $t^* = 31{,}45 - 10\pi$, $k = 5$.

3. Dacă $t = -5$, atunci $-1 < \frac{t}{2\pi} < 0$. În acest caz $k = -1$ şi $t = (2\pi - 5) + 2(-1)\pi$. Numărul t^* este $2\pi - 5$.

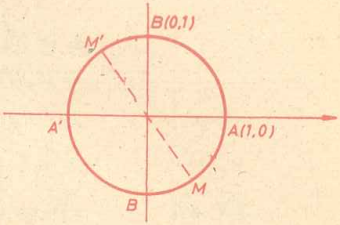


Fig. V.1

În capitolul IV, § 4 a fost prezentată o funcţie care asociază fiecărui număr $t \in [0, \pi]$ un punct unic $M \in s$, astfel încît lungimea arcului mic $\widehat{AM}$ să fie egală cu t.

Lema care urmează ne indică modul în care putem asocia unui număr $t \in (\pi, 2\pi)$, un punct $M \in C - s$.

Lema 2. Dacă $t \in (\pi, 2\pi)$ şi $x = -\cos(t - \pi)$, $y = -\sin(t - \pi)$, atunci punctul M de coordonate (x, y) este situat pe $C - s$, iar arcul mare $\widehat{AM}$ are lungimea t.

Demonstraţie. Deoarece $x^2 + y^2 = \cos^2(t - \pi) + \sin^2(t - \pi) = 1$ (coordonatele lui M verifică ecuaţia cercului unitate C) punctul M este situat pe C. Din $t \in (\pi, 2\pi)$, rezultă că $t - \pi \in (0, \pi)$. Fie $M'(x', y')$, unde $x' = \cos(t - \pi)$ şi $y' = \sin(t - \pi)$. Înseamnă că $M' \in s$, conform definiţiei funcţiilor cos şi sin. Avînd abscisele, respectiv, ordonatele numere opuse, punctele M şi M' sînt simetrice faţă de originea axelor de coordonate (fig. V.1). Deci M şi M' sînt diametral opuse în C. Din $M' \in s$ rezultă $M \in C - s$.

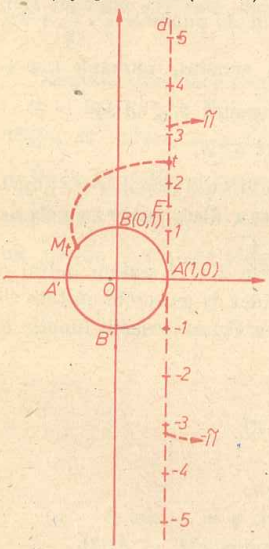


Fig. V.2

Arcul mic $\widehat{AM'}$ are lungimea $t - \pi$ (conform definiţiei funcţiilor cos şi sin), iar arcul $\widehat{M'A'M}$ are lungimea π, deci arcul mare $\widehat{AM}$ are lungimea $(t - \pi) + \pi = t$ şi lema este demonstrată.

Conform acestei leme, numărului $\frac{4\pi}{3}$ i se asociază pe $C - s$ punctul de coordonate $\left(-\cos\frac{\pi}{3}, -\sin\frac{\pi}{3}\right)$ sau $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Fie d tangenta în A la cercul unitate C (fig. V.2) şi $E \in d$, astfel ca B şi E să fie în acelaşi semiplan faţă de OA. Considerăm un sistem de coordonate pentru d, astfel încît A să aibă

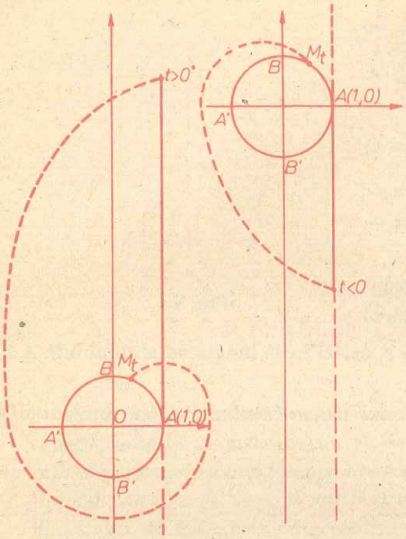


Fig. V.3

coordonata 0, iar $x_E > 0$. Pentru a simplifica notațiile, un punct al lui d va fi notat cu coordonata sa. Dreapta d devine o axă a numerelor reale.

Pentru a pregăti definiția unei funcții importante facem următoarele considerații intuitive. Dacă ne imaginăm că dreapta d este suficient de flexibilă, putem accepta procesul de înfășurare a ambelor ei jumătăți în jurul cercului. Semiaxa numerelor reale pozitive se înfășoară în sensul invers mișcării acelor de ceasornic, iar semiaxa numerelor reale negative în sensul mișcării acelor de ceasornic.

Prin acest procedeu de înfășurare, fiecare punct de pe axa d ajunge într-un punct determinat pe C, deci fiecărui număr real t îi corespunde un punct $M_t \in C$. Am definit astfel o funcție $f : d \to C$, care asociază lui $t \in \mathbf{R}$ punctul $f(t) = M_t$ de pe cerc. Știind că lungimea lui C este 2π, punctele π, 3π, 5π,... ale dreptei d și, de asemenea, punctele $-\pi$, -3π, -5π,... ajung în A'; punctele $0, 2\pi, 4\pi$,... și -2π, -4π,... ajung în A, punctele $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} + 2\pi$, $\frac{\pi}{2} - 2\pi$, $\frac{\pi}{2} + 4\pi$, $\frac{\pi}{2} - 4\pi$,... ajung în B etc. În general, punctele t, $t + 2\pi$, $t - 2\pi$, $t + 4\pi$, $t - 4\pi$,... ajung în același punct M_t, adică

$$f(t + 2k\pi) = f(t), \quad \forall t \in \mathbf{R}, \quad \forall k \in \mathbf{Z}. \tag{2}$$

Se observă că un segment cu originea în A și cu extremitatea într-un punct oarecare t (fig. V. 3) prin înfășurare, într-un sens sau altul, poate acoperi de mai multe ori cercul, punctul t ajungînd în $M_t \in C$.

Folosind definiția funcțiilor cos și sin și lemele 2 și 1 putem defini o funcție F, care asociază oricărui număr real t un punct de pe cercul unitate C, fără a folosi procedeul intuitiv al înfășurării. Vom arăta că această funcție F va avea proprietățile funcției f.

Definim funcția

$$F : \mathbf{R} \to C, \; F(t) = M(x, y)$$

prin următoarele condiții:

1° Dacă $t \in [0, \pi]$, atunci $x = \cos t$, $y = \sin t$.

2° Dacă $t \in (\pi, 2\pi)$, atunci $x = -\cos(t - \pi)$, $y = -\sin(t - \pi)$

3° Dacă $t = t^* + 2k\pi$, $t^* \in [0, 2\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$, atunci $F(t) = F(t^*)$.

Funcţia F poartă numele de funcţia de acoperire universală a cercului unitate.

Avem: $F(0) = M(\cos 0, \sin 0) = M(1,0) = A$ (fig. V.4), $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = M\left(\cos\frac{\pi}{2}, \sin\frac{\pi}{2}\right) = M(0,1) = B$, $F(\pi) = M(\cos\pi, \sin\pi) = M(-1, 0) = A'$, $F\left(\frac{3\pi}{2}\right) = M\left(-\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \pi\right), -\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \pi\right)\right) = M\left(-\cos\frac{\pi}{2}, -\sin\frac{\pi}{2}\right) = M(0, -1) = B'$,

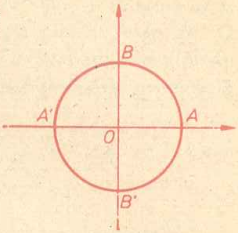


Fig. V.4

$F\left(\frac{7\pi}{3}\right) = F\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = F\left(\frac{\pi}{3}\right) = M\left(\cos\frac{\pi}{3}, \sin\frac{\pi}{3}\right) = M\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Dacă nu se fac alte precizări, conform definiţiei funcţiei F, prin $\widehat{AF(t)}$ vom înţelege arcul mic de lungime t, dacă $t \in [0, \pi]$, respectiv, arcul mare de lungime t, dacă $t \in (\pi, 2\pi)$.

Teorema 1. Avem proprietatea

$$F(t + 2k\pi) = F(t), \quad \forall t \in \mathbf{R}, \quad \forall k \in \mathbf{Z}. \tag{3}$$

Demonstraţie. Conform lemei 1, există numerele unice

$$t^* \in [0, 2\pi) \text{ şi } l \in \mathbf{Z}, \text{ astfel ca } t = t^* + 2l\pi.$$

Atunci

$$F(t + 2k\pi) = F(t^* + 2(k + l)\pi) = F(t^*) = F(t^* + 2l\pi) = F(t),$$

deci formula (3) este demonstrată.

Lema 3. Oricare ar fi $t \in \mathbf{R}$, $\| AF(t) \| = \| AF(-t) \|$.

Demonstraţie. Dacă $t = t^* + 2k\pi$, $t^* \in [0,2\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$, atunci $-t = 2\pi - t^* - 2(k + 1)\pi$. Deoarece $F(t) = F(t^*)$ şi $F(-t) = F(2\pi - t^*)$, demonstraţia se reduce la a arăta că $\| AF(t^*) \| = \| AF(2\pi - t^*) \|$.

Dacă $t^* \in [0, \pi]$, atunci $2\pi - t^* \in [\pi, 2\pi]$. Arcul $\widehat{AF(t^*)}$ (fig. V.5) are lungimea t^*, iar arcul mare $\widehat{AF(2\pi - t^*)}$ are lungimea $2\pi - t^*$, deci arcul mic $\widehat{AF(2\pi - t^*)}$ are lungimea $2\pi - (2\pi - t^*) = t^*$. Deoarece arcele mici $\widehat{AF(t^*)}$ şi $\widehat{AF(2\pi - t^*)}$ au aceeaşi lungime, coardele corespunzătoare lor sînt congruente şi teorema este demonstrată în acest caz.

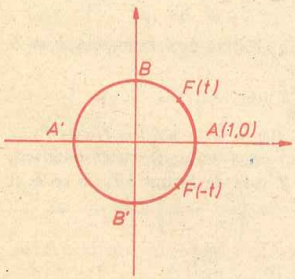


Fig. V.5

Cazul $t^* \in (\pi, 2\pi)$ se tratează în mod analog (se schimbă doar rolurile numerelor t^* şi $2\pi - t^*$).

Teorema 2. Oricare ar fi $t, u \in \mathbf{R}$, avem

$$\| F(t)\ F(u) \| = \| AF(t - u) \|. \tag{4}$$

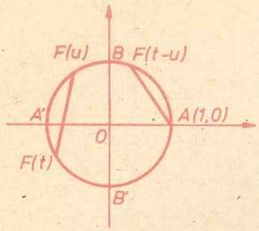


Fig. V.6

Demonstrație. Scriem numerele t și u sub forma $t = t^* + 2k\pi$, $t^* \in [0,2\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$ și $u = u^* + 2l\pi$, $u^* \in [0,2\pi)$, $l \in \mathbf{Z}$, conform lemei 1. Deoarece $F(t) = F(t^*)$, $F(u) = F(u^*)$ și $F(t - u) = F(t^* - u^*)$, demonstrația se reduce la a arăta că $\| F(t^*)\, F(u^*) \| = \| AF(t^* - u^*) \|$.

Dacă $0 \leqslant u^* \leqslant t^* < 2\pi$, rezultă imediat (fig. V.6) că arcul $\widehat{F(t^*)\, F(u^*)}$ care nu-l conține pe A are lungimea $t^* - u^*$, ca și arcul $\widehat{AF(t^* - u^*)}$. Din congruența celor două arce rezultă congruența coardelor corespunzătoare, și teorema este demonstrată.

Dacă $0 \leqslant t^* \leqslant u^* < 2\pi$, se demonstrează în mod analog că $\| F(t^*)\, F(u^*) \| = \| AF(u^* - t^*) \|$ și ținînd seama de lema 3, teorema este demonstrată în toate cazurile.

Definiție. Fie M o mulțime oarecare. O funcție $f : \mathbf{R} \to M$ se numește *periodică* dacă există $T \neq 0$, astfel încît

(5) $f(x + T) = f(x)$ pentru orice x din $\mathbf{R}$.

Numărul T se numește *perioadă* a lui f. Dacă printre perioadele strict pozitive ale lui f există un cel mai mic număr T_0, atunci T_0 se numește *perioada principală*.

Lema 4. Dacă T_0 este perioada principală a lui f, atunci perioadele lui f sînt numerele kT_0, unde $k \in \mathbf{Z}$.

Demonstrație. Avem

$$f(x) = f(x + T_0) = f(x + T_0 + T_0) = \ldots = F(x + T_0 + T_0 + \ldots + T_0).$$

Pe de altă parte, $f(x - T_0) = f(x - T_0 + T_0) = f(x)$, deci

$$f(x) = f(x - T_0) = f(x - T_0 - T_0) = \ldots = f(x - T_0 - T_0 - \ldots - T_0).$$

Așadar numerele kT_0, unde $k \in \mathbf{Z}$, sînt perioade. Rămîne de demonstrat că orice perioadă T este de forma kT_0, $k \in \mathbf{Z}$. Fie k partea întreagă a numărului $\frac{T}{T_0}$, adică

$$k \leqslant \frac{T}{T_0} < k + 1.$$

De aici $kT_0 \leqslant T < kT_0 + T_0$ sau $0 \leqslant T - kT_0 < T_0$. Există deci numerele $k \in \mathbf{Z}$ și $T^* \in [0, T_0)$, astfel ca

(6) $$T = T^* + kT_0.$$

Numărul T^* este și el perioadă, deoarece $f(x + T^*) = f(x + T - kT_0) = f(x + T) = f(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Cum $0 \leqslant T^* < T_0$ și T_0 este cea mai mică perioadă strict pozitivă, rezultă $T^* = 0$. Deci, conform cu (6), orice perioadă T este de forma kT_0, $k \in \mathbf{Z}$, și lema este demonstrată.

Teorema 3. Funcția F de acoperire universală a cercului unitate este periodică de perioadă principală 2π.

Demonstrație. Formula (3) arată că F admite ca perioade numerele $2k\pi$, unde $k \in \mathbf{Z}$. Dintre acestea, cel mai mic număr strict pozitiv este 2π. O perioadă $T \in (0,2\pi)$ nu poate exista, căci $F(0)$ și $F(T)$ fiind puncte diferite pe C, pentru $x = 0$, $F(x + T) \neq F(x)$. Rezultă că 2π este perioada principală a lui F.

Exerciții

1. Să se determine coordonatele punctelor:

$$F(5\pi),\ F(-7\pi),\ F\left(\frac{13\pi}{4}\right),\ F\left(-\frac{15\pi}{4}\right),\ F(103\pi),\ F\left(\frac{103\pi}{2}\right),\ F\left(\frac{103\pi}{4}\right).$$

2. Punctele P_1, P_3 și P_2, P_4 sînt respectiv pe bisectoarele unghiurilor axelor de coordonate și pe cercul unitate C (fig. V.7). Să se afle toate numerele reale t pentru care:

a) $F(t) = P_1$, b) $F(t) = P_2$, c) $F(t) = P_3$, d) $F(t) = P_4$.

3. Să se arate că $F(t)$ și $F(-t)$ sînt simetrice față de dreapta OA.

4. Să se arate că $F(t)$ și $F(\pi - t)$ sînt simetrice față de OB.

5. Să se scrie ecuația dreptei determinată de punctele $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ și $F\left(\frac{5\pi}{3}\right)$.

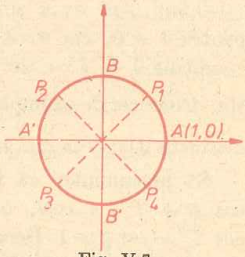


Fig. V.7

§ 2. Funcțiile trigonometrice sin și cos

Prin funcția F de acoperire universală fiecărui număr real t i se asociază un punct unic $F(t) = M(x, y)$ de pe cercul unitate C. Coordonatele x și y sînt și ele unic determinate, dacă t este dat. Vom nota

$$x = \cos t, \quad y = \sin t,$$

definind astfel două funcții

$$\cos : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \text{ și } \sin : \mathbf{R} \to \mathbf{R},$$

numite *funcții trigonometrice*, care prelungesc funcțiile cos și sin, introduse în Cap. IV, §4, de la $[0,\pi]$ la $\mathbf{R}$.

Avem ca exemple de valori numerice ale acestor funcții:

$$\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos\frac{5\pi}{4} = -\cos\left(\frac{5\pi}{4} - \pi\right) = -\cos\frac{\pi}{4} =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos\frac{11\pi}{6} = -\cos\left(\frac{11\pi}{6} - \pi\right) = -\cos\frac{5\pi}{6} =$$

$$= -\cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\pi\cos\frac{\pi}{6} - \sin\pi\sin\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{6} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\frac{57\pi}{7} = \sin\left(8\pi + \frac{\pi}{7}\right) = \sin\frac{\pi}{7}.$$

Deoarece ($\cos t$, $\sin t$) sînt coordonatele unui punct de pe cercul C, $\cos t$ respectiv $\sin t$ au valoarea maximă 1 şi valoarea minimă -1, deci

$$-1 \leqslant \cos t \leqslant 1 \text{ şi } -1 \leqslant \sin t \leqslant 1.$$

Funcţia F fiind periodică, funcţiile cos şi sin sînt şi ele periodice şi orice perioadă a lui F este o perioadă pentru cos şi sin. Deci

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x \text{ şi } \sin (x + 2k\pi) = \sin x, \ \forall x \in \mathbf{R}.$$

Arătăm acum că funcţiile cos şi sin nu mai au alte perioade.

Teorema 1. Funcţiile sin şi cos au perioada principală 2π.

Demonstraţie. Să presupunem că funcţia sin ar admite o perioadă $T' \in (0,2\pi)$. Am avea $\sin (t + T') = \sin t$, oricare ar fi $t \in \mathbf{R}$. În particular, pentru $t = 0$, am avea $\sin T' = \sin 0 = 0$. Singurul număr care satisface condiţiile $0 < T' < 2\pi$ şi $\sin T' = 0$ este π. Dar π nu este perioadă pentru sin, deoarece, de exemplu numerele $\sin \left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ şi $\sin \left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) = -1$ sînt distincte. Deci cea mai mică perioadă strict pozitivă a funcţiei sin este 2π.

Să presupunem că funcţia cos admite perioada $T'' \in (0,2\pi)$. Am avea $\cos (t + T'') = \cos t$, oricare ar fi $t \in \mathbf{R}$. În particular, pentru $t = 0$, $\cos T'' = \cos 0 = 1$. Deoarece nu există un număr T'' astfel ca $0 < T'' < 2\pi$ şi $\cos T'' = 1$, perioada cea mai mică strict pozitivă a funcţiei cos este 2π şi teorema este demonstrată.

Orice punct $F(t)$ fiind pe C, numerele $x = \cos t$ şi $y = \sin t$ verifică ecuaţia cercului $C : x^2 + y^2 = 1$ (Cap. IV. § 2), deci

$$\boxed{\cos^2 t + \sin^2 t = 1, \ \forall t \in \mathbf{R}.} \tag{1}$$

Teorema 2. Oricare ar fi $a, b \in \mathbf{R}$,

$$\boxed{\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.} \tag{2}$$

Demonstraţie. Conform teoremei 2, § 1 din acest capitol, $\| F(a) F(b) \| = \| A \ F(a - b) \|$. Avem $F(a) = M(\cos a, \sin a)$, $F(b) = M(\cos b, \sin b)$, $F(a - b) = M (\cos(a - b), \sin(a - b))$. Aplicînd formula distanţei dintre două puncte pentru $\| F(a) F(b) \|$, $\| AF(a - b) \|$ (calculele sînt aceleaşi ca la demonstraţia teoremei din capitolul IV, § 4) şi egalînd rezultatele se obţine formula (2).

Consecinţă. Oricare ar fi numărul x avem

$$\boxed{\cos \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \text{ şi } \sin \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x.} \tag{3}$$

Demonstrație. Într-adevăr

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos x + \sin\frac{\pi}{2}\sin x = \sin x$$

și

$$\cos x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] = \cos\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \right.$$

$$\left. - x\right) + \sin\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

Definiție. O funcție $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ se numește *pară* dacă

$$f(-x) = f(x), \quad \forall x \in \mathbf{R}$$

și se numește *impară* dacă

$$f(-x) = -f(x), \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Teorema 3. Funcția trigonometrică cos este pară, iar funcția trigonometrică sin este impară.

Demonstrație. Deoarece

$$\cos(-x) = \cos(0 - x) = \cos 0 \cos x + \sin 0 \sin x = \cos x,$$

funcția cos este pară.

Din (3), (2) și paritatea funcției cos avem

$$\sin(-x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cos x +$$

$$+ \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\sin x = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{2} - 2\pi\right)\sin x =$$

$$= \sin\frac{3\pi}{2}\sin x = -\sin x,$$

rezultă că funcția sin este impară.

Observație. Utilizînd definițiile funcțiilor sin și cos, consecințele teoremelor 2 și 3, numerele $\sin x$ și $\cos x$ pot fi calculate cu ajutorul unor numere de forma $\cos t$ sau $\sin t$, unde $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Acest procedeu de calcul poartă numele de *reducere la primul cadran*, deoarece puncte de pe C corespunzătoare numerelor $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ se află în cadranul întîi al axelor de coordonate.

De exemplu: $\sin\frac{121\pi}{14} = \sin\left(8\pi + \frac{9\pi}{14}\right) = \sin\frac{9\pi}{14} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{9\pi}{14}\right) = \cos\left(-\frac{2\pi}{14}\right) = \cos\frac{\pi}{7}$ și $\sin\frac{121\pi}{14}$ se calculează cu ajutorul numărului $\cos\frac{\pi}{7}$ (care se citește cu aproximație din tabelele trigonometrice), unde $\frac{\pi}{7} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Aplicație. Știind că $a \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, $\cos a = \frac{3}{5}$, $b \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\sin b = \frac{5}{13}$, să se calculeze $\cos(a - b)$.

Soluție. Deoarece $a \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ punctul $F(a)$ este situat în cadranul IV, deci $\sin a < 0$. Știind că $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ și $\cos a = \frac{3}{5}$, rezultă $\sin a = -\frac{4}{5}$. În mod analog se obține $\cos b = \frac{12}{13}$. Așadar

$$\cos(a - b) = \frac{3}{5} \cdot \frac{12}{13} + \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \frac{5}{13} = \frac{16}{65}.$$

Exerciții

1. Să se calculeze:

a) $\sin \frac{13\pi}{2}$, e) $\cos\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$, i) $\cos 4125\pi$,

b) $\cos \frac{18\pi}{5}$, f) $\sin\left(-\frac{13\pi}{3}\right)$, j) $\sin 2115\pi$,

c) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, g) $\sin 18\pi$, k) $\cos \frac{5\pi}{6} + \sin \frac{23\pi}{3}$,

d) $\cos(-\pi)$, h) $\cos 13\pi$, l) $\sin \frac{5\pi}{4} + \cos \frac{20\pi}{3}$.

2. Dacă $x \in (\pi, 2\pi)$ și $\cos x = \frac{7}{25}$, să se calculeze $\sin x$.

3. Să se stabilească care din următoarele funcții este pară și care este impară:

a) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sin^4 x$

b) $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = x^n$, $n \in \mathbf{N}^*$,

c) $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $h(x) = x^3 + 1$,

d) $i : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $i(x) = \frac{x}{1 + x^2}$.

4. Să se calculeze:

a) $\cos \frac{5\pi}{7} \cos \frac{13\pi}{28} + \sin \frac{5\pi}{7} \sin \frac{13\pi}{28}$,

b) $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cos x + \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin x$.

5. Dacă $\sin x > 0$, $\cos y < 0$, $\cos x = -\frac{3}{5}$, $\sin y = \frac{5}{13}$, să se calculeze $\cos(x - y)$.

6. Să se arate că, oricare ar fi $a \in \mathbf{R}$:

a) $1 - 2\sin^2 a = 2\cos^2 a - 1$,

b) $2(1 + \cos a) - \sin^2 a = (1 + \cos a)^2$,

c) $\cos^3 a + \sin^3 a = (\sin a + \cos a)(1 - \sin a \cos a)$.

7. Știind că $a, b \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\cos a = -0{,}8$, $\sin b = 0{,}96$, să se determine coordonatele punctului $F(a - b)$.

8. Să se determine coordonatele punctului $F(x)$ știind că $\sin x + \cos x = 0{,}2$ și $\cos x < 0$.

§ 3. Formule pentru cos (a + b), sin (a − b), sin (a + b) și formule deduse din acestea

Cosinusul sumei. Să demonstrăm că, oricare ar fi numerele reale a și b avem:

(4) $$\boxed{\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b}$$

Într-adevăr

$$\cos(a+b) = \cos[a-(-b)] = \cos a \cos(-b) + \sin a \sin(-b) =$$
$$= \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

(S-a ținut seama de paritatea funcției cos și imparitatea funcției sin.)

Sinusul diferenței. Oricare ar fi numerele reale a și b avem:

(5) $$\boxed{\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b}$$

Formula rezultă din

$$\sin(a-b) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (a-b)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + b\right] =$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos b - \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin b = \sin a \cos b - \cos a \sin b.$$

În demonstrație au fost folosite formulele (3) din paragraful 2.

Sinusul sumei. Dacă $a, b \in \mathbf{R}$, atunci

(6) $$\boxed{\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b}$$

Pentru a obține egalitatea se scrie succesiv:

$$\sin(a+b) = \sin[a-(-b)] = \sin a \cos(-b) - \cos a \sin(-b) =$$
$$= \sin a \cos b + \cos a \sin b.$$

Exerciții

1. Să se calculeze:

a) $\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{20} - \sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{\pi}{20}$.

b) $\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)\cos x - \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)\sin x$.

2. Să se arate că oricare ar fi numerele reale x și y avem:

a) $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4} - \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi}{4} = \sin x$,

b) $\cos(x-y)\cos y - \sin(x-y)\sin y = \cos x$,

c) $\cos(x + y) + \cos(x - y) = 2 \cos x \cos y$,

d) $\cos(x + y) - \cos(x - y) = 2 \sin x \sin(-y)$,

e) $\cos^2(x - y) - \cos^2(x + y) = 4 \sin x \cos x \sin y \cos y$,

f) $\cos^2 x + \cos^2 y - (\cos x - \cos y)^2 = \cos(x + y) + \cos(x - y)$,

g) $\cos(x - y) \cdot \cos(x + y) = \cos^2 x - \sin^2 y$,

h) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x - y\right) = \cos x \sin y - \sin x \cos y$,

i) $\sin(x + y) \sin(x - y) = \sin^2 x - \sin^2 y$,

j) $(\sin x + \cos y)^2 + (\cos x + \sin y)^2 = 2(\sin(x + y) + 1)$,

k) $\sin(x + y) + \cos(x - y) = (\sin x + \cos x)(\sin y + \cos y)$.

3. Știind că $\sin a = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin b = \frac{1}{2}$, $\cos c = \frac{5,6}{20}$, $\cos a < 0$, $\cos b > 0$, $\sin c < 0$, să se calculeze numerele $\cos(a + b + c)$ și $\cos(a + b - c)$.

4. Să se arate că oricare ar fi x număr real și k număr întreg avem:

a) $\sin\left[(2k + 1)\frac{\pi}{2} + x\right] = (-1)^k \cos x$,

b) $\cos\left[(2k + 1)\frac{\pi}{2} + x\right] = (-1)^{k+1} \sin x$.

Din formulele (2), (4), (6) se obțin alte formule utile în aplicații.

Formule pentru cos 2x și sin 2x. Dacă în formulele (4) și respectiv (6) punem $a = b = x$, rezultă

$$\cos(x + x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x$$

și

$$\sin(x + x) = \sin x \cos x + \cos x \sin x.$$

Obținem formulele

(7) $$\boxed{\sin 2x = 2 \sin x \cos x}$$

și

(8) $$\boxed{\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x}$$

Formula (8) se mai utilizează și sub formele

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 \text{ sau } \cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$$

Tot din (8) se deduc formulele

$$|\cos x| = \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}} \text{ și } |\sin x| = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}}.$$

Aplicație. Să se arate că $\sin 3x$ se poate exprima în funcție de $\sin x$.

Soluție. Avem $\sin 3x = \sin(2x + x) = \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x = 2 \sin x \cos^2 x + (1 - 2 \sin^2 x) \sin x = 2 \sin x(1 - \sin^2 x) + \sin x - 2 \sin^2 x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$.

În plus, procedînd în mod analog se obține

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x.$$

Exerciții

5. Să se calculeze:

a) $\cos \frac{\pi}{8}$, b) $\sin \frac{3\pi}{8}$, c) $\sin \frac{11\pi}{8}$,

d) $\cos \frac{5\pi}{24}$, e) $\cos \frac{7\pi}{8}$.

6. Să se verifice identitățile:

a) $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$, b) $\left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}\right)^2 = 1 - \sin x$,

c) $\cos 2x + 2 \sin^2 x = 1$, d) $1 - 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sin 2x$,

e) $\sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x = 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$,

f) $3 \sin 5x + \sqrt{3} \cos 5x = 2\sqrt{3} \sin \left(5x + \frac{\pi}{6}\right)$.

7. Să se arate că

$$\sin \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4} \text{ și } \cos \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}.$$

Indicație. Se scrie $\sin \left(\frac{2\pi}{5} + \frac{3\pi}{5}\right) = \sin \pi$ sau

$$\sin \frac{2\pi}{5} \cos \frac{3\pi}{5} + \cos \frac{2\pi}{5} \sin \frac{3\pi}{5} = 0$$

și se obține

$$16 \cos^4 \frac{\pi}{5} - 12 \cos^2 \frac{\pi}{5} + 1 = 0.$$

8. Să se calculeze $\sin \frac{\pi}{10}$ și $\cos \frac{\pi}{10}$.

9. Să se arate că

$$\cos^4 \frac{\pi}{8} + \cos^4 \frac{3\pi}{8} + \cos^4 \frac{5\pi}{8} + \cos^4 \frac{7\pi}{8} = \frac{3}{2}.$$

10. Să se arate că expresia

$$E = \cos^2(a + b) + \cos^2(a - b) - \cos 2a \cos 2b$$

este constantă.

§ 4. Funcțiile tg și ctg

Cu ajutorul funcțiilor sin și cos se pot defini alte funcții trigonometrice. Au utilitate mai mare funcțiile tangentă și cotangentă notate respectiv cu tg și ctg.

Funcția tg. Fie $\mathcal{A}$ mulțimea numerelor reale de forma $\frac{\pi}{2} + k\pi$, unde $k \in \mathbf{Z}$. Funcția tg se definește astfel:

$$\text{tg} : \mathbf{R} - \mathcal{A} \to \mathbf{R}, \quad \text{tg } x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Se verifică ușor că funcția tg este o funcție impară.

Teorema 1. Fie $M = F(t)$, $t \in \mathbf{R} - \mathcal{A}$, punctul asociat cu t prin funcția F de acoperire universală a cercului unitate, d dreapta tangentă la C în A (1, 0) și $\{T\}$ intersecția dreptelor OM și d. Atunci T are coordonatele (1, tg t).

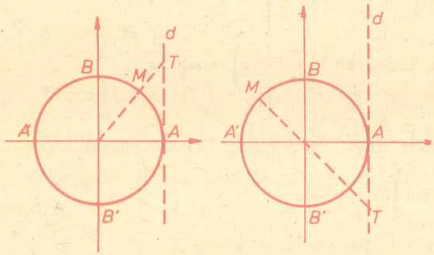


Fig. V 8.

Demonstrație. Deoarece $t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, unde $k \in \mathbf{Z}$, punctul M nu poate coincide cu B sau cu B', deci dreptele OM și d (fig. V.8) sînt concurente. Coordonatele punctului T se obțin rezolvînd sistemul format cu ecuațiile dreptelor OM și d. Deoarece M are coordonatele (cos t, sin t) ecuația dreptei OM este $y = \frac{\sin t}{\cos t} x$. Ecuația dreptei d este $x = 1$. De aici rezultă că T are coordonatele $\left(1, \frac{\sin t}{\cos t}\right)$ și teorema este demonstrată.

Teorema 2. Funcția tg are perioada principală π.

Demonstrație. Deoarece, oricare ar fi x real,

$$\text{tg}(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \text{tg } x,$$

numărul π este perioadă. Se pune problema de a decide dacă există perioade strict pozitive mai mici decît π. Ar însemna că, dacă T este o asemenea perioadă, $\text{tg}(x + T) = \text{tg}x$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Pentru $x = 0$, rezultă tg T = tg 0 = 0. Am ajuns la o contradicție, deoarece nu există $T \in (0, \pi)$, astfel ca tg T = = 0. În consecință mulțimea perioadelor funcției tg este $\{k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$, perioada principală a ei fiind π.

Funcția ctg. Fie $\mathcal{B}$ mulțimea numerelor reale de forma $k\pi$, unde $k \in \mathbf{Z}$. Funcția ctg se definește astfel:

$$\text{ctg}: \mathbf{R} - \mathcal{B} \to \mathbf{R}, \quad \text{ctg } x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Se verifică imediat că funcţia ctg este impară.

De asemenea, se demonstrează în mod analog că are perioada principală π, deci are aceeaşi mulţime a perioadelor ca şi funcţia tg.

Din $\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, rezultă că funcţia ctg nu necesită un studiu separat deoarece este acelaşi cu studiul funcţiei

$$\operatorname{ctg} : \mathbf{R} - \mathcal{B} \to \mathbf{R}, \quad \operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

Formule în care apare funcţia tg. Atunci cînd sînt considerate expresii în care apar funcţiile tg şi ctg, sau în care apar funcţiile tg, ctg, sin şi cos la numitori, vom presupune că sînt excluse din consideraţii acele valori ale variabilelor, pentru care expresia nu are sens. Elevii vor determina în fiecare caz mulţimea valorilor care trebuie excluse.

Avem

$$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\sin(a + b)}{\cos(a + b)} = \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b - \sin a \sin b}.$$

Simplificînd fracţia cu $\cos a \cos b$ se obţine:

(9) $$\boxed{\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}}$$

Procedînd în mod analog ca în cazul formulei (9) se obţine formula

(10) $$\boxed{\operatorname{tg}(a - b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}}$$

Din formula (9) pentru $a = b = x$ se deduce

(11) $$\boxed{\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}}$$

De asemenea, din

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \frac{2 \sin\frac{x}{2} \cos\frac{x}{2}}{2 \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{\sin x}{1 + \cos x},$$

rezultă

(12) $$\boxed{\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}}$$

În continuare vom arăta că numerele $\sin x$ și $\cos x$ se exprimă fără radicali cu ajutorul numărului $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Avem

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1.$$

Din $\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} = \dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}$ deducem $\cos^2\frac{x}{2} = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$. Înlocuind, se obține

$$\boxed{\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}} \tag{13}$$

De asemenea, pornind de la formula $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ se obține

$$\boxed{\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}} \tag{14}$$

Aplicație. Să se calculeze $\operatorname{tg}\frac{\pi}{24}$.

Soluție. Avem, conform formulei (12),

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{24} = \frac{\sin\frac{\pi}{12}}{1+\cos\frac{\pi}{12}}.$$ Cum $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ și $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

rezultă:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{24} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4+\sqrt{6}+\sqrt{2}} = (\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}-\sqrt{2}).$$

Rămîne ca exercițiu să se obțină acest rezultat utilizînd formula (11).

Exerciții

1. Aflați $\operatorname{tg}(a+b)$, dacă $\sin a = \frac{1}{2}$, $\cos b = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos a > 0$, $\sin b < 0$.

2. Să se verifice identitățile:

a) $\dfrac{\cos(a+b)}{\cos a\cos b} = 1 - \operatorname{tg} a\operatorname{tg} b$;

b) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x$;

c) $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2}{\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x}$;

d) $\dfrac{\sin(a+b)}{\sin(a-b)} = \dfrac{1+\operatorname{ctg} a\operatorname{tg} b}{1-\operatorname{ctg} a\operatorname{tg} b}$;

e) $\operatorname{ctg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{ctg} a \operatorname{ctg} b - 1}{\operatorname{ctg} a + \operatorname{ctg} b}$; f) $\dfrac{\cos 3x}{\sin x} + \dfrac{\sin 3x}{\cos x} = 2 \operatorname{ctg} 2x$;

g) $2 \sin 2x - \dfrac{\sin 3x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$ h) $\operatorname{tg} 3a - \operatorname{tg} 2a - \operatorname{tg} a = \operatorname{tg} 3a \operatorname{tg} 2a \operatorname{tg} a$.

3. Se dau $\operatorname{tg} a = \dfrac{1}{2}$, $\operatorname{tg} b = \dfrac{1}{5}$, $\operatorname{tg} c = \dfrac{1}{8}$. Să se calculeze $\operatorname{tg}(a+b+c)$.

4. Știind că $\operatorname{tg} x = \dfrac{m}{n}$, $n \neq 0$ să se calculeze expresia

$$E = m \sin 2x + n \cos 2x$$

5. Dacă $5 \cos x + 10 \sin x - 11 = 0$, să se calculeze $\cos x$, $\sin x$ și $\operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$.

§ 5. Transformarea sumelor în produse

Folosind formule corespunzătoare, deducem

$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2 \sin a \cos b$,

$\sin(a+b) - \sin(a-b) = 2 \cos a \sin b$,

$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cos b$,

$\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2 \sin a \sin b$.

Dacă $a + b = p$ și $a - b = q$, atunci $a = \dfrac{p+q}{2}$, $b = \dfrac{p-q}{2}$.

Obținem următoarele formule de transformare a sumelor în produse:

(15) $$\boxed{\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}}$$

(16) $$\boxed{\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}}$$

(17) $$\boxed{\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}}$$

(18) $$\boxed{\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}}$$

Prin calcule simple se deduc formule de transformare a sumei și diferenței de tangente în produs.

(19) $$\boxed{\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b = \frac{\sin(a \pm b)}{\cos a \cos b}}$$

În exerciții, uneori este util să se transforme produsele în sume. Asemenea formule se obțin din cele de mai sus:

$$\sin a \cos b = \frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2},$$

$$\cos a \cos b = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2},$$

$$\sin a \sin b = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}.$$

Formulele numerotate și puse în chenar trebuie memorate de către elevi. Pentru a le aplica cu ușurință, este necesar să fie reținut și modul în care pot fi deduse.

Exerciții

1. Să se transforme în produs:

a) $\sin 105° + \sin 75°$, b) $\cos 75° + \cos 15°$,

c) $\cos \frac{3\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{4}$, d) $\sin \frac{4\pi}{3} + \sin \frac{2\pi}{3}$,

e) $\sin x + \sin 3x + \sin 5x$, f) $\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x$.

2. Să se verifice identitățile:

a) $\frac{\cos 3x - \cos 5x}{\cos 3x + \cos 5x} = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 4x$ b. $\frac{1 + \cos 4x}{\sin 3x - \sin x} = \frac{\cos 2x}{\sin x}$

c) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^3 3x + \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = 6 \cos x \cos 2x \cos 3x$

d) $\frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x + \sin 9x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x + \cos 9x} = \operatorname{tg} 5x$

e) $1 + \cos a + \operatorname{ctg} \frac{a}{2} = 2 \operatorname{ctg} \frac{a}{2} \sin\left(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{a}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$

3. Să se transforme în produse următoarele sume:

$$S = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x + \sin 5x,$$

$$T = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x + \cos 5x + \cos 6x + \cos 7x.$$

Indicație. Se recomandă, de exemplu, pentru suma S, să se calculeze $S \sin \frac{x}{2}$, să se transforme fiecare produs în sumă și așa mai departe.

§ 6. Graficele funcțiilor sin, cos și tg

În paragrafele precedente am văzut cum fiecare număr real t poate fi asociat cu una sau alta dintre coordonatele punctelor de pe cercul unitate C pentru a defini funcțiile cos și sin. În acest paragraf vom învăța să trasăm graficul funcțiilor trigonometrice sin, cos și tg.

Graficul funcției sin. Să considerăm într-un plan un sistem de coordonate de reper (O, A, B). Ne propunem să trasăm locul geometric al punctelor M din acest plan care au coordonatele de forma $x = t$, $y = \sin t$. Deoarece, din aceste egalități deducem $y = \sin x$, acest loc geometric este graficul funcției

$$\sin : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \to \sin x.$$

Proprietatea de periodicitate a acestei funcții dă graficului ei caracteristici speciale. Faptul că punctele de abscise $x + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, au aceeași ordonată $\sin x$, face posibilă trasarea graficului în intervalul $[0, 2\pi]$ și apoi să reproducem acest grafic în ambele sensuri de-a lungul axei absciselor pentru a obține cît dorim din el.

Cînd x parcurge intervalul $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin x$ crește de la valoarea $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ la valoarea $\sin\frac{\pi}{2} = 1$. Într-adevăr avem

$$\sin x_1 - \sin x_2 = 2 \sin \frac{x_1 - x_2}{2} \cos \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Dacă $x_1 > x_2$, $x_1, x_2 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, atunci

$$0 < \frac{x_1 - x_2}{2} < \frac{\pi}{2} \quad \text{și} \quad -\frac{\pi}{2} < \frac{x_1 + x_2}{2} < \frac{\pi}{2},$$

deci

$$\sin \frac{x_1 - x_2}{2} > 0, \quad \cos \frac{x_1 + x_2}{2} > 0$$

și astfel $\sin x_1 - \sin x_2 > 0$. Așadar în cazul $x_1, x_2 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $x_1 > x_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow \sin x_1 > \sin x_2$.

Se arată în mod analog că funcția sin este descrescătoare pe intervalul $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ (în formula de mai sus factorul $\cos \frac{x_1 + x_2}{2}$ este negativ).

Ținînd seama de periodicitate, funcția sin este crescătoare pe fiecare interval de forma $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$ și este descrescătoare pe intervalele $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$, $k \in \mathbf{Z}$. *Acestea sînt intervalele de monotonie ale funcției sin.*

În tabelul următor sînt trecute valorile lui x multiplii de $\frac{\pi}{6}$ și valorile corespunzătoare lui $\sin x$. Săgețile $\nearrow$ și $\searrow$ indică creșterea, respectiv descreșterea valorilor funcției sin.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin x$	$0 \nearrow$	$\frac{1}{2} \nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \nearrow$	$1 \searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \searrow$	$\frac{1}{2} \searrow$	$0 \searrow$	$-\frac{1}{2} \searrow$	$-\frac{\sqrt{3}}{2} \searrow$	$-1 \nearrow$	$-\frac{\sqrt{3}}{2} \nearrow$	$-\frac{1}{2} \nearrow$	0

Punctele ale căror coordonate se află în tabel sînt reprezentate în figura V. 9, iar graficul funcției sin cînd $x \in [0, 2\pi]$ este trasat în figura V.10. Reproducînd cît dorim din graficul din figura V.10 în ambele sensuri de-a

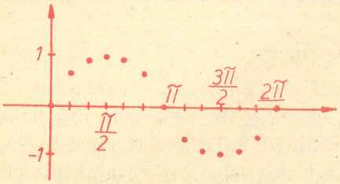


Fig. V.9

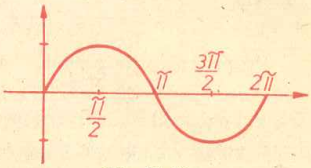


Fig. V.10

lungul axei absciselor se obține graficul funcției sin, figura V.11. Graficul funcției sin este inclus în porțiunea de plan cuprinsă între dreptele de ecuații $y = 1$ și $y = -1$.

Semnul funcției sin. Funcția sin are valori numerice pozitive pe fiecare interval de forma $(2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$ și are valori numerice negative pe fiecare interval de forma $(\pi + 2k\pi, 2(k + 1)\pi)$.

Amplitudinea. Dacă M este valoarea maximă a unei funcții periodice, iar m este valoarea minimă, numărul $\frac{1}{2}(M - m)$ se numește *amplitudinea* acelei funcții. Rezultă că, deoarece $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, $x \in \mathbf{R}$, amplitudinea funcției sin este $\frac{1}{2}(1 - (-1)) = 1$.

Aplicații

1. Să se stabilească semnul:

a) $\sin \frac{\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{12}$. b) $\sin \frac{\pi}{1,5} - \sin \frac{8\pi}{7}$. c) $\sin 2 - \sin \frac{2\pi}{3}$.

Soluție. a) Deoarece pe intervalul $\left[0, \frac{\pi}{7}\right]$ funcția sin este crescătoare și deoarece $\frac{\pi}{7} > \frac{\pi}{12}$, rezultă: $\sin \frac{\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{12} > 0$. b) Din $\sin \frac{\pi}{1,5} > 0$ și $\sin \frac{8\pi}{7} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{7}\right) < 0$, rezultă: $\sin \frac{\pi}{1,5} - \sin \frac{8\pi}{7} > 0$. c) Din $3,141 < \pi < 3,142$, rezultă $2,096 < \frac{2\pi}{3} < 2,097$. Deci $2 < \frac{2\pi}{3}$ și $\sin 2 - \sin \frac{2\pi}{3} < 0$.

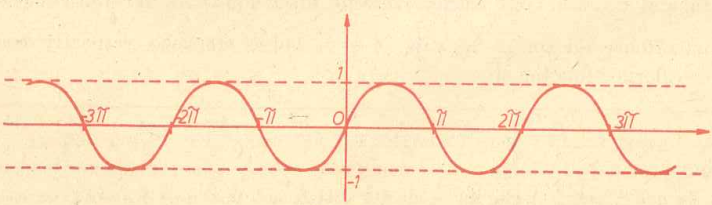


Fig. V.11

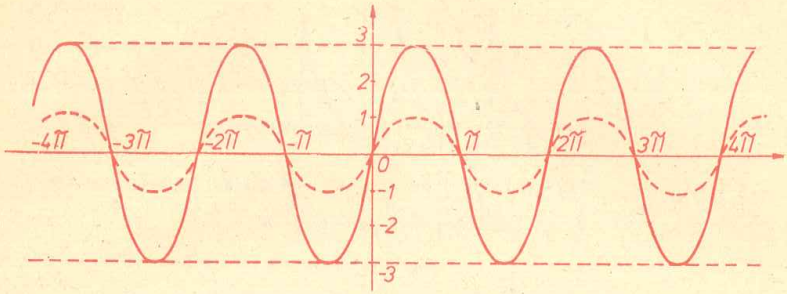


Fig. V.12

2. Să se reprezinte grafic funcția

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \qquad f(x) = 3 \sin x$$

Soluție. Funcția f are aceeași perioadă ca funcția sin și aceleași intervale de monotonie. Amplitudinea ei este

$$\frac{\max f - \min f}{2} = \frac{3 - (-3)}{2} = 3.$$

Valorile funcției f se obțin din valorile funcției sin prin înmulțirea cu 3, adică graficul funcției f este dilatat în lungul axei ordonatelor față de graficul funcției sin. Graficul funcției f este reprezentat în figura V.12 prin linie continuă pentru a-l deosebi de graficul funcției sin care este reprezentat prin linie întreruptă.

Graficul funcției cos. În tabelul următor sînt trecute cîteva perechi ordonate de numere de forma $(x, \cos x)$.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\cos x$	$1 \searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \searrow$	$\frac{1}{2} \searrow$	$0 \searrow$	$\frac{-1}{2} \searrow$	$-\frac{\sqrt{3}}{2} \searrow$	$-1 \nearrow$	$-\frac{\sqrt{3}}{2} \nearrow$	$-\frac{1}{2} \nearrow$	$0 \nearrow$	$\frac{1}{2} \nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \nearrow$	1

Funcția cos are aceeași perioadă principală și aceeași amplitudine ca și funcția sin. Graficul ei este schițat în figura V.13.

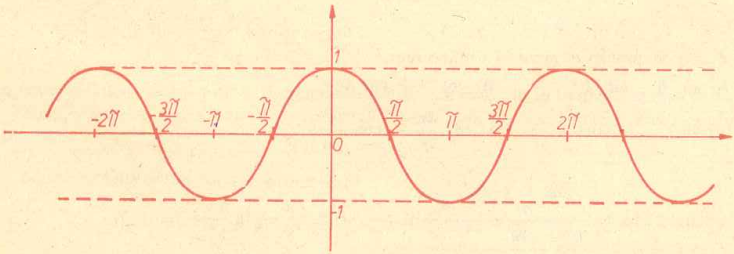


Fig. V.13.

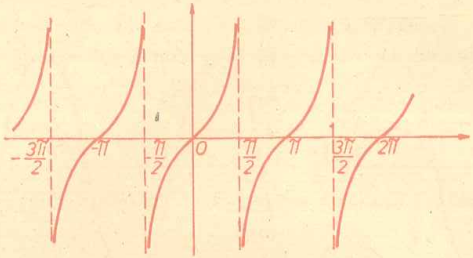


Fig. V.14.

Intervale de monotonie. Funcţia cos este strict crescătoare pe fiecare interval de forma $[\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi]$, $k \in \mathbf{Z}$ şi este strict descrescătoare pe fiecare interval de forma $[2k\pi, \pi + 2k\pi]$, $k \in \mathbf{Z}$.

Semnul funcţiei cos. Funcţia cos are valori numerice pozitive pe fiecare interval de forma $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$, $k \in \mathbf{Z}$ şi este negativă pe fiecare interval de forma $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$, $k \in \mathbf{Z}$.

Graficul funcţiei tg. Funcţia tg fiind periodică de perioadă principală π se comportă la fel pe orice interval de lungime π de forma $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.

Monotonia. Dacă $x_1, x_2 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $x_1 < x_2$, atunci $x_1 - x_2 \in (-\pi, 0)$. Din $\operatorname{tg} x_1 - \operatorname{tg} x_2 = \frac{\sin(x_1 - x_2)}{\cos x_1 \cos x_2}$, $\sin(x_1 - x_2) < 0$, $\cos x_1 > 0$ şi $\cos x_2 > 0$, rezultă $\operatorname{tg} x_1 < \operatorname{tg} x_2$.

Funcţia tg este deci strict crescătoare pe orice interval din domeniul ei de definiţie.

Graficul. Din proprietatea de periodicitate rezultă că este suficient să construim graficul pe intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ şi apoi să-l reproducem în ambele sensuri de-a lungul axei absciselor (figura V.14).

Exerciţii

1. Să se precizeze semnul numerelor:

a) $\sin 5 + \sin 4$, b) $\cos 2 + \cos 4$,

c) $\sin \frac{7\pi}{6} - \sin \frac{4\pi}{3}$ d) $\cos \frac{5\pi}{3} - \cos \frac{11\pi}{6}$

e) $\sin 7 \cos 13 \dfrac{\cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{3\pi}{5}}{\sin \frac{23\pi}{14} - \sin \frac{\pi}{9}}$, f) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} - \operatorname{tg} \frac{9\pi}{14}$.

2. Folosind graficul funcției sin, schițați graficele funcțiilor

a) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = |\sin x|$, b) $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = \sin |x|$.

3. Să se reprezinte grafic funcția

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = \frac{1}{2}\sin x - 2.$$

4. Folosind graficul funcției tg, să se schițeze graficul funcției

$$f : \mathbf{R} - \mathcal{A} \to \mathbf{R},\ f(x) = |\operatorname{tg} x|.$$

§ 7. Identități condiționate

Unei egalități între două funcții i se mai spune *identitate*. De exemplu, toate formulele din §2 — §5, puse în chenare, sînt identități.

Dacă valorile funcțiilor f și g sînt egale numai pentru o submulțime din domeniul lor de definiție, atunci $g(x) = f(x)$ se numește *identitate condiționată*. Această noțiune se extinde și la cazul mai multor variabile.

Exemple

1. Dacă a, b, c sînt măsurile unghiurilor unui triunghi, atunci

$$\cos a + \cos b + \cos c = 1 + 4 \sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}.$$

Soluție. Egalitatea este o identitate condiționată, deoarece este verificată numai de acele valori ale lui a, b, c pentru care $a + b + c = \pi$. Din $c = \pi - (a + b)$, rezultă

$$\cos a + \cos b + \cos c = (\cos a + \cos b) - \cos(a + b) =$$

$$= 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} - \left(2\cos^2\frac{a+b}{2} - 1\right) =$$

$$= 1 + 2\cos\frac{a+b}{2}\left(\cos\frac{a-b}{2} - \cos\frac{a+b}{2}\right) =$$

$$= 1 + 4\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2} = 1 + 4\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}.$$

Observație. Identitatea putea fi demonstrată și pornind de la transformarea sumei $\cos a + \cos b + \cos c + \cos(a + b + c)$ în produs, așa cum se va proceda în exemplul următor.

2. Să se transforme în produs suma

$$S = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x + y + z)$$

și să se scrie identitatea condiționată de $x + y + z = \pi$.

Soluție. Se scrie succesiv

$$S = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} - 2 \cos \frac{x+y+2z}{2} \sin \frac{x+y}{2} =$$

$$= 2 \sin \frac{x+y}{2} \left(\cos \frac{x-y}{2} - \cos \frac{x+y+2z}{2} \right) =$$

$$= 4 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x+z}{2} \sin \frac{y+z}{2}.$$

Scriind sub această formă suma, se obține identitatea condiționată: dacă $x + y + z = \pi$, atunci

$$\sin x + \sin y + \sin z = 4 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} \cos \frac{z}{2}.$$

Identitatea condiționată poate fi demonstrată prin procedeul de la exemplul 1, fără a folosi suma S.

3. Dacă $a + b + c = \frac{\pi}{2}$ și $a, b, c \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ atunci

$$\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c + \operatorname{tg} c \operatorname{tg} a = 1.$$

Soluție. Dacă $a + b \neq \frac{\pi}{2}$, rezultă $c \neq 0$. Deci

$$\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c + \operatorname{tg} c \operatorname{tg} a = \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b +$$

$$+ (\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b) \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - a - b \right) = \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b + \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{\operatorname{tg}(a+b)} =$$

$$= \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b + 1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b = 1.$$

Dacă $a + b = \frac{\pi}{2}$, rezultă $c = 0$. Din $a = \frac{\pi}{2} - b$, rezultă $\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c + \operatorname{tg} c \operatorname{tg} a = \operatorname{tg} b \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - b \right) = \operatorname{tg} b \operatorname{ctg} b = 1$.

4. Dacă $a + b + c + d = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, să se arate că $\sin a + \sin b + \sin c + \sin d = (-1)^{k+1} 4 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a+c}{2} \sin \frac{a+d}{2}$.

Soluție. Din $d = 2k\pi - (a + b + c)$, rezultă $\sin d = -\sin(a + b + c)$. Conform exemplului 2 avem

$$\sin a + \sin b + \sin c - \sin(a + b + c) = 4 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a+c}{2} \sin \frac{b+c}{2}.$$

Deoarece $\frac{b+c}{2} = k\pi - \frac{a+d}{2}$, rezultă

$$\sin \frac{b+c}{2} = \sin \left(k\pi - \frac{a+d}{2} \right) = -\cos k\pi \sin \frac{a+d}{2} = -(-1)^k \sin \frac{a+d}{2}$$

și egalitatea este demonstrată.

Exerciții

1. Dacă $x = y + z$, să se arate că:

a) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y + \operatorname{ctg} z = \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} y \operatorname{ctg} z$ pentru $\cos x \neq 0$, $\sin y \neq 0$, $\sin z \neq 0$.

b) $\cos x + \cos y + \cos z + 1 = 4 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} \cos \frac{z}{2}$.

2. Dacă $a + b + c = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, atunci:

a) $\sin a + \sin b + \sin c = (-1)^{k+1} 4 \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2}$.

b) $\cos a + \cos b + \cos c + 1 = (-1)^k 4 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}$.

3. Dacă $3 \cos t + 4 \sin t + 5 = 0$, atunci $3 \operatorname{tg} t + 4 \operatorname{ctg} t - 7 = 0$.

Indicație. Dacă $x = \cos t$ și $y = \sin t$, rezolvînd sistemul $3x + 4y + 5 = 0$ și $x^2 + y^2 = 1$, se obține $\cos t = -\frac{3}{5}$ și $\sin t = -\frac{4}{5}$. Cu aceste valori egalitatea a doua este verificată.

4. Dacă $3 \cos t + 4 \sin t + 5 = 0$, să se arate că $\sin 2t = \frac{24}{25}$. Reciproca este adevărată?

Indicație. Prima egalitate este aceeași ca și în exercițiul precedent, deci $\cos t = -\frac{3}{5}$, $\sin t = -\frac{4}{5}$. Deoarece egalitatea $\sin 2t = \frac{24}{25}$ este adevărată și pentru $\cos t = \frac{3}{5}$, $\sin t = \frac{4}{5}$, reciproca nu este adevărată.

Capitolul

VI

Ecuații trigonometrice

§ 1. Relații, funcții

Fie două mulțimi M_1 și M_2 și o proprietate referitoare la perechile ordonate (x,y), unde $x \in M_1$ și $y \in M_2$. Mulțimea tuturor perechilor ordonate (x,y) ale produsului cartezian $M_1 \times M_2$ care fac adevărată proprietatea dată se numește relație.

Exemple. **1.** Dacă $x \in \{-2, 1, 2, 3\}$, $y \in \{-1, 2, 5, 8, 12, 15\}$ și proprietatea dată este $y = 3x - 1$, avem relația

$$R_1 = \{(1,2),\ (2,5),\ (3,8)\}.$$

2. Dacă $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$ și proprietatea dată este $y = 3x - 1$, avem relația

$$R_2 = \{(x,y) \mid y = 3x - 1,\ x \in \mathbf{R},\ y \in \mathbf{R}\}.$$

3. Dacă $x \in \mathbf{R}$, $y \in [0, +\infty)$ și proprietatea dată este $y = x^2$, avem relația

$$R_3 = \{(x,y) \mid y = x^2,\ x \in \mathbf{R},\ y \in [0, +\infty)\}.$$

4. Dacă $x \in \{-3, 3, 4\}$, $y \in \{-4, -3, 3, 4\}$ și proprietatea dată este $x^2 + y^2 = 25$, avem relația

$$R_4 = \{(-3, -4), (-3, 4), (3, -4), (3,4), (4, -3), (4,3)\}.$$

Relațiile R_1, R_2, R_3 din exemplele 1,2,3 sînt relații funcționale sau funcții, deoarece orice element din prima mulțime este asociat cu un singur element din mulțimea a doua. Relația R_4 din exemplul 4 nu este funcție, deoarece un element din prima mulțime, de exemplu 3, este asociat atît cu -4 cît și cu 4. Deci în timp ce orice funcție este o relație, nu orice relație este funcție.

Dacă într-o relație se schimbă între ele elementele componente ale fiecărei perechi ordonate se obține așa-numita *relație inversă* a relației respective. Dacă R este o relație, inversa ei se notează cu R^{-1}. Relațiile inverse ale relațiilor din exemplele 1, 2, 3, 4 sînt: $R_1^{-1} = \{(2,1), (5,2), (8,3)\}$,

$$R_2^{-1} = \{(x,y) \mid x = 3y - 1,\ x \in \mathbf{R},\ y \in \mathbf{R}\}.$$

$$R_3^{-1} = \{(x,y) \mid x = y^2,\ y \in \mathbf{R},\ x \in [0, +\infty)\},$$

$$R_4^{-1} = \{(-4, -3), (4, -3), (-4,3), (4,3), (-3,4), (3,4)\}.$$

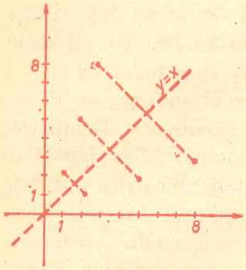


Fig. VI.1

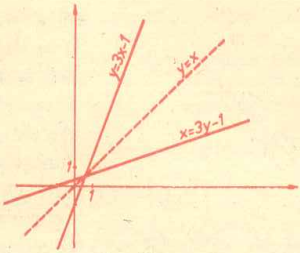


Fig. VI.2

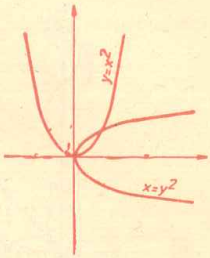


Fig. VI.3

Funcțiile fiind relații, ele au relație inversă. Dacă și aceasta este funcție, atunci ea este funcția inversă a funcției date.

De menționat este faptul că, deși R_3 este funcție, inversa ei R_3^{-1} nu este funcție. Într-adevăr, de exemplu, numărul 9 este asociat prin R_3^{-1} atît cu -3 cît și cu 3 și nu se respectă cerințele definiției unei funcții.

Relațiile ale căror elemente sînt perechi de numere se numesc relații numerice. În acest capitol ne vom ocupa numai cu relații numerice.

Locul geometric al punctelor din plan ale căror coordonate sînt elementele unei relații se numește graficul relației.

Graficele relațiilor R și R^{-1} sînt simetrice față de prima bisectoare (dreapta de ecuație $y = x$). Într-adevăr dacă $P(a, b)$ este punct al graficului lui R, atunci $P'(b, a)$ este punct al graficului lui R^{-1} și ecuația dreptei perpendiculare pe dreapta PP' prin mijlocul segmentului $|PP'|$ este $y = x$.

Graficele relațiilor R_1 și R_1^{-1} din exemplul 1 sînt reprezentate în figura VI.1, cele ale relațiilor R_2 și R_2^{-1} din exemplul 2 în figura VI.2 și cele ale relațiilor R_3 și R_3^{-1} din exemplul 3 în figura VI.3.

§ 2. Inversarea funcțiilor trigonometrice

Funcția sin: $\mathbf{R} \to [-1, 1]$, $y = \sin x$ nu admite funcție inversă. Într-adevăr în relația

$$\sin^{-1} = \{(x,y) \mid x = \sin\ y,\ x \in [-1, 1],\ y \in \mathbf{R}\}$$

același număr, de exemplu $\frac{1}{2}$, este asociat cu o infinitate de numere distincte de forma $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ și de asemenea, cu $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ și se contrazice definiția funcției.

Graficele funcției sin și cel al relației $\sin^{-1}$ sînt reprezentate în figura VI.4 (sînt simetrice față de prima bisectoare). Din grafic rezultă că unei valori date lui x din intervalul $[-1, 1]$ i se asociază o infinitate de valori ale lui y astfel ca $x = \sin y$.

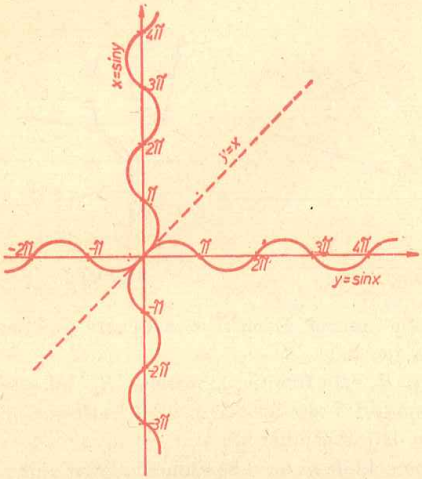


Fig. VI.4

Fie $a \in [-1, 1]$. Mulțimea valorilor lui y, astfel ca $a = \sin y$, se notează cu $\sin^{-1} a$ sau se mai obișnuiește să se noteze cu $\operatorname{Arcsin} a$. Denumirea Arcsin provine de la faptul că funcțiile trigonometrice sînt definite cu ajutorul funcției F de acoperire universală a cercului, care aplică intervale ale dreptei reale $\mathbf{R}$ pe arce ale cercului unitate C.

În mod analog, funcția $\cos: \mathbf{R} \to [-1, 1]$, $y = \cos x$, nu admite funcție inversă. Vom folosi notații analoage cu cele de la funcția sin. Mulțimea valorilor lui y astfel ca $b = \cos y$ se notează cu $\cos^{-1} b$ sau $\operatorname{Arccos} b$.

Graficul funcției tg: $\mathbf{R} - \mathcal{A} \to \mathbf{R}$, $y = \operatorname{tg} x$ și cel al relației $\operatorname{tg}^{-1} = \{(x, y) \mid x = \operatorname{tg} y, x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R} - \mathcal{A}\}$ sînt reprezentate în figura VI.5.a. și respectiv VI.5.b. Se observă că relația tg^{-1} nu este funcție. Dacă $c = \operatorname{tg} y$, atunci $y \in \operatorname{tg}^{-1} c$ sau $y \in \operatorname{Arctg} c$.

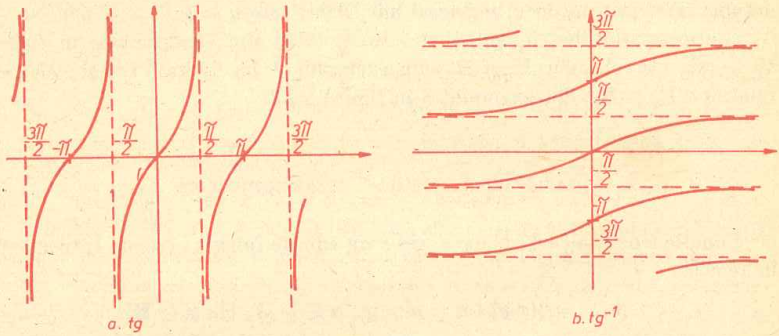


Fig. VI.5

§ 3. Funcțiile arcsin, arccos, arctg

Fie numerele reale date a, b, c, ($a, b \in [-1, 1]$, $c \in \mathbf{R}$). Mulțimile $\operatorname{Arcsin} a$, $\operatorname{Arccos} b$, $\operatorname{Arctg} c$ introduse în paragraful precedent au o infinitate de elemente. Ne propunem să distingem în fiecare din aceste mulțimi cîte un element, cu ajutorul căruia să putem exprima toate celelalte elemente.

Rezolvarea acestei probleme se poate face folosind alte funcţii care sînt restricţii potrivite ale funcţiilor sin, cos, tg şi care să fie inversabile. Aceste restricţii sînt:

$$\overline{\sin}: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [1, 1],\ y = \overline{\sin}\, x = \sin x,$$

$$\overline{\cos}: [0, \pi] \to [-1, 1],\ y = \overline{\cos}\, x = \cos x,$$

$$\overline{\mathrm{tg}}: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbf{R},\ y = \overline{\mathrm{tg}}\, x = \mathrm{tg}\, x.$$

Dacă numărul real x parcurge intervalul $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ de la $-\frac{\pi}{2}$ la $\frac{\pi}{2}$ numărul $\overline{\sin}\, x$ parcurge intervalul $[-1, 1]$, de la -1 la 1, trecînd prin fiecare punct al acestui interval o singură dată. Deci funcţia $\overline{\sin}$ este bijectivă şi admite inversa $\overline{\sin}^{-1}$, care se notează cu arcsin şi se scrie

$$\arcsin: [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\ y = \arcsin x.$$

În mod analog se poate arăta că există funcţiile inverse ale funcţiilor $\overline{\cos}$ şi $\overline{\mathrm{tg}}$, care se notează cu arccos şi arctg şi se scriu astfel:

$$\arccos: [-1, 1] \to [0, \pi],\ y = \arccos x \text{ şi } \mathrm{arctg}: \mathbf{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),\ y = \mathrm{arctg}\, x.$$

Graficele funcţiilor arcsin, arcos şi arctg sînt trasate cu linie continuă respectiv în figurile VI.6, VI.7, VI.8. Cu linie intreruptă sînt trasate graficele funcţiilor $\overline{\sin}$, $\overline{\cos}$ şi $\overline{\mathrm{tg}}$ pentru a se vedea simetria faţă de dreapta de ecuaţie $y = x$.

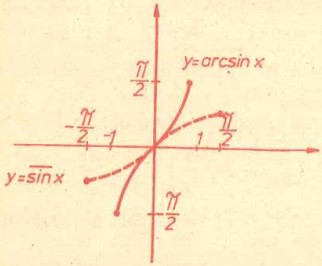


Fig. VI.6

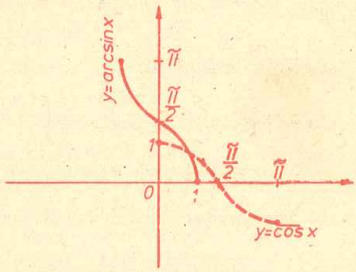


Fig. VI.7

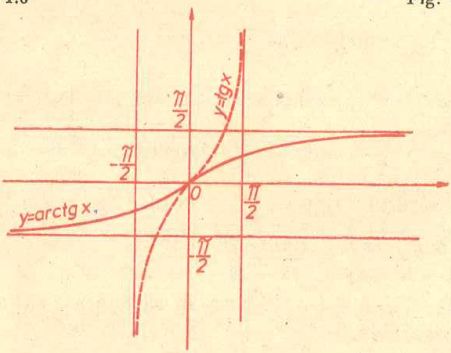


Fig. VI.8

Aplicații

1. Să se calculeze:

a) $\arcsin 1$, b) $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, c) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$, d) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Soluție. a) Din $\arcsin 1 = y$, rezultă $\sin y = 1$, $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Deci $y = \frac{\pi}{2}$ și $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$.

b) Din $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = y$, rezultă $\sin y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ și $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Dar $\sin(-y) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Deci $-y = \frac{\pi}{3}$ și $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$.

c) Din $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = y$, rezultă $\cos y = -\frac{1}{2}$ și $y \in [0, \pi]$. Dar $(-1)\cos y = \frac{1}{2}$ și $-1 = \cos\pi$, $0 = \sin\pi$. Deci $\cos\pi\cos y + \sin\pi\sin y = \cos\frac{\pi}{3}$, $\cos(\pi - y) = \cos\frac{\pi}{3}$, $\pi - y = \frac{\pi}{3}$. Așadar $y = \pi - \frac{\pi}{3}$ și $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$.

d) Din $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = y$, rezultă $\operatorname{tg} y = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ și $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Dar $-\operatorname{tg} y = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{tg}(-y) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $-y = \frac{\pi}{6}$. Deci $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = y = -\frac{\pi}{6}$.

2. Să se calculeze:

a) $\cos\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)$, b) $\sin\left(\arccos\frac{5}{13}\right)$, c) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{4}{5} + \operatorname{arctg}\frac{7}{24}\right)$.

Soluție. a) Deoarece $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, rezultă $\cos\left(\arcsin\frac{1}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) Din $\arccos\frac{5}{13} = x$, rezultă $\cos x = \frac{5}{13}$ și $x \in [0, \pi]$. Deoarece $\sin x \geqslant 0$, $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \frac{12}{13}$. Deci

$$\sin\left(\arccos\frac{5}{13}\right) = \sin x = \frac{12}{13}.$$

c) Dacă $\arcsin\frac{4}{5} = x$, atunci $\sin x = \frac{4}{5}$ și $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Deoarece $\cos x \geqslant 0$, $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \frac{3}{5}$. Deci $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{4}{3}$. La fel, din $\operatorname{arctg} = \frac{7}{24} = y$, rezultă $\operatorname{tg} y = \frac{7}{24}$. Așadar $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{4}{5} + \operatorname{arctg}\frac{7}{24}\right) = \operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} = \frac{3(32 + 7)}{72 - 28} = \frac{117}{44}$.

3. Dacă $a \in [-1, 1]$, $b \in [-1, 1]$, $c \in \mathbf{R}$, să se arate că: a) $\sin(\arcsin a) = a$, b) $\cos(\arccos b) = b$,

c) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} c) = c$. d) $\sin(\arccos b) = \sqrt{1 - b^2}$,

e) $\cos(\arcsin a) = \sqrt{1 - a^2}$. f) $\operatorname{tg}(\arccos a) = \frac{\sqrt{1 - a^2}}{a}$, $a \neq 0$.

g) $\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}$.

Soluție. a) Din $\arcsin a = x$, rezultă $\sin x = a$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Deci $\sin(\arcsin a) = \sin x = a$.

Egalitățile *b*) și *c*) se demonstrează în mod analog.

d) Din $\arccos b = x$ rezultă $\cos x = b$, $x \in [0, \pi]$. Deci $\sin x \geqslant 0$ și $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 - b^2}$. Așadar $\sin(\arccos b) = \sin x$ și egalitatea este demonstrată.

e) Se demonstrează ca în cazul *d*.

f) Din $\arccos a = y$, rezultă $\cos y = a$, $y \in [0, \pi]$. Deci $\sin y \geqslant 0$. Dar $a \neq 0$, deci $y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Așadar

$$\operatorname{tg}(\arccos a) = \operatorname{tg} y = \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sqrt{1 - a^2}}{a}.$$

g) Egalitatea rezultă din $\sin(\arcsin a) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos a\right) = a$.

4. Să se arate că, dacă $a \in [-1, 1]$, $b \in [-1, 1]$, $c \in \mathbf{R}$, atunci: a) $\arcsin(-a) = -\arcsin a$, b) $\arccos(-b) = \pi - \arccos b$, c) $\operatorname{arctg}(-c) = -\operatorname{arctg} c$, d) $\cos(4 \arccos b) = 8b^4 - 8b^2 + 1$.

Soluție. a) Din $\arcsin(-a) = x$, rezultă $\sin x = -a$, $-\sin x = a$, $\sin(-x) = a$, $-x = \arcsin a$. Deci $\arcsin(-a) = x = -\arcsin a$.

b) Din $\arccos(-b) = x$, rezultă $\cos x = -b$, $-\cos x = b$, $\cos\pi\cos x + \sin\pi\sin x = b$, $\cos(\pi - x) = b$. Deci $\pi - x = \arccos b$ și $\arccos(-b) = x = \pi - \arccos b$.

c) Se demonstrează ca în cazul a).

d) Din $\arccos b = x$, rezultă $\cos x = b$. Deci $\cos(4 \arccos b) = \cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1 = 8b^4 - 8b^2 + 1$.

5. Dacă $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, să se arate că:

$$\operatorname{arctg} x^2 + \operatorname{arctg}\frac{1}{x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Soluție. Se observă că $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x^2) = x^2$ și $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}\right) = \operatorname{ctg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{x^2}} = x^2$.

Înseamnă că $\operatorname{arctg} x^2 = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{x^2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, egalitate care se mai scrie:

$$\operatorname{arctg} x^2 + \operatorname{arctg}\frac{1}{x^2} = \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbf{Z}.$$

Deoarece $x^2 > 0$, $\operatorname{arctg} x^2 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\operatorname{arctg} \frac{1}{x^2} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Deci $\operatorname{arctg} x^2 + \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2} \in (0, \pi)$. Așadar egalitatea poate avea loc numai pentru $k = 0$.

6. Dacă $x \geqslant 1$, să se arate că

$$2\operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1 + x^2} = \pi.$$

Soluție. Pentru $x = 1$, egalitatea este verificată. Presupunem că $x > 1$ și fie $y = 2\operatorname{arctg} x$, $z = \arcsin \frac{2x}{1 + x^2}$. Atunci $\operatorname{tg} y = \frac{2 \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)}{1 - \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{2x}{1 - x^2}$ și $\operatorname{tg}(\pi - z) = -\operatorname{tg} z$. Deoarece $x > 1$, $z \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos z > 0$. Avem $\sin z = \frac{2x}{1 + x^2}$ și $\cos z = \frac{|x^2 - 1|}{x^2 + 1} = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$. Deci $\operatorname{tg} z = \frac{2x}{x^2 - 1}$ și $\operatorname{tg}(\pi - z) = \frac{2x}{1 - x^2}$. Din $\operatorname{tg} y = \operatorname{tg}(\pi - z)$, rezultă $y = \pi - z + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Singura posibilitate este $k = 0$, deoarece $\frac{\pi}{4} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$, iar z este situat în intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Așadar egalitatea este demonstrată

Enunțul se putea da și sub forma: Să se arate că

$$f\colon [1, +\infty) \to \mathbf{R},\ f(x) = 2\operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1 + x^2}$$

este o funcție constantă.

Rămîne ca exercițiu să se arate că

$$g : (-\infty, -1] \to \mathbf{R},\ g(x) = 2\operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1 + x^2}$$

este o funcție constantă și să se determine acea constantă.

Funcția $h : (-1, 1) \to \mathbf{R}$, $h(x) = 2\operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1 + x^2}$ nu este constantă. Într-adevăr se pot găsi două valori distincte ale ei. De exemplu, $h(0) = 0$ și $h\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 2\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} + \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\pi}{3}$.

Exerciții

1. Să se afle numerele:

a) $\arccos \frac{1}{2}$, b) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, c) $\sin(\operatorname{arctg} \sqrt{3})$,

d) $\operatorname{tg}\left(\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, e) $\sin\left(\arcsin \frac{3}{5} + \arcsin \frac{4}{5}\right)$,

f) $\sin\left(3 \arcsin \frac{1}{4}\right)$.

2. Dycă $x = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3}$ să se calculeze $\sin x$ și $\cos x$.

3. Să se determine x astfel ca

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{5}+\operatorname{arctg}x=\frac{\pi}{2}.$$

4. Să se arate că:

a) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}+\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\arccos\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$,

b) $\arcsin\frac{7}{25}+\arccos\frac{24}{25}=\arcsin\frac{336}{625}$,

c) Dacă a şi b sînt numere reale, $a\neq 0$,să se arate că

$$\arcsin\frac{a^2}{\sqrt{a^4+b^4}}+\operatorname{arctg}\frac{b^2}{a^2}=\frac{\pi}{2},$$

d) $\arcsin\frac{\sqrt{330}}{22}+\arccos\frac{\sqrt{154}}{22}+\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{105}}{4}=\pi$,

e) $\arcsin\frac{3\sqrt{10}}{10}+\arcsin\frac{\sqrt{10}}{10}=\arcsin\frac{2\sqrt{5}}{5}+\arcsin\frac{\sqrt{5}}{5}$,

f*) $\operatorname{arctg}\frac{4x}{5-3x}-\operatorname{arctg}\frac{5x-3}{4}=\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$, $x<\frac{5}{3}$. (De ce?)

g) $\frac{\sin x+2\cos x}{\cos x-2\sin x}=\operatorname{tg}(x+\operatorname{arctg}2)$, $\operatorname{tg}x\neq\frac{1}{2}$

5. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\arcsin\frac{1}{1+x^2}+\arccos\frac{3}{5}=\frac{\pi}{2}$,

b) $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{3}$,

c) $\cos(3\arccos x)=\cos(2\arccos x)+1$.

§ 4. Ecuaţii trigonometrice fundamentale

Fie funcţia $f:E\to\mathbf{R}$, $y=f(x)$, unde $E\subset\mathbf{R}$, iar $f(x)$ depinde de x numai prin intermediul funcţiilor sin, cos, tg, ctg. O egalitate de forma

$$f(x)=0$$

se numeşte *ecuaţie trigonometrică*.

Există ecuaţii trigonometrice verificate pentru orice valori date variabilei (identităţile), ecuaţii verificate numai pentru anumite valori date variabilei şi ecuaţii care nu sînt verificate pentru nici o valoare dată variabilelor (de exemplu $\sin x=2$).

Valorile variabilei care verifică ecuaţia trigonometrică se numesc soluţii ale ecuaţiei. A rezolva ecuaţia înseamnă a-i afla soluţiile.

Ecuaţiile trigonometrice $\sin t=a$, $\cos t=b$, $\operatorname{tg}t=c$ se numesc *ecuaţii trigonometrice fundamentale*. Conform paragrafului 2, soluţiile acestor ecuaţii sînt respectiv elementele mulţimilor $\operatorname{Arcsin}a$, $\operatorname{Arccos}b$, $\operatorname{Arctg}c$.

Ecuaţia $\sin t=a$. Deoarece $\sin t\in[-1,1]$, $\forall x\in\mathbf{R}$, ecuaţia are soluţii dacă şi numai dacă $a\in[-1,1]$. Pentru fiecare valoare dată lui a, pe cercul unitate C

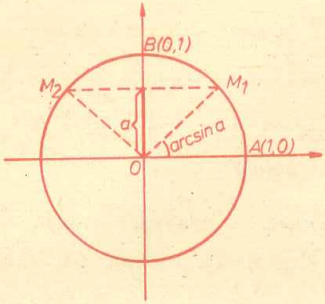


Fig. VI.9

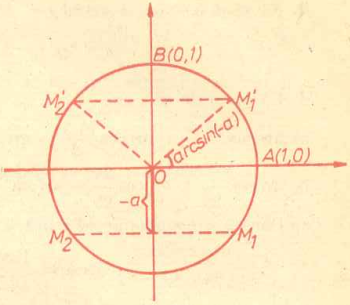


Fig. VI.10

există cel mult două puncte de ordonată a. Într-adevăr, din $\sin t = a$, rezultă $\cos t = \pm\sqrt{1-a^2}$. Deci cele două puncte sînt $M_1(\sqrt{1-a^2}, a)$, $M_2(-\sqrt{1-a^2}, a)$ şi avînd abscisele numere opuse şi aceeaşi ordonată, sînt simetrice faţă de axa ordonatelor (figura VI.9 pentru $0 \leqslant a < 1$ şi figura VI.10 pentru $-1 < a < 0$). Există un singur punct cînd $a = 1$ sau $a = -1$.

Dacă se cunosc două soluţii ale ecuaţiei, corespunzătoare celor două puncte M_1 şi M_2, celelalte soluţii se pot scrie cu ajutorul lor. Conform definiţiei funcţiei arcsin, o soluţie a ecuaţiei $\sin t = a$ este $t_1 = \arcsin a$, deoarece $\sin t_1 = \sin(\arcsin a) = a$. Deci $F(t_1) = M_1(\sqrt{1-a^2}, a)$. De asemenea, deoarece $\sin(\pi - t_1) = \sin t_1 = a$, $t_2 = \pi - t_1 = \pi - \arcsin a$ este o a doua soluţie şi $F(t_2) = M_2(-\sqrt{1-a^2}, a)$. Ţinînd seama de periodicitatea funcţiei F, soluţiile ecuaţiei $\sin t = a$, sînt $\operatorname{Arcsin} a = \{\arcsin a + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\} \cup \{\pi - \arcsin a + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$.

În particular, ecuaţia $\sin t = 1$ are soluţiile

$$\operatorname{Arcsin} 1 = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\},$$

ecuaţia $\sin t = -1$ are soluţiile

$$\operatorname{Arcsin}(-1) = \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$$

şi ecuaţia $\sin t = 0$ are soluţiile

$$\operatorname{Arcsin} 0 = \{k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}.$$

Exemple. **1.** $\sin x = \frac{3}{4}$. Ecuaţia are ca mulţime a soluţiilor $\operatorname{Arcsin}\frac{3}{4} = \sin^{-1}\frac{3}{4} = \left\{\arcsin\frac{3}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{\pi - \arcsin\frac{3}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$.

2. $\sin x = -\frac{1}{2}$. Deoarece $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$, ecuaţia are ca mulţime a soluţiilor.

$$\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \left\{-\frac{\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{\frac{7\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

Observaţie. Deoarece

$\operatorname{Arcsin} a = \{(-1)^{2k} \arcsin a + 2k\pi \mid k \in Z\} \cup \{(-1)^{2k+1} \arcsin a + (2k+1)\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$, prin efectuarea operaţiei de reuniune, rezultă

$$\operatorname{Arcsin} a = \{(-1)^k \arcsin a + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}. \tag{1}$$

De multe ori este comod ca mulţimea soluţiilor ecuaţiei $\sin t = a$, $a \in [-1, 1]$ să se reţină sub forma (1).

Exemplul 3. $\sin x = -\frac{1}{3}$. Deoarece $\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right) = -\arcsin\frac{1}{3}$, avem

$$x \in \left\{(-1)^{k+1} \arcsin\frac{1}{3} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

Ecuaţia $\cos t = b$. Deoarece $\cos t \in [-1, 1]$, $\forall t \in \mathbf{R}$, ecuaţia are soluţii dacă şi numai dacă $b \in [-1, 1]$.

Dacă b este dat, din $\cos t = b$, rezultă $\sin t = \pm\sqrt{1-b^2}$. Înseamnă că pe cercul unitate C există numai două puncte $M_1(b, \sqrt{1-b^2})$ şi $M_2(b, -\sqrt{1-b^2})$ de abscisă b. Aceste puncte sînt simetrice faţă de axa absciselor (figura VI.11, pentru $a \geqslant 0$ şi figura VI.12, pentru $a < 0$). Deoarece $\cos t = b$ şi $\cos(-t) = \cos t = b$, numerele $t_1 = \operatorname{arccos} b$ şi $t_2 = -t_1 = -\operatorname{arccos} b$ aparţin mulţimii $\operatorname{Arccos} b$ şi $F(t_1) = M_1$, $F(t_2) = M_2$. Periodicitatea funcţiei F ne dă posibilitatea să scriem

$$\operatorname{Arccos} b = \{\operatorname{arccos} b + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\} \cup \{-\operatorname{arccos} b + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}. \tag{2}$$

În particular, soluţiile ecuaţiilor $\cos t = 1$, $\cos t = -1$ şi $\cos t = 0$ sînt respectiv:

$\operatorname{Arccos} 1 = \{2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$, $\operatorname{Arccos}(-1) = \{\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$ şi

$\operatorname{Arccos} 0 = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$.

Exemple. 1. $\cos x = \frac{1}{2}$. Deoarece $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, rezultă

$$x \in \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

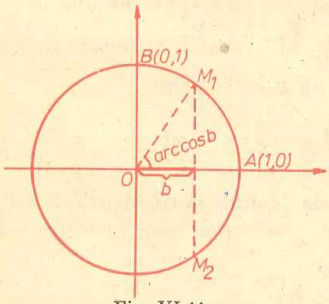


Fig. VI 11

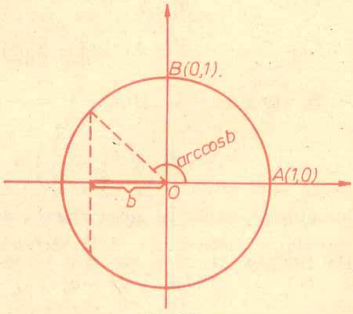


Fig. VI.12

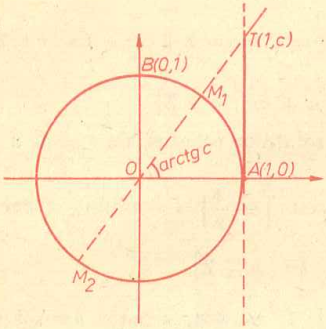


Fig. VI.13

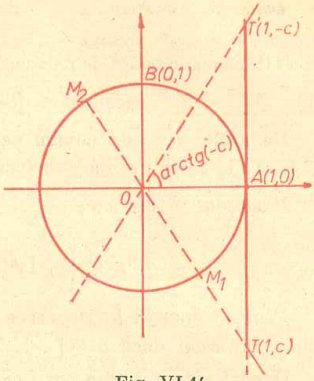


Fig. VI.14

2. $\cos x = -\frac{3}{4}$. Deoarece $\arccos\left(-\frac{3}{4}\right) = \pi - \arccos\frac{3}{4}$, rezultă

$$x \in \left\{\pi - \arccos\frac{3}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{-\pi + \arccos\frac{3}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

Ecuația $\operatorname{tg} t = c$. Deoarece $\operatorname{tg} t$ ia toate valorile reale cînd $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, ecuația are soluții, oricare ar fi valorile reale ale lui c. Atunci cînd c este dat, pe dreapta de ecuație, $x = 1$, există un singur punct T, care are coordonatele $(1, c)$. Dreapta OT (figura VI.13 pentru $c \geqslant 0$ și figura VI.14 pentru $c < 0$) intersectează cercul C în punctele M_1 și M_2. Dacă $t_1 = \operatorname{arctg} c$, atunci $F(t_1) = M_1$ și $F(\pi + t_1) = M_2$. Deci $\operatorname{tg} t_1 = c$ și $\operatorname{tg}(\pi + t_1) = c$. Ținînd seama de periodicitatea funcției tg, soluțiile ecuației $\operatorname{tg} t = c$ sînt

$$\operatorname{Arctg} c = \{\operatorname{arctg} c + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}. \tag{3}$$

Exemple. **1.** $\operatorname{tg} x = 5$. Mulțimea soluțiilor este

$$\operatorname{Arctg} 5 = \{\operatorname{arctg} 5 + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}.$$

2. $\operatorname{tg} t = -\sqrt{3}$. Deoarece $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\operatorname{arctg}\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$ rezultă

$$t \in \operatorname{Arctg}(-\sqrt{3}) = \left\{-\frac{\pi}{3} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

3. $\operatorname{ctg} x = -4$. Din $\frac{1}{\operatorname{tg} x} = -4$, rezultă $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{4}$ și

$$x \in \operatorname{tg}^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right) = \left\{-\operatorname{arctg}\frac{1}{4} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

4. $\operatorname{ctg} x = 0$. În acest caz nu se poate apela la funcția tg, dar $\frac{\cos x}{\sin x} = 0$. De aici $\cos x = 0$ și $\sin x \neq 0$, sau

$$x \in \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

Aplicații. 1. Să se rezolve ecuațiile

a) $\sin f(x) = \sin g(x)$, b) $\cos f(x) = \cos g(x)$, c) $\operatorname{tg} f(x) = \operatorname{tg} g(x)$,

unde f și g sînt funcții definite pe aceeași mulțime $A \subset \mathbf{R}$.

Soluție. a) Ecuația se scrie succesiv: $\sin f(x) - \sin g(x) = 0$, $2\cos\frac{f(x)+g(x)}{2}\sin\frac{f(x)-g(x)}{2} = 0$. Ecuația are soluții dacă și numai dacă există un număr întreg k astfel ca

$$f(x) + g(x) = \pi + 2k\pi \text{ sau } f(x) - g(x) = 2k\pi.$$

b) Scriem ecuația succesiv: $\cos f(x) - \cos g(x) = 0$,

$$2\sin\frac{f(x)+g(x)}{2}\sin\frac{g(x)-f(x)}{2} = 0.$$

Constatăm că are soluții dacă și numai dacă există numărul întreg k astfel ca

$$f(x) + g(x) = 2k\pi \text{ sau } g(x) - f(x) = 2k\pi.$$

c) Ecuația se scrie $\frac{\sin[f(x)-g(x)]}{\cos f(x)\cos g(x)} = 0$. Are soluții dacă și numai dacă există numărul întreg k astfel ca

$$f(x) - g(x) = k\pi, \quad \cos f(x) \neq 0, \quad \cos g(x) \neq 0.$$

2. Să se determine mulțimea valorilor lui x astfel ca:

a) $\cos 4x = \cos x$, b) $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} x$,

c) $\sin 5x = \cos 2x$, d) $\sin(x^2 + x) = \sin(x+1)$.

Soluție. a) Conform aplicației 1. obținem $4x_k = \pm x_k + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Deci $x_k' = \frac{2k\pi}{3}$ sau $x_k'' = \frac{2k\pi}{5}$. Soluțiile ecuației sînt elementele mulțimii

$$\left\{\frac{2k\pi}{3} \mid k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{\frac{2k\pi}{5} \mid k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

b) Se obține $3x_k = x_k + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ sau $x_k = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$. Dar $\cos x \neq 0$ și $\cos 3x \neq 0$. Așadar $x \in \{k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$.

c) Din $\sin 5x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$, rezultă $5x_k = (-1)^k\left(\frac{\pi}{2} - 2x_k\right) + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Soluțiile ecuației sînt elementele mulțimii

$$\left\{\frac{(-1)^k\frac{\pi}{2} + k\pi}{5 + 2(-1)^k} \mid k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

d). Avem $x_k^2 + x_k = x_k + 1 + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ sau $x_k^2 + x_k = \pi - x_k - 1 + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Rezolvînd ecuațiile de gradul doi și punînd condițiile de existență ale radicalilor, soluțiile ecuației sînt elementele mulțimii

$$\{\sqrt{1+2k\pi} \mid k \in \mathbf{N}\} \cup \{-\sqrt{1+2k\pi} \mid k \in \mathbf{N}\} \cup$$
$$\cup \{-1 + \sqrt{(2k+1)\pi} \mid k \in \mathbf{N}\} \cup \{-1 - \sqrt{(2k+1)\pi} \mid k \in \mathbf{N}\}.$$

Exerciţii

Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\cos 4x = -\frac{1}{2}$, b) $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$,

c) $\sin 3x = \cos x$, d) $\operatorname{tg} 5x = -1$,

e) $\operatorname{tg} 2x \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$, f) $\sin(x^2) = \sin x$,

g) $\sin x = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$.

Soluţie. Calculînd $\sin 5x$, se obţine $\sin 5x = 1$, deci $x_k = \frac{(4k+1)\pi}{10}$, $k \in \mathbf{Z}$. Deoarece $0 < \sin x < \frac{1}{2}$, se păstrează din intervalul $[0, 2\pi]$ numai soluţiile $x_1 = \frac{\pi}{10}$ şi $x_2 = \pi - \frac{\pi}{10} = \frac{9\pi}{10}$. Ţinînd seama de periodicitatea funcţiei sin, soluţiile ecuaţiei sînt elementele mulţimii

$$\left\{\frac{\pi}{10} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{\frac{9\pi}{10} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

§ 5. Ecuaţii trigonometrice care se rezolvă cu ajutorul unor ecuaţii din algebră

Cîteva exemple sînt suficiente pentru a lămuri unele situaţii mai importante care apar atunci cînd se rezolvă asemenea ecuaţii.

1. $2\sin^2 x + \sin x + 3 = 0$. Se notează $\sin x = y$. Rezultă $2y^2 + y + 3 = 0$. Deoarece $\Delta = (-1)^2 - 24 = -23 < 0$ şi deoarece $\sin x$ este număr real, ecuaţia nu are soluţii.

2. $\cos^2 x - 5\cos x + 6 = 0$. Dacă $\cos x = y$, rezultă $y^2 - 5y + 6 = 0$. Deoarece $y_1 = 2$, $y_2 = 3$ şi deoarece $\cos x \neq 2$, $\cos x \neq 3$, ecuaţia nu are soluţii.

3. $2\cos^2 t - 11\cos t + 5 = 0$. Dacă $\cos t = x$, rezultă $2x^2 - 11x + 5 = 0$. Aşadar $x_1 = \frac{1}{2}$ şi $x_2 = 5$. Cum $\cos t \neq 5$, rezultă $\cos t = \frac{1}{2}$ şi ecuaţia are soluţii. Deci

$$t \in \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

4. $\sin^2 t - 14\cos^2 t - 11\sin t + 16 = 0$. Ecuaţia se mai scrie $\sin^2 t - 14(1 - \sin^2 t) - 11\sin t + 16 = 0$, $15\sin^2 t - 11\sin t + 2 = 0$. Punînd $\sin t = x$, rezultă $15x^2 - 11x + 2 = 0$. Deci $x_1 = \frac{1}{3}$ sau $x_2 = \frac{2}{5}$. Din $\sin t = \frac{1}{3}$ şi $\sin t = \frac{2}{5}$, rezultă că soluţiile ecuaţiei sînt elementele mulţimii

$$\left\{(-1)^k \arcsin\frac{1}{3} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{(-1)^k \arcsin\frac{2}{5} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

5. $\operatorname{tg}^2 t - 3 \operatorname{tg} t + 2 = 0$. Dacă $\operatorname{tg} t = x$, rezultă $x^2 - 3x + 2 = 0$. Deci $x_1 = 1$ şi $x_2 = 2$. Rezolvînd ecuaţiile $\operatorname{tg} t = 1$ şi $\operatorname{tg} t = 2$, rezultă

$$t \in \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \{\operatorname{arctg} 2 + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}.$$

6. $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{5}{2}$. Ecuaţia se poate scrie sub forma $\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{5}{2}$ sau $2 \operatorname{tg}^2 x - 5 \operatorname{tg} x + 2 = 0$. Se obţine $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$ şi $\operatorname{tg} x = 2$. Soluţiile ecuaţiei sînt elementele mulţimii

$$\left\{\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \{\operatorname{arctg} 2 + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}.$$

7. $a \cos^2 x + \operatorname{tg}^2 x = \frac{a+2}{2}$, $a \in [2, +\infty)$. Făcînd substituţia $\operatorname{tg} x = y$ se obţine ecuaţia $2y^4 - ay^2 + a - 2 = 0$. Rezolvînd ecuaţia în y^2 şi apoi revenind la substituţia făcută, rezultă $\operatorname{tg}^2 x = 1$ sau $\operatorname{tg}^2 x = \frac{a-2}{2}$. Deoarece $a \in [2, +\infty)$, rezultă că $\operatorname{tg} x = 1$, $\operatorname{tg} x = -1$, $\operatorname{tg} x = \sqrt{\frac{a-2}{2}}$, $\operatorname{tg} x = -\sqrt{\frac{a-2}{2}}$. Soluţiile ecuaţiei sînt elementele mulţimii:

$$\left\{\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\} \cup$$

$$\cup \left\{\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a-2}{2}} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{-\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a-2}{2}} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

Exerciţii

Să se rezolve ecuaţiile:

1. $3 \sin^2 x + 2 \cos x - 1 = 0$
2. $2 \cos^2 x - (2a + 1) \cos x + a = 0$

Indicaţie. Rezolvînd ecuaţia de gradul doi se obţine $\cos x = \frac{1}{2}$ sau $\cos x = a$. Soluţiile acestor două ecuaţii sînt şi soluţii ale ecuaţiei date (ecuaţia $\cos x = a$ are soluţii dacă şi numai dacă $a \in [-1, 1]$).

3. $\cos 2x + 2 \sin x - \frac{3}{2} = 0$. 4. $\sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x = \frac{3}{2}$. 5. $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}$.
6. $\operatorname{tg} x + \sin 2x - 2 = 0$.

Indicaţie. Se face substituţia $\operatorname{tg} x = y$ şi se obţine

$$(y - 1)(y^2 - y + 2) = 0.$$

Rezultă

$$x \in \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

7. $6 \operatorname{ctg} x + 6 \operatorname{tg} 2x + 5 = 0$.
8. $\sin x + 2 \cos^2 x + \frac{1}{\sin x} = 2$, $\sin x \neq 0$.

Indicaţie. Se face substituţia $\sin x = t$ şi se obţine

$$(t-1)(2t^2+t+1)=0.$$

Rezultă

$$x \in \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

9. $\cos x + \sin^2 x + \dfrac{2}{1+\cos x} = 3.$

§ 6. Ecuaţii de forma $a\cos t + b\sin t + c = 0$

Presupunem că $a \neq 0$ şi $b \neq 0$. În caz contrar ecuaţia ar fi de tip fundamental.

Pentru rezolvarea acestei ecuaţii există mai multe metode. Prezentăm numai unele dintre ele.

Metoda I. Constă în determinarea punctelor $F(t) = M(\cos t, \sin t)$ situate pe dreapta de ecuaţie $ax + by + c = 0$. Deoarece $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, punînd $x = \cos t$, $y = \sin t$, determinarea numerelor $\cos t$ şi $\sin t$ se reduce la rezolvarea sistemului format din ecuaţiile $ax + by + c = 0$ şi $x^2 + y^2 = 1$. Sistemul este echivalent cu sistemul

$$\begin{cases} (a^2+b^2)x^2 + 2acx + c^2 - b^2 = 0, \\ y = -\dfrac{ax+c}{b}. \end{cases}$$

Ecuaţia de gradul doi în x are soluţii reale dacă şi numai dacă $(ac)^2 - (a^2+b^2)(c^2-b^2) \geqslant 0$ sau

$$a^2 + b^2 \geqslant c^2. \tag{4}$$

Dacă $a^2 + b^2 > c^2$ sistemul are două soluţii distincte (x_1, y_1) şi (x_2, y_2), iar dacă $a^2 + b^2 = c^2$ sistemul are o singură soluţie (x_0, y_0). Soluţiile ecuaţiei se determină ţinînd seama de poziţia punctului corespunzător fiecărei soluţii pe cercul unitate C.

Exemple. **1.** $\cos t + 8\sin t - 7 = 0$. În acest caz $a = 1$, $b = 8$, $c = -7$, $a^2 + b^2 = 65$ şi $c^2 = 49$. Ecuaţia are soluţii deoarece $a^2 + b^2 > c^2$. Rezolvînd sistemul format din ecuaţiile $x + 8y - 7 = 0$ şi $x^2 + y^2 = 1$, unde $x = \cos t$ şi $y = \sin t$, se obţin soluţiile $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ şi $\left(-\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right)$. Punctul $M_1\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ este situat în cadranul I al axelor de coordonate, iar punctul $M_2\left(-\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right)$ în cadranul *II*. Din $\sin t = \frac{4}{5}$, rezultă $t \in \left\{\arcsin \frac{4}{5} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$, iar din $\sin t = \frac{12}{13}$, rezultă $t \in \left\{\pi - \arcsin \frac{12}{13} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$. Soluţiile ecuaţiei date sînt elementele mulţimii

$$\left\{\arcsin \frac{4}{5} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{\pi - \arcsin \frac{12}{13} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

2. $\sqrt{5}\cos t - 2\sin t - 3 = 0$. Avem $a = \sqrt{5}$, $b = -2$, $C = -3$, $a^2 + b^2 = 9$, $c^2 = 9$. Deoarece $a^2 + b^2 = c^2$, sistemul $x\sqrt{5} - 2y - 3 = 0$, $x^2 + y^2 = 1$, unde $x = \cos t$, $y = \sin t$ are singura soluție $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}, -\frac{2}{3}\right)$. Punctul corespunzător acestei soluții este situat în cadranul IV, deci

$$t \in \left\{-\arcsin\frac{2}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

3. $(m^2 - n^2)\cos t + 2mn\sin t - 1 - m^2 - n^2 = 0$. Avem $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$, $c = -1 - m^2 - n^2$, $a^2 + b^2 = (m^2 + n^2)^2$, $c^2 = (1 + m^2 + n^2)^2$. Deoarece $a^2 + b^2 < c^2$, $\forall\, m \in \mathbf{R}$, $\forall\, n \in \mathbf{R}$, ecuația nu are soluții.

Metoda II. Teoremă. Oricare ar fi numerele reale $t, a, b, a^2 + b^2 \neq 0$, există numărul real unic $\alpha \in [0, 2\pi)$ astfel ca $a\cos t + b\sin t = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(t + \alpha)$.

Demonstrație. Dacă $S = a\cos t + b\sin t$, rezultă

$$\frac{S}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\cos t + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\sin t.$$

Numerele $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ și $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ reprezintă sinusul respectiv cosinusul aceluiaşi număr real α, $\alpha \in [0, 2\pi)$ deoarece suma pătratelor lor este egală cu 1. Aşadar $\frac{S}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin\alpha\cos t + \cos\alpha\sin t = \sin(\alpha + t)$ şi existenţa lui α este demonstrată. Unicitatea lui α, $\alpha \in [0, 2\pi)$ rezultă înlocuind $t = 0$ şi $t = \frac{\pi}{2}$ în relaţia $a\cos t + b\sin t = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(t + \alpha)$.

Ca aplicaţie a acestei teoreme este metoda II de rezolvare a ecuaţiei $a\cos t + b\sin t + c = 0$.

Exemplu. $\cos x + \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2}$. Avem $\sqrt{a^2 + b^2} = 2$. Înseamnă că

$$\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ sau } \sin\frac{\pi}{6}\cos x + \cos\frac{\pi}{6}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Deci $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{4}$. Aşadar $x_k + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ sau $\pi - \left(x_k + \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi = \frac{\pi}{4}$, $k \in \mathbf{Z}$. Soluţiile ecuaţiei sînt elementele mulţimii

$$\left\{\frac{\pi}{12} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{\frac{7\pi}{12} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

Un *exemplu* pentru cazul cînd ecuaţia nu are soluţii este următorul: $2\sin t + 3\cos t + 15 = 0$. Condiţia de existenţă a soluţiilor stabilită la metoda I arată că această ecuaţie nu are soluţii. Folosind metoda II, ecuaţia se scrie

sub forma $\sin(\alpha + t) = -\frac{15}{\sqrt{13}}$, unde $\alpha = \arccos\frac{2}{\sqrt{13}}$. Deoarece $-\frac{15}{\sqrt{13}}$ nu aparţine intervalului $[-1, 1]$ ecuaţia nu are soluţii.

Observaţii. 1° De la caz la caz se utilizează prima sau a doua metodă în funcţie de dificultatea calculelor numerice.

2° Se poate utiliza o a treia metodă, făcînd substituţia $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = y$, dacă ecuaţia are necunoscuta x. Prin această metodă se pot pierde eventualele soluţii de forma $x_k = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, dat fiind faptul că funcţia tg nu este definită pe toată mulţimea numerelor reale.

Exemplu. $\cos x + 2\sin x + 1 = 0$. Dacă $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, atunci $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ şi $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ (formulele (13) şi (14) Cap. V). Ecuaţia se scrie succesiv $\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{4t}{1+t^2} + 1 = 0$, $t = -\frac{1}{2}$. Din $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = -\frac{1}{2}$, ar rezulta că mulţimea soluţiilor ecuaţiei este $\left\{-2\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$. Rezolvînd însă ecuaţia, de exemplu prin prima metodă, se obţin şi soluţiile $\{\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$, soluţii, care prin substituţia făcută au fost pierdute deoarece $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ este nedefinită pentru $x_k = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. În concluzie, înainte de a rezolva ecuaţia prin această metodă se verifică dacă $x_k = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ sînt sau nu soluţii ale ecuaţiei pentru a evita pierderea lor.

3° În unele cazuri este indicat ca, după ce se găsesc numerele $\sin x$ şi $\cos x$ prin prima metodă, să se aplice formula $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ pentru a scrie soluţiile ecuaţiei sub o formă mai potrivită. De exemplu, dacă avem ecuaţia

$$(2+\sqrt{3})\cos x - \sin x - \sqrt{2}(1+\sqrt{3}) = 0,$$

utilizînd prima metodă rezultă $\cos x = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\sin x = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$. Punctul $M\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right)$ este situat în cadranul IV. Deoarece $\sin 2x = 2\sin x\cos x = -\frac{1}{2}$, s-ar părea că soluţiile ecuaţiei sînt elementele mulţimii $\left\{(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$. În realitate, deoarece $\cos x > 0$ şi $\sin x < 0$ şi deoarece $-\frac{1}{2} < \sin x < 0$, soluţiile ecuaţiei se obţin din soluţia particulară $2\pi - \frac{\pi}{12} = \frac{23\pi}{12}$ a ecuaţiei $\sin 2x = -\frac{1}{2}$ pentru $k = 4$. Deci

$$x \in \left\{\frac{23\pi}{12} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

Să se rezolve ecuaţiile:

1. $2\cos t - \sin t + 2 = 0$. 2. $(\sqrt{7} - 2\sqrt{2})\cos t - \sin t + 1 = 0$.

3. $\cos t + \sin t + \sqrt{2} = 0$.

4. $5(4 + \sqrt{21})\cos t - 5\sin t + 8 + 3\sqrt{21} = 0$.

5. $\sqrt{3}\cos t - \sin t - 2 = 0$. 6. $\sqrt{3}\cos t - \sin t - \sqrt{3} = 0$.

Aplicaţii

1. Să se reprezinte grafic funcţia

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = \sin 2x.$$

Soluţie. Funcţia este periodică de perioadă principală π. Într-adevăr din $\sin 2(x + T) = \sin 2x$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$, punînd $2x = y$, se obţine $\sin(y + 2T) = \sin y$, $\forall\, y \in \mathbf{R}$. Deci, dacă T este perioadă pentru f, $2T$ este perioadă pentru sin. Funcţia sin avînd perioada principală 2π, funcţia f are perioada principală π.

Funcţia f are amplitudinea egală cu 1. Punctele de pe grafic care sînt de ordonată maximă 1 au abscisele $\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Graficul lui f se obţine din graficul funcţiei sin printr-o contracţie de-a lungul axei absciselor. În figura VI.15 este reprezentat acest grafic.

Observaţie. Mişcarea oscilatorie armonică simplă este descrisă complet cu ajutorul unui model matematic implicînd mişcarea circulară uniformă. Pot fi considerate cu aproximaţie mişcări armonice simple următoarele: mişcarea geamandurii în apă în sus şi în jos, pistonul unui motor cu combustie internă, particula de aer în timpul trecerii unei unde sonore simple etc. Toate acestea şi multe altele cer schiţarea graficului unei funcţii de forma

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = a\cos(\omega x + b),\ \omega \neq 0,$$

unde a este amplitudinea, ω se numeşte pulsaţie, iar b se numeşte fază iniţială. Perioada principală a acestei funcţii este $\frac{2\pi}{|\omega|}$.

2. Să se arate că funcţia

$$g : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ g(x) = \sin 6x + \cos 15x$$

este periodică şi are perioada principală $\frac{2\pi}{3}$.

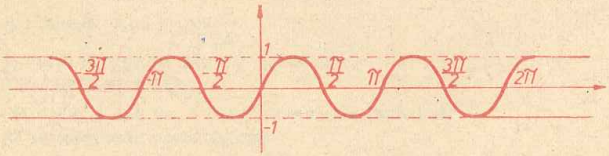


Fig. VI.15

Soluție. Fie T o perioadă. Atunci
$\sin 6(x+T)+\cos 15(x+T)=\sin 6x+\cos 15x,\ \forall x\in\mathbf{R}$.

În particular, pentru $x=0$ și respectiv pentru $x=\frac{\pi}{3}$ se obține

$$\begin{cases}\sin 6\ T+\cos 15\ T=1\\ \sin 6\ T-\cos 15\ T=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin\ 6\ T=0\\ \cos\ 15\ T=1\end{cases}.$$

Din $\sin 6\ T=0$, rezultă $T=\frac{k'\pi}{6}$, $k'\in\mathbf{Z}$, iar din $\cos 15\ T=1$, rezultă $T=\frac{2k''\pi}{15}$, $k''\in\mathbf{Z}$. Prin egalare se obține $k'=\frac{4k''}{5}$. Deoarece $k'\in\mathbf{Z}$, rezultă $k''=5\,k$, $k\in\mathbf{Z}$. Așadar $T=\frac{2k\pi}{3}$, $k\in\mathbf{Z}$. Rezultă că orice perioadă a funcției g este un număr de forma $\frac{2k\pi}{3}$, $k\in\mathbf{Z}$.

Să arătăm că toate numerele de această formă sînt perioade:

$$g\left(x+\frac{2k\pi}{3}\right)=\sin 6\left(x+\frac{2k\pi}{3}\right)+\cos\ 15\left(x+\frac{2k\pi}{3}\right)=$$
$$=\sin\ (6x+4k\pi)+\cos\ (15x+10k\pi)=$$
$$=\sin\ 6x+\cos\ 15x=g(x).$$

Perioada principală este $\frac{2\pi}{3}$.

3. Să se reprezinte grafic funcția $h:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $h(x)=\cos x+\sin x$.

Soluție. Pentru a localiza punctul $(x,\cos x+\sin x)$ se adună ordonatele punctelor $(x,\cos x)$ și $(x,\sin x)$ pentru fiecare valoare a lui x. În figura VI.16 se poate observa cum se obțin punctele graficului funcției h din graficele funcțiilor sin și cos, iar în figura VI.17 este trasat graficul funcției f pentru $x\in[0,2\pi]$. Perioada principală a acestei funcții fiind 2π, pentru a obține cît dorim din graficul ei se reproduce în lungul axei absciselor graficul din figura VI.17. Aceeași figură ne indică faptul că $\max h=h\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$, iar $\min h=h\left(\frac{5\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}$. Într-adevăr, din $h(x)=\sin\ x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=$ $=2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, rezultă că amplitudinea acestei funcții este $\sqrt{2}$, adică $\frac{\sqrt{2}-(-\sqrt{2})}{2}$.

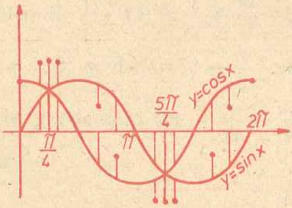


Fig. VI.16

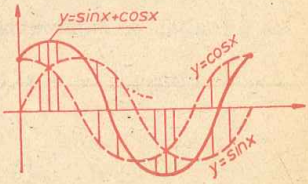


Fig. VI.17

Observație. Balansarea pendulei, oscilațiile dintr-un circuit electric, vibrațiile corzilor viorii sau ale altor instrumente muzicale generatoare de unde sonore, mișcările electronilor în atomi și multe alte fenomene fizice și biologice pot fi descrise, cel puțin în parte, prin funcții de forma

$$H_1 : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\quad H_1(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x,$$
$$H_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\quad H_2(x) = H_1(x) + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x,$$
$$H_3 : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\quad H_3(x) = H_2(x) + a_3 \cos 3x + b_3 \sin 3x$$

și celelalte, funcții ale căror grafice se pot schița ca în cazul funcției h.

4. Să se reprezinte grafic funcția

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = \sqrt{3} \sin 4x - 8 \sin^2 x \cos^2 x.$$

Soluție. Deoarece $8 \sin^2 x \cos^2 x = 2(1 - \cos 2x)(1 + \cos 2x) = 2(1 - \cos^2 2x) = 2 - 2\cos^2 2x = 2 - (1 + \cos 4x) = 1 - \cos 4x$, $f(x)$ se scrie sub forma $f(x) = \cos 4x + \sqrt{3} \sin 4x - 1$.

Deci $f(x) = 2\left(\frac{1}{2} \cos 4x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 4x\right) - 1 =$

$$= 2 \cos \left(\frac{\pi}{3} \cos 4x + \sin \frac{\pi}{3} \sin 4x\right) - 1 = 2 \cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) - 1.$$

Amplitudinea funcției este

$$\frac{\max f - \min f}{2} = \frac{1 - (-3)}{2} = 2.$$

Funcția este periodică. Într-adevăr, dacă T este o perioadă, din $2 \cos \left[4(x + T) - \frac{\pi}{3}\right] - 1 = 2 \cos \left(4x - \frac{\pi}{3}\right)$, $\forall x \in \mathbf{R}$ și din $4x - \frac{\pi}{3} = y$, rezultă

$$\cos (y + 4T) = \cos y,\ \forall\, y \in \mathbf{R}.$$

Perioada principală a funcției cos fiind 2π, rezultă că perioada principală a funcției f este $\frac{\pi}{2}$.

Se figurează mai întîi punctele ale căror coordonate sînt trecute în tabelul:

x	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$
$f(x)$	0	1	0	-2	-3	-2	0

Graficul funcției pentru $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ este trasat în figura VI.18.

Exerciții

7. Să se determine perioada principală a funcțiilor:

a) $f_1 : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f_1(x) = \sin 5x$,

b) $f_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f_2(x) = \cos \frac{x}{5}$,

c) $f_3 : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f_3(x) = \sin 35x + \cos 42x$.

8. Să se arate că funcția

$g : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ g(x) = \sin 4x + \cos \sqrt{2}x$ nu este periodică.

9. Să se reprezinte grafic funcția

$h : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ h(x) = 4 \sin x \cos x - 4\sqrt{3} \cos^2 x + 2\sqrt{3} - 3.$

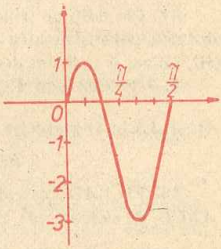


Fig. VI. 18

Probleme recapitulative

1. Fie A şi B două puncte distincte, M un punct situat pe dreapta AB şi numărul real $a \geqslant \frac{1}{2} \| AB \|$. Să se arate că există un singur punct $M \in AB$ astfel ca $\| AM \| = a$ şi $\| AM \| \geqslant \| BM \|$. Să se studieze şi cazul $0 < a < \frac{1}{2} \| AB \|$.

2. Să se arate că punctele A, B, C sînt coliniare dacă şi numai dacă

$$(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c) = 0,$$

unde s-a notat $a = \| BC \|$, $b = \| CA \|$, $c = \| AB \|$.

3. Dacă A, B, C, D sînt patru puncte coliniare şi F, G, H, I sînt respectiv mijloacele segmentelor $| AB |$, $| BC |$, $| CD |$, $| DA |$, atunci segmentele $| FH |$ şi $| IG |$ au acelaşi mijloc.

4. Se consideră o dreaptă d şi un punct A nesituat pe dreapta d. Din A se duce $AB \perp d$ $(B \in d)$ şi oblicile $| AM |$ şi $| AN |$ astfel ca M să fie mijlocul segmentului $| BN |$, $(B, M, N \in d)$. Să se arate că $\widehat{BAM} > \widehat{MAN}$.

5. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A. Dacă D este piciorul înălţimii duse din vîrful A, să se arate că punctul D este între punctele B şi C.

6. Fie AM o mediană în triunghiul ABC. Dacă $| AB | < | AC |$, să se arate că $\widehat{BAM} > \widehat{MAC}$.

7*. Să se arate că punctul de intersecţie al diagonalelor unui patrulater convex este acel punct din plan ale cărui distanţe la cele patru vîrfuri ale patrulaterului au suma minimă. Rămîne valabilă această proprietate pentru un patrulater concav?

8*. Fie ABC un triunghi, iar O un punct din planul triunghiului. Dacă punctele B şi C sînt de o parte şi de alta a dreptei AO, iar punctele C şi A de o parte şi de alta a dreptei OB, atunci A şi B sînt de o parte şi de alta a dreptei OC.

9. Fie O un punct în interiorul triunghiului ABC. Dreptele BO şi CO intersectează AC şi AB în D respectiv E. Ştiind că unghiul $\widehat{BAC}$ este obtuz, să se arate că

$$\| BD \| + \| CE \| > \| BE \| + \| ED \| + \| DC \|.$$

10. Fie $| AD |$ cea mai mare, iar $| BC |$ cea mai mică latură a patrulaterului convex $ABCD$. Să se arate că:

$$\widehat{ABC} > \widehat{ADC} \text{ şi } \widehat{BCD} > \widehat{BAD}.$$

11. Se dă un triunghi OAB, un punct C pe semidreapta opusă lui $|OA$ şi un punct $D \in |OB|$. Să se demonstreze că semidreapta $|CD$ şi segmentul $|AB|$ au un punct comun.

12. Fie $\widehat{AOB}$ şi $\widehat{A'O'B'}$ unghiuri opuse la vîrf ($O \in |AA'|$), $C \in \text{Int } \widehat{A'OB'}$, $D \in |OA$ şi $P \in CD$.
Să se arate:

$$P \in \text{Int } \widehat{AOB} \Leftrightarrow D \in |CP|.$$

13. Să se arate că două diagonale oarecare ale unui pentagon convex, considerate ca segmente închise, au un punct comun.

14. Să se arate că două triunghiuri dreptunghice care au respectiv înălţimile şi medianele corespunzătoare unghiurilor drepte congruente, sînt congruente.

15. Se consideră trapezul $ABCD$ ($|AB|$ baza mare, $|CD|$ baza mică) şi se notează cu O intersecţia diagonalelor, iar cu E, F punctele în care paralela prin O la baze intersectează respectiv pe AD şi BC. Pe bazele trapezului se construiesc în exterior pătratele $AA'B'B$ şi $CC'D'D$. Să se demonstreze că:

a) dreptele $A'C'$ şi $B'D'$ conţin punctul O,

b) dreptele $A'D'$ şi $B'C'$ conţin respectiv punctele E şi F.

16. Prin vîrful C al triunghiului ABC se construieşte o dreaptă d_1 care nu mai are alte puncte comune cu triunghiul şi se notează cu A_1, B_1, G_1 proiecţiile pe dreapta d_1, respectiv ale punctelor A, B, G unde G este centrul de greutate al triunghiului ABC. Să se arate că:

i) $\|AA_1\| + \|BB_1\| = 3\,\|GG_1\|$,

ii) dacă d_2 este o dreaptă ce nu are nici un punct comun cu triunghiul ABC iar A_2, B_2, C_2, G_2 sînt proiecţiile pe d_2 respectiv ale punctelor A, B, C, G atunci:

$$\|AA_2\| + \|BB_2\| + \|CC_2\| = 3\,\|GG_2\|.$$

17. Un trapez dreptunghic în care distanţa dintre baze este medie proporţională între lungimile bazelor este ortodiagonal (diagonalele sînt perpendiculare).

18*. Într-un triunghi isoscel ABC ($|AB| \equiv |AC|$), $\|AB\| > \|BC\|$ se construieşte înălţimea AD, $D \in BC$ şi bisectoarea BE, $E \in |AC|$. Dreptele AB şi DE se intersectează în F. Să se arate că

$$\frac{\|DE\|}{\|DF\|} = \frac{\|AB\| - \|BC\|}{\|AB\| + \|BC\|}.$$

19.** Pe laturile triunghiului ABC se construiesc, cu vîrfurile în exterior, triunghiurile ADB, BEC şi CFA astfel încît

$$\frac{\|AD\|}{\|BD\|} = \frac{\|BE\|}{\|EC\|} = \frac{\|CF\|}{\|FA\|} = k \text{ şi } m(\widehat{ADB}) = m(\widehat{BEC}) = m(\widehat{CFA}) = \alpha.$$

Să se demonstreze că:

i) mijloacele M, N, P, Q ale segmentelor $|AC|$, $|DC|$, $|BC|$ şi $|EF|$ sînt vîrfurile unui paralelogram.

ii) în acest paralelogram două unghiuri au măsura α şi raportul lungimilor a două laturi este k.

Indicaţie. S şi T fiind mijloacele segmentelor $|CE|$, $|CF|$, se va arăta că triunghiurile SPQ şi TQM sînt asemenea cu CBA.

20.** Se dau punctele A şi B. Să se construiască un pătrat pe ale cărui laturi să se afle punctele A, B şi suma distanţelor de la punctul A la vîrfurile pătratului să fie minimă.

21. Fie M un punct în interiorul sau exteriorul unui cerc. Notăm cu $|AB|$ diametrul ce trece prin M ($M \in |OA|$). Să se demonstreze că pentru orice punct N al cercului, distinct de A şi de B avem: $\|MA\| < \|MN\| < \|MB\|$.

22. Fie $\mathcal{C}(O, r)$ și $\mathcal{C}(O', r')$ două cercuri tangente în A; o dreaptă h care conține pe A mai taie cercurile respectiv în B și B'. Să se demonstreze că dreptele OB și $O'B'$ sînt paralele.

23. Fie $\mathcal{C}$ și $\mathcal{C}'$ două cercuri tangente în A, h tangenta comună la $\mathcal{C}$ și $\mathcal{C}'$ care conține pe A; M fiind un punct al lui h, diferit de A, cercul de centru M și rază $\|MA\|$ taie pe $\mathcal{C}$ în A și B, iar pe $\mathcal{C}'$ în A și B'. Să se demonstreze că dreptele MB și MB' sînt respectiv tangente la $\mathcal{C}$ și $\mathcal{C}'$.

24. Într-un cerc se înscrie triunghiul isoscel ABC cu $|AB| \equiv |AC|$. Două drepte ce trec prin A intersectează latura $|BC|$ în M și N și cercul în M' și N'. Să se arate că patrulaterul MM' și $N'N$ este înscriptibil.

25. Se dă cercul cu centrul în O și diametrul $|AB|$ care se prelungește cu $|BC| \equiv |OA|$ ($\|AC\| = 3\,\|OA\|$). Perpendiculara în mijlocul lui $|AC|$ taie cercul în D și D'. Să se arate că CD este tangentă la cerc.

26. Fie A un punct fix, iar P un punct variabil al unui cerc. Să se afle locul geometric al punctului M de intersecție a bisectoarei unghiului $\widehat{POA}$ cu cercul circumscris triunghiului POA.

27*. Trei cercuri congruente care au un punct comun H, se mai intersectează două cîte două în punctele A, B și C. Să se demonstreze că cercul circumscris triunghiului ABC este congruent cu cercurile date („problema piesei de 5 lei a lui Gh. Țițeica").

28. Vîrfurile B și C ale triunghiului ABC sînt fixe și $m(\widehat{BAC})$ este constantă. Să se afle locul geometric al proiecției M al ortocentrului triunghiului ABC pe mediana $|AD|$.

29. În patrulaterul inscriptibil $ABCD$ are loc relația $\|AB\| \cdot \|DC\| + \|AD\| \cdot \|BC\| = \|AC\| \cdot \|BD\|$ (Teorema lui Ptolemeu).

30. Se dau cercurile $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ și $\mathcal{C}(O_2, r_2)$. Fie CD o tangentă comună exterioară, C și D fiind punctele de tangență. Să se demonstreze că cercul de diametru CD intersectează dreapta O_1O_2 dacă și numai dacă cercurile $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ și $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ sînt exterioare.

31. Se dau punctele $A(1 - a, 1 + a)$, $B(5 - a, 1 + 5a)$, $C(1 - 5a, 5 + a)$, $D(5 - 5a, 5 + 5a)$. Să se arate că segmentele $|AD|$ și $|BC|$ sînt congruente și să se explice geometric acest rezultat.

32. Să se scrie ecuațiile înălțimilor triunghiului determinat de dreptele $y = 2x$, $y = 10x$, $y = ax + b$, $a \neq 2$, $a \neq 10$, $b \neq 0$. Să se verifice că mediatoarele acestui triunghi sînt concurente.

33. Să se determine numerele reale $t \in (0, 6\pi)$, astfel ca $F(t) = M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

34. Să se determine numerele reale t astfel ca:

a) $F(t) = M\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, b) $F(t) = M\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

c) $F(t) = M\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, d) $F(t) = M\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

35. Să se reprezinte grafic funcțiile:

a) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 4 \sin x$,

b) $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $h(x) = \sin x - |\sin x|$,

c) $i : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $i(x) = 2 \cos x - |\cos x|$,

d) $j : \mathbf{R} \to \{k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\} \to \mathbf{R}$, $j(x) = \frac{|\sin x|}{\sin x}$,

e) $k : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $k(x) = \sin x + 2 \cos x$,

f) $l : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $l(x) = \max(\sin x, \cos x)$.

36. Dacă $\operatorname{tg} x = \frac{2}{5}$, să se calculeze: $\sin 2x$, $\cos 4x$, $\frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{\sin^4 x + \cos^4 x}$.

37. Să se verifice identitățile:

a) $\cos a + \sqrt{3} \sin a = 2 \cos \left(\frac{\pi}{3} - a\right)$,

b) $\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b + (\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b) \operatorname{ctg} (a + b) = 1$,

c) $\operatorname{tg}^2 a + \operatorname{ctg}^2 a = 2 \frac{3 + \cos 4a}{1 - \cos 4a}$,

d) $\frac{\sin 2a}{1 + \cos 2a} \cdot \frac{\cos a}{1 + \cos a} \cdot \frac{\cos \frac{a}{2}}{1 + \cos \frac{a}{2}} \cdot \frac{\cos \frac{a}{4}}{1 + \cos \frac{a}{4}} = \operatorname{tg} \frac{a}{8}$.

38. Să se transforme în produs:

a) $\cos(a + b + c) + \cos(a + b - c) + \cos(a + c - b) + \cos(b + c - a)$,

b) $1 + \cos a + \cos 2a$, c) $1 + \cos a + \sin a$, d) $1 - \sin a - \cos 2a$.

39. Să se calculeze numerele:

a) $\sin^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \sin^2 \frac{7\pi}{8}$,

b) $\sin^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{3\pi}{12} + \sin^2 \frac{5\pi}{12} + \sin^2 \frac{7\pi}{12} + \sin^2 \frac{9\pi}{12} + \sin^2 \frac{11\pi}{12}$,

c) $\cos^4 \frac{\pi}{8} + \cos^4 \frac{3\pi}{8} + \cos^4 \frac{5\pi}{8} + \cos^4 \frac{7\pi}{8}$,

d) $\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{12} + \operatorname{tg}^2 \frac{5\pi}{12}$.

40. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\sin 2x = \cos^2 x$, b) $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos 2x$,

c) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x + 1}$, d) $\cos \left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cos \left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$,

e) $4 \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \cos x - 3 \sin x - 1 = 0$.

41. Să se discute și să se rezolve ecuațiile:

a) $\cos 2x + (2m - 1) \sin x + m - 1 = 0$,

b) $m \cos x - (m + 1) \sin x - m = 0$,

c) $3m \sin 2x + (m - 1) \cos 2x - 1 = 0$.

42. După ce se aduc la forma $a \cos 2x + b \sin 2x + c = 0$ să se rezolve și să se discute, atunci cînd este cazul, ecuațiile:

a) $\cos^2 x + 3 \sin x \cos x + 1 = 0$,

b) $2\sqrt{3} \sin^2 x + 8 \sin x \cos x - 2\sqrt{3} \cos^2 x - 5 = 0$,

c) $\cos^2 x + 4 \sin x \cos x - 2 \sin^2 x - 2 = 0$,

d) $\cos^2 x + 2 \sin x \cos x - \sin^2 x = m$,

e) $4 \cos^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x + 2 \sin^2 x = m$.

Indicație. Deoarece $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$, $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$, $2\sin x \cos x = \sin 2x$, ecuația se scrie sub forma $\cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x = m - 3$. Deci $\cos 2x - \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\sin 2x = m - 3$. Se obține $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{m-3}{2}$. Ecuația are soluții dacă și numai dacă $1 \leqslant m \leqslant 5$.

43. Să se rezolve ecuațiile:

a) $4\sin t\cos t - 2(\sin t + \cos t) + 1 = 0$.

Soluție. Dacă $\sin t + \cos t = x$, atunci $\sin t\cos t = \frac{x^2-1}{2}$. Deci $4\frac{x^2-1}{2} - 2x + 1 = 0$. Ecuația $2x^2 - 2x - 1 = 0$ are soluțiile $x_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ și $x_2 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$. Revenind la substituție, din $\sin t + \cos t = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$, rezultă $\sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos t = \frac{1}{2}$ sau $\sin t = \frac{1}{2}$, $\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$. De asemenea, din $\sin t + \cos t = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$, rezultă $\cos t = \frac{1}{2}$, $\sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, sau $\cos t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin t = \frac{1}{2}$. Soluțiile ecuației sînt elementele mulțimii

$$\left\{(-1)^k\frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

b) $25\sin t\cos t - 35(\sin t + \cos t) + 37 = 0$,

c) $\sin^3 t + \cos^3 t = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Indicație. Din $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, rezultă $(\sin t + \cos t)^2 - 2\sin t\cos t = 1$ sau $2\sin t\cos t = (\sin t + \cos t)^2 - 1$. Se face substituția $\sin t + \cos t = x$ și se obține $x^3 - 3x + \sqrt{2} = 0$ sau $(x - \sqrt{2})(x^2 + \sqrt{2}x - 1) = 0$.

d) $\sin^3 t + \cos^3 t + \sin t\cos t = \frac{5}{16}$.

Indicație. Ecuația se scrie sub forma $(\sin t + \cos t)(1 - \sin t\cos t) + \sin t\cos t = \frac{5}{16}$. Dacă $\sin t + \cos t = x$, se obține $(2x-1)(8x^2 - 4x - 26) = 0$, cu soluțiile $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1+\sqrt{53}}{4}$, $x_3 = \frac{1-\sqrt{53}}{4}$. Deoarece $\sin t + \cos t = \sqrt{2}\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$, rezultă $x \in [-\sqrt{2}, +\sqrt{2}]$. Singura soluție situată în acest interval este x_1. Soluțiile ecuației rezultă deci din rezolvarea ecuației $\sin t + \cos t = \frac{1}{2}$.

44. Se dau punctele $M\left(\frac{a\sqrt{3}-a}{2}, \frac{3a - a\sqrt{3}}{2}\right)$ și $N\left(\frac{a - a\sqrt{3}}{2}, \frac{a\sqrt{3}-a}{2}\right)$. Să se determine măsurile unghiurilor triunghiului OMN, unde O este originea axelor de coordonate.

45. Să se afle măsurile unghiurilor triunghiului determinat de dreptele de ecuații:

$$2x - y + 3 = 0, \quad 5x + y - 2 = 0, \quad y = 1.$$

46. Fie P punctul de intersecție al dreptelor d' și d'' de ecuații $x + 4y - 5 = 0$ și $2x + 5y - 6 = 0$. Dacă $M \in d'$ și $N \in d''$ sînt două puncte de abscise mai mari decît abscisa lui P, să se calculeze numărul $t = \mu\,(\widehat{MPN})$.

Indicație. Punctul P are coordonatele (1,1). Numărul t nu depinde de poziția punctelor M și N respectiv pe cele două drepte. Luînd ca puncte M și N punctele de intersecție ale celor două drepte cu axa absciselor, din triunghiul MNP se obține $t = \operatorname{arctg} \frac{3}{22}$.

Indicații și răspunsuri

Capitolul I

§ 2.

2. Dacă am avea $AB = BC$, ar rezulta că $A, B, C \in AB$ în contradicție cu ipoteza; în mod analog nici $AB = AC$, nici $AC = BC$ nu este posibil.

4. 8; dacă $A \in DE$, șase drepte sînt distincte.

5. Nu. Se ține seamă de exerc. 4.

§ 3.

1. Nu, căci $\| AB \| = 4 \neq | x_B - x_A | = 3$.

2. $\| AB \| = 5$, $\| AC \| = 12$, $\| BC \| = 7$.

3. a) $x_B = -2$, b) $x_C = 5$.

4. $x_M = 2$, $x_N = 3$.

5. $x_M = 2$, $x_N = 6$.

§ 4.

9. Alegem un sistem de coordonate pe AB astfel ca $x_A < x_B$. Atunci $x_A < x_C < x_B$ și $x_A < x_D < x_C$, din care rezultă $x_A < x_D < x_C < x_B$.

10. Fie D un punct oarecare pe $| AC |$. Atunci din exerc. 9 rezultă că $D \in | AB |$.

13. Fie $| AB |$ un segment, $x_A = 0$, $x_B = b > 0$. Punctele cu abscisele $\frac{b}{2}, \frac{b}{3}, \ldots, \frac{b}{n}, \ldots$ aparțin segmentului $| AB |$.

§ 5.

3. d separă B, A și nu separă A, C, deci separă B, C. Pe de altă parte separă C, D, așadar conform teoremei 1 nu separă B, D.

4. Nu.

5. Fie $M \in | AB |$ și să presupunem că $M \notin S$. Atunci există $N \in [AM] \cap d$; dar $N \in | AB |$ (§ 4, exerc. 9), ceea ce este în contradicție cu $A, B \in S$. Așadar $| AB | \subset S$ și $[AB] \subset S$.

8. Deosebim cazurile: a) d este inclusă în semiplanul S sau în cel opus S'; atunci intersecţia este d sau $\varnothing$; b) d are un punct în S şi un punct în S'; atunci d intersectează frontiera lui S şi se aplică exerc. 7.

10. Se deduce că C şi C' sînt de o parte şi de alta a dreptei BB', deci $|CC'| \cap |BB'| = \{Q\}$. Se va arăta că $Q \in |BB'|$.

§ 6.

3. Fie S un semiplan deschis limitat de dreapta d. $P, Q \in S$ implică $|PQ| \subset S$ (§ 5, exerc. 5), deci S este o mulţime convexă. Pentru a arăta că $\bar{S} = S \cup d$ este o mulţime convexă se consideră cazurile: 1° $P, Q \in d$, atunci evident $|PQ| \subset d \subset \bar{S}$; 2° Dacă $P, Q \in S$, precum am văzut, $|PQ| \subset S \subset \bar{S}$; 3° $P \in d$, $Q \in S$, atunci conform exerciţiului 6, § 5 $|PQ| \subset S \subset \bar{S}$.

4. a) Fie $b = AB$, $c = AC$; avem $|BC| \subset |bC$ şi $|BC| \subset |cB$ (§ 5, exerc. 6), deci $|BC| \subset |bC \cap |cB = \text{Int}\,\widehat{BAC}$. b) Se aplică exerc. 7, § 5.

11. Conform exerciţiului 10 avem $AP \cap [BC] = \{A'\}$ şi $P \in |AA'|$. Se aplică corolarul teoremei 1, § 5 triunghiurilor ABA' şi $AA'C$.

12. Dreapta BB' taie segmentul $|AC|$ într-un punct P şi $P \in \text{Int}\,\widehat{AOC}$ (vezi exerc. 4a). Cum $O \notin AC$, avem $P \in |OB|$ sau $P \in |OB'|$ şi se aplică exerc. 4b).

13. Fie $A'B'$ astfel ca $O \notin |AA'|$, $O \in |BB'|$. Cazurile $Q \in \text{Int}\,\widehat{A'OB}$, $Q \in \text{Int}\,\widehat{AOB'}$, $Q \in |OA'|$, $Q \in |OB'|$ se rezolvă uşor. Fie $Q \in \text{Int}\,\widehat{A'OB'}$. Atunci există $\{R\} = AA' \cap |PQ|$ şi $\{R_1\} = BB' \cap |PQ|$. Dacă am avea $R \in |OA'|$ şi $R_1 \in |OB'|$, atunci întreaga mulţime $\text{Int}\,\widehat{AOB}$ s-ar găsi de aceeaşi parte a dreptei RR_1, ceea ce este imposibil deoarece $P \in RR_1$.

14. Deoarece patrulaterul este convex, $C \in \text{Int}\,\widehat{BAD}$. Din teorema transversalei rezultă că există $\{O\} \in |AC \cap |BD|$. Folosind acelaşi raţionament cu alt vîrf se deduce că $O \in |AC|$.

15. Fie $\{O\} = [AC] \cap [BD]$. Cum $|OC| \cap AB = \varnothing$ şi $|OD| \cap AB = \varnothing$, punctele C şi D sînt de aceeaşi parte a dreptei AB. La fel se arată proprietatea analoagă pentru dreptele BC, CD şi DA.

16. Dacă $ABCD$ este convex, fiecare vîrf este marcat. Dacă nu este convex, există o latură, să zicem $[AB]$, al cărei suport separă celelalte vîrfuri C şi D. Atunci $|CD|$ şi AB au un punct comun E şi $E \notin [AB]$ (căci definiţia noastră nu admite poligoane care se autointersectează). Putem presupune că $B \in |AE|$. Atunci B este un vîrf marcat, iar A, C, D nu sînt marcate.

17. Fie I intersecţia considerată. Este clar că $\text{Int}\,P \subset I$; iar din convexitatea poligonului rezultă că $P \subset I$, aşadar $\text{Int}\,P \cup P \subset I$. Pentru a demonstra incluziunea contrară se ia un punct $M \in I$. Dacă M nu aparţine suportului unei laturi evident $M \in \text{Int}\,P$. Dacă $M \in P_kP_{k+1}$, unde $[P_kP_{k+1}]$ este o latură a lui P, atunci $\hat{M}$ şi P_{k+1} sînt de aceeaşi parte a dreptei $P_{k-1}P_k$ sau $M = P_k$, deci $M \in [P_kP_{k+1}$ şi analog $M \in [P_{k+1}P_k$, deci $M \in [P_kP_{k+1}] \subset P$.

18. Se foloseşte exerc. 17 şi Teorema 1.

19. Avem $P_{n+1} \notin |dP_1$ şi $P_1 \in |dP_1$. Fie k cel mai mic indice pentru care $P_k \notin |dP_1$. Atunci $k \geqslant 2$ şi $[P_{k-1}P_k] \cap d \neq \varnothing$.

20. Presupunînd că d are în comun cu poligonul dat punctele distincte A, B, C, unul dintre aceste puncte este situat între celelalte două, de exemplu $B \in |AC|$. Punctul B se află pe o latură $[P_kP_{k+1}]$ a poligonului şi din ipoteză rezultă că $[P_kP_{k+1}] \not\subset d$. Aşadar $d \cap [P_kP_{k+1}] = \{B\}$ şi $|AC| \cap P_kP_{k+1} = \{B\}$, deci A şi C sînt de o parte şi de alta a lui P_kP_{k+1}, ceea ce nu e posibil la un poligon convex.

21. Notînd $d = P_2P_n$, avem $[P_3P_4] \cap d = \emptyset$, căci altfel d ar avea trei puncte comune cu poligonul, în contradicție cu exerc. 20. Rezultă că $P_4 \in |dP_3$ și la fel $P_5 \in |dP_4 = |dP_3$ etc. Așadar punctele $P_3, P_4, \ldots, P_{n-1}$ se găsesc de aceeași parte a lui P_2P_n.

23. Dacă $B \in L$ nu avem ce demonstra, fie deci $B \notin L$. A și B fiind de o parte și de alta față de anumite drepte P_kP_{k+1}, segmentul $[AB]$ va intersecta aceste drepte în cîte un punct Q_k. Fie $|AQ_l|$ cel mai mic dintre segmentele $|AQ_k|$ și să presupunem că $Q_l \notin L$. Atunci A și Q_l sînt de o parte și de alta a cel puțin unei drepte P_hP_{h+1}, deci pentru $\{Q_h\} = [AB] \cap P_hP_{h+1}$ avem $Q_h \in |AQ_l|$. Rezultă $|AQ_h| < |AQ_l|$ în contradicție cu alegerea lui Q_l. Deci $Q_l \in L$.

§ 7.

1. Nu.

2. a), b).

5. $m(\widehat{AOB'}) = 180 - m(\widehat{AOB})$, $m(\widehat{B'OC}) = 180 - m(\widehat{BOC})$, deci din $m(\widehat{AOB'}) + m(B'OC) < 180$ se obține:

$$360 - m(\widehat{AOB}) - m(\widehat{BOC}) < 180 \text{ și } m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{BOC}) > 180$$

în contradicție cu ipoteza. Rezultă că $|OB \subset \text{Int } \widehat{AOC}$.

§ 8.

3. Fie $|AB| > |CD|$, adică $\|AB\| > \|CD\|$. Există un punct unic $M \in |AB$ astfel ca $\|AM\| = \|CD\|$. Dacă am avea $B \in [AM]$, ar rezulta $\|CD\| = \|AM\| = \|AB\| + \|BM\| \geqslant \|AB\|$ în contradicție cu ipoteza. Deci $M \in |AB|$. Reciproca rezultă ușor.

12. Se construiește semidreapta $|OM$ în semiplanul limitat de OA și conținînd B în așa fel încît $\widehat{AOM} \equiv \widehat{COD}$ și se folosește teorema semidreptei interioare unui unghi.

14. $m(\widehat{DOC}) = \frac{1}{2} m(\widehat{AOC}) = \frac{1}{2} m(\widehat{COB}) = m(\widehat{COE})$ și $m(\widehat{DOC}) + m(\widehat{COE}) = 2m(\widehat{DOC}) = m(\widehat{AOC}) < 180$; ținînd seama și de faptul că D și E sînt de o parte și de alta a lui OC, din exerc. 5 § 7 rezultă că $|OC \subset \text{Int } \widehat{DOE}$, ceea ce împreună cu $m(\widehat{DOC}) = m(\widehat{COE})$ demonstrează că $|OC$ este bisectoarea unghiului $\widehat{DOE}$.

15. Fie unghiurile opuse la vîrf $\widehat{AOB}$ și $\widehat{A'OB'}$ ($O \in |AA'|$), $[OC$ bisectoarea unghiului $\widehat{AOB}$ și $[OD$ semidreapta opusă cu $[OC$. Se deduce ușor că $|OD \subset \text{Int } \widehat{A'OB'}$. $\widehat{A'OD} \equiv \widehat{AOC} \equiv \widehat{COB} \equiv \widehat{DOB'}$, deci $[OD$ este bisectoarea lui $\widehat{A'OB'}$. Deoarece prin ipoteză $[OD$ și $[OC$ sînt opuse, proprietatea este demonstrată.

18. Dacă $\widehat{AOB} \in 90°$, rezultatul este imediat. Tratăm cazul în care $B \in \text{Int } \widehat{AOA'}$ și B, A', B' se găsesc de aceeași parte a lui OB; celelalte cazuri revin ușor la acesta. Avem $B \in \text{Int } \widehat{AOA'}$, deci $\widehat{BOA'} < \widehat{AOA'} \equiv \widehat{BOB'}$ și de aici se deduce că $|OA' \subset \text{Int } \widehat{BOB'}$. Cu ajutorul axiomei U.3 se obține $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{A'OB'})$.

§ 9.

7. Deoarece pentagonul este convex, A și D sînt de aceeași parte a lui BC și A, B de aceeași parte a lui CD, deci $|CA \subset \text{Int } \widehat{BCD}$ și analog $|DA \subset \text{Int } \widehat{CDE}$. Rezultă că $m(\widehat{BCA}) = m(\widehat{BCD}) - m(\widehat{ACD}) = m(\widehat{CDE}) - m(\widehat{CDA}) = m(\widehat{EDA})$, adică $\widehat{BCA} \equiv \widehat{EDA}$.

10. Conform exerc. 10, § 5 $|BE| \cap |CD| = \{M\}$. Se arată succesiv: $\|BD\| = \|CE\|$, $\triangle DBC \equiv \triangle ECB$, $\widehat{DCB} \equiv \widehat{EBC}$, $|BM| \equiv |CM|$, $\triangle ABM \equiv \triangle ACM$, $\widehat{BAM} \equiv \widehat{CAM}$.

11. Se demonstrează pe rînd: $|CD| \cap AB = \{O\}$, $\triangle ABC \equiv \Delta BAD$, $\triangle ACD \equiv \triangle BDC$ (L.L.L.), $\triangle ACO \equiv \triangle BDO$ (U.L.U.), $|AO| \equiv |BO|$.

12. $\triangle AOB \equiv \Delta A'OB'$, $\triangle BOC \equiv \triangle B'OC'$, $\triangle COA \equiv \triangle C'OA'$, deci $|AB| \equiv |A'B'|$, $|BC| \equiv |B'C'|$, $|CA| \equiv |C'A'|$ și $\widehat{OCA} \equiv \widehat{OC'A'}$, $\widehat{OCB} \equiv \widehat{OC'B'}$. Deoarece punctele A, B, C nu sînt coliniare $\widehat{OCA} \not\equiv \widehat{OCB}$. Rezultă $\widehat{OC'A'} \not\equiv \widehat{OC'B'}$, din care se deduce că A', B', C' nu sînt coliniare. $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ pe baza teoremei L.L.L.

§ 10.

1. Presupunînd contrariul se ajunge la o contradicție cu teorema 1.

2. Se folosește teorema 1.

4. Deoarece $|AC \subset \text{Int } \widehat{MAN}$ (de ce?), $m(\widehat{MAN}) = m(\widehat{MAC}) + m(\widehat{CAN})$ și cum $|AB \subset \text{Int } \widehat{MAC}$, avem $m(\widehat{MAN}) = m(\widehat{MAB}) + m(\widehat{BAC}) + m(\widehat{CAN})$. În continuare, se folosește teorema 1 pentru triunghiurile ABM și ACN.

5. Fie $\hat{hk} \equiv \widehat{MAN}$; pe segmentul $|MN|$ se iau două puncte B, C astfel încît $m(\widehat{BAC}) < m(\hat{pq})$. Triunghiului ABC i se aplică exerc. 4.

7. Se folosește exerc. 3.

8. $m(\widehat{ABM}) > m(\widehat{ACM}) > m(\widehat{MDC})$ (de ce?); MA' fiind semidreapta opusă lui $|MA$, arătați că $|MD \subset \text{Int } \widehat{A'MC}$ și $m(\widehat{BMA}) = m(\widehat{A'MC}) > m(\widehat{CMD})$.

11. Fie $P' = AP_1P_2...P_nB$ și $P'' = AQ_1Q_2...Q_mB$ cele două poligoane convexe. Deoarece $P_1 \in \text{Int } \widehat{BAQ_1}$, punctele B și Q_1 sînt de o parte și de alta a lui AP_1, prin urmare folosind exerc. 19, § 6, dreapta AP_1 intersectează linia poligonală $Q_1Q_2...Q_mB$ într-un punct R_1, $R_1 \in [Q_kQ_{k+1}]$. Conform exerc. 10 $\|AP_1\| + \|P_1R_1\| < \|AQ_1\| + \|Q_1Q_2\| + ... + \|Q_kR_1\|$; se repetă procedeul și se adună inegalitățile obținute.

12. Se ia E astfel ca D să fie mijlocul lui $|AE|$ și se aplică teorema 2 triunghiului AEC.

13. Din $\|AA_1\| > \|AC\| - \frac{\|BC\|}{2}$ și din relațiile analoage se obține prima inegalitate. Pentru cea de-a doua se va utiliza exerc. 12.

§ 11.

1. L.U.U.

3. Se aplică teorema 2.

5. Se arată că $|AB| \equiv |CD|$, apoi se aplică teorema 2 triunghiurilor ABC și ADC.

§ 12.

1. Se folosește exerc. 2, § 10. Presupunînd de exemplu $C \in |BA_1|$, rezultă că $\widehat{ACA_1}$ este ascuțit, deci $\widehat{ACB}$ obtuz.

2. Se consideră mai întîi cazul $B \in |A'C|$; atunci $\widehat{ABC} > \widehat{ACB}$, deci $\|AC\| > \|AB\|$.

3. Unul dintre unghiurile $\widehat{ADB}$, $\widehat{ADC}$ este obtuz; acestuia i se opune o latură mai mare decît $|AD|$.

7. a) Rezultă cu ajutorul exerc. 6. b) Axele de simetrie ale dreptei d sînt toate dreptele perpendiculare pe d și dreapta d. c) Fie $M \in |AM|$ A', B', M' simetricele punctelor A, B, M față de dreapta d și $\{A''\} = AA' \cap d$, $\{B''\} = BB' \cap d$. Se arată că $M \in |AB| \Rightarrow M' \in |A'B'|$ și implicația inversă. Pentru a arăta că $|AB| \equiv |A'B'|$, se observă mai întîi că $\triangle A''BB'' \equiv \triangle A''B'B''$, apoi că $\triangle A''AB \equiv \triangle A''A'B'$.

§ 13.

2. Locul geometric se compune din două semidrepte simetrice față de AB.

4. Fie d' mediatoarea segmentului $|AB|$. a) Dacă $d \cap d' = \{C\}$, C este punctul căutat; b) Dacă $d \cap d' = \emptyset$, problema nu are soluție; c) Dacă $d = d'$, orice punct al lui d este o soluție.

§ 14.

2. $\widehat{CBA}$ și $\widehat{DAB}$ sînt unghiuri alterne interne congruente.

Exerciții recapitulative

4. Determinăm punctul $D \in |BC$ astfel ca $|BD| \equiv |B'C'|$. Dacă $D = C$, proprietatea este evidentă. Dacă $D \neq C$, triunghiul ADC este isoscel și $\widehat{BDA} \equiv \widehat{BCA}$, ceea ce este imposibil deoarece unul dintre aceste unghiuri este ascuțit, celălalt obtuz.

8. Se va arăta că simetricul segmentului $|BC|$ față de mediatoarea d coincide cu $|AD|$, de unde rezultă că C și D sînt simetrice față de d.

13. Fie B și C două puncte fixe pe d și B', C', P' simetricele lui B, C, P față de punctul A. Folosind exerc. 12. § 9 rezultă că $P' \in B'C'$.

15. Fie S semiplanul limitat de MN care conține pe D. Avem $A, C, D \in S$, deci $P, Q \in S$.

Capitolul II

§ 1.

8. D fiind simetricul lui A față de M se obține un dreptunghi $ABDC$.

12. a) Se va arăta că triunghiul BCD este isoscel. b) și c) Fie F simetricul lui A față de D; din exerc. 9 rezultă că $\widehat{ABF} \equiv 90°$ și $|BF| = |BE|$, deci $F = E$.

13. $ABCD$ fiind patrulaterul, A și C sînt de o parte și de alta a lui BD căci în caz contrar laturile $|BC|$ și $|AD|$ s-ar intersecta. Așadar $\widehat{ABD}$ și $\widehat{BDC}$ sînt unghiuri alterne interne. $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$.

§ 2.

12. Dacă $Q = \mathrm{pr}_P N$, arătați că $\triangle OPM \equiv \triangle MQN$. Atunci $|MQ| \equiv |OP| \equiv |PA|$ din care rezultă $|AQ| \equiv |PM| \equiv |NQ|$, adică triunghiul QAN este isoscel. Astfel $N \in |AB$. Arătați că oricare ar fi $N' \in |AB$, punctul N' aparține locului geometric (trebuie să se determine o poziție convenabilă pentru punctul M).

13. Fie A și C unghiurile obtuze ale patrulaterului convex $ABCD$ și M mijlocul segmentului BD. Arătați că exerc. recap. 1 de la Cap. I se aplică triunghiurilor ABD și BCD.

§ 3.

1. $MQ \parallel BD \parallel NP$; $MN \parallel AC \parallel QP$.

7. i) Se proiectează P pe BC în P', se intersectează paralela prin Q la PP' cu BC în Q, și cu paralela prin A la BC în Q''; $\triangle BPP' \equiv \triangle AQQ''$; se aplică teorema 3 trapezului $PP'Q'Q$. ii) O paralelă la BC prin mijlocul segmentului $|AB|$.

§ 4.

4. i) Fie A'' simetricul lui B față de C. $\triangle HA'B' \equiv \triangle CA''A$; rezultă $\|A'B'\| = \|AA''\| = 2\|CP\|$. ii) Fie $\{O\} = A'B' \cup CH$ și E intersecția lui AA'' cu perpendiculara prin C pe CH. Demonstrați că $\triangle HA'D \equiv \triangle CA''E$ și $|AE| \equiv |EA''|$.

5. Folosiți teorema 2.

6. Se observă că CF și AD sînt înălțimi în triunghiul AHC.

§ 6.

3. Fie $\{O\} = |AC| \cap |BD|$. Din teorema 2 rezultă

$$\frac{\|AO\|}{\|OE\|} = \frac{\|DO\|}{\|OB\|} \text{ și } \frac{\|CO\|}{\|OA\|} = \frac{\|BO\|}{\|OF\|}.$$

5. iii) Se ia $D' \in |AC|$ astfel ca $DD' \parallel BJ$.

§ 7.

1. Fie de exemplu $C \in |BD|$. Intersectăm paralela prin C la AD cu AB în E. Se folosește teorema lui Thales și faptul că triunghiul AEC este isoscel.

§ 8.

8. Folosind exerc. 7, arătați mai întîi că proprietatea are loc pentru $M = D$, apoi aplicați teorema fundamentală a asemănării.

9. Fie tabla triunghiulară ABC. Pe latura cea mai mare $[BC]$ se construiește în exteriorul triunghiului ABC pătratul $BCDE$. Fie $\{M\} = AE \cap BC$ și $\{N\} = AD \cap BC$. Arătați că $[MN] \subset [BC]$ și că $[MN]$ este o latură a pătratului cerut.

12. Fie trapezul $ABCD$, $E \in |AD|$, $F \in |BC|$;

$$\frac{\|EO\|}{\|AB\|} = \frac{\|DO\|}{\|DB\|} = \frac{\|CO\|}{\|CA\|} = \frac{\|OF\|}{\|AB\|}, \text{ deci } \|EO\| = \|OF\|.$$

13. Folosiți exerc. 12.

§ 9.

1. Dacă $M \in |AB|$, fie $M' = \mathrm{pr}_d M$. Din faptul că $AC \parallel BD \parallel MM'$ rezultă că $M' \in |CD|$. În mod asemănător rezultă implicația inversă.

2. Se ţine cont de exerciţiul precedent şi de faptul că reuniunea a două segmente închise avînd acelaşi suport şi un punct comun este un segment închis.

3. Se scrie teorema catetei pentru $|AB|$ şi $|AC|$ şi teorema înălţimii pentru $|AD|$.

5. Se disting două cazuri: a) unghiul $\hat{B}$ este ascuţit; atunci $D \in |BC|$, $\|BD\| = 5$, $\|DC\| = 16$, $\|AC\| = 20$, $\|BC\|^2 < \|AB\|^2 + \|AC\|^2$, rezultă că $\hat{A}$ este unghi ascuţit şi că $C \in |BE|$. Se exprimă $\|AE\|$ din triunghiurile dreptunghice ADE şi ABE, din $\|AE\|^2 = \|AE\|^2$ se obţine $\|CE\| = 12{,}8$ şi $\|AE\| = 31{,}2$, deci perimetrul $ACE = 64$. b) unghiul $\hat{B}$ este obtuz; atunci $B \in |DC|$, $\|DC\| = 26$, $\|AC\| = 2\sqrt{205}$ şi $D \in |EB|$. Se obţine $\|DE\| = \frac{72}{13}$ şi $\|AE\| = \frac{12}{13}\sqrt{205}$.

7. Din triunghiul ABD rezultă că $\|AB\|^2 = \|BD\| \cdot \|BM\|$, unde $\{M\} = AF \cap BD$, iar din faptul că $\triangle BMF \sim \triangle BCD$ rezultă $\|BD\| \cdot \|BM\| = \|BF\| \cdot \|BC\|$.

8. Folosind teorema lui Pitagora se determină $\|AB\| = 24$, $\|AC\| = 18$, iar din teorema bisectoarei (vezi ex. 2 § 7) se obţine $\|AD\| = 9$ şi $\|DB\| = 15$.

9. Se exprimă $\|BE\|^2$ şi $\|BF\|^2$ din triunghiurile dreptunghice ABE şi BCF folosind şi ipoteza rezultă $\|BE\|^2 = \|AB\|^2 + \|DC\|^2$ şi $\|BF\|^2 = \|BC\|^2 + \|AD\|^2$, dar, pentru că $\|AB\|^2 = \|AD\|^2 + \|BC\|^2 - \|DC\|^2$, rezultă $\|BE\| = \|BF\|$.

Exerciţii recapitulative

1. i) Fie trapezul $ABCD$ cu $AD \parallel BC$ şi $\|AD\| = b$, $\|BC\| = a$, $\{E\} = AB \cap DC$ şi $x = d(E, AD)$; $\triangle ADE \sim \triangle BCE$ deci $\frac{b}{a} = \frac{x}{x+h}$, de unde rezultă că $x = \frac{bh}{a-b}$.

ii) fie $\{O\} = AC \cap BD$ şi $y = d(O, BC)$; $\triangle BOC \sim \triangle DOA$, deci $\frac{a}{b} = \frac{y}{h-y}$, de unde rezultă că $y = \frac{ah}{a+b}$.

2. Se exprimă $\|AB\|^2$ şi $\|AC\|^2$ folosind teorema lui Pitagora generalizată în triunghiurile ABM şi AMC şi se adună cele două expresii.

3. Fie $\{M\} = AD \cap BE$. Aplicînd teorema bisectoarei pentru $|AD|$ şi $|BM|$ se obţine $\|BD\| = 20$ şi $\frac{\|AM\|}{\|MD\|} = 2$.

4. Fie M' astfel încît $\widehat{ABM'} \in 60°$, $M' \in \text{Int } ABCD$ şi $|BM'| \equiv |BA|$. Atunci ABM' este un triunghi echilateral, triunghiurile $M'BC$ şi $M'AD$ sînt isoscele, $m(\widehat{M'CB}) = m(\widehat{M'DA}) = 75$ şi $m(\widehat{M'CD}) = m(\widehat{M'DC}) = 15$ din semidreptele $|CM|$ şi $|CM'|$ coincid, la fel $|DM|$ şi $|DM'|$, deci $M = M'$.

5. $\|EG\| = 2\|AE\|$, $\|AE\| = 2\|EH\|$, $\triangle EDH \sim \triangle ECA$.

6. Se exprimă $\|CB\|^2$ şi $\|CD\|^2$ prin teorema lui Pitagora generalizată, din triunghiurile ABC şi ADC şi se adună membru cu membru.

7. i) $\triangle ADC \equiv \triangle BCF$ (C.U.) şi $\triangle ADB \equiv \triangle CBE$ (C.U.), deci $|FC| \equiv |DC|$ şi $|BD| \equiv |BE|$.

ii) $\widehat{EDA} \equiv \widehat{BED} \equiv \widehat{EDB}$, $\widehat{ADF} \equiv \widehat{DFC} \equiv \widehat{FCD}$.

8. Se arată că laturile patrulaterului $ABCD$ sînt paralele două cîte două cu diagonalele rombului (A, B, C, D fiind mijloacele diagonalelor pătratelor) și că două laturi vecine sînt congruente ca laturi de triunghiuri congruente.

9. Se determină $\| AC \| = 50$, folosind formula care dă lungimea medianei (ex. 2), iar pentru calcularea distanței $d(M, BC)$ se aplică teorema lui Pitagora generalizată în triunghiul BMC.

10. Fie $E = pr_{BC}A$. Atunci $\| AE \| = 12$, $\| BE \| = 16$, deci $\| AB \| = 20$. În triunghiul dreptunghic BAD se aplică teorema catetei și se obține $\| AB \|^2 = \| BD \| \cdot \| BE \|$, de unde $\| BD \| = 25$. Rezultă $\frac{\| CD \|}{\| BD \|} = \frac{7}{25}$.

11. Din $M \in | NC |$ rezultă $N \in | AP |$ în contradicție cu $| AP | \equiv | PN |$. Deci $M \in | MB |$; $| MP |$ este linie mijlocie în triunghiul ABN, deci M este mijlocul lui $| BN |$. În triunghiul ABN, $| AM$ este înălțime și mediană deci este isoscel și $| AB | \equiv | AN |$. Pe de altă parte, $| AN$ fiind mediană în triunghiul dreptunghic ABC rezultă $| AN | \equiv | BN |$, deci triunghiul ABN este echilateral. Rezultă $\hat{B} \equiv 60°$, $\hat{C} \equiv 30°$.

15. Se calculează $\| AE \|$, $\| EF \|$, $\| AF \|$ și se arată că $\| AF \|^2 = \| AE \|^2 + \| EF \|^2$.

18. Fie O punctul de intersecție al diagonalelor trapezului și $E \in | AB |$, $F \in | DC |$. $\frac{\| EO \|}{\| AD \|} = \frac{\| BE \|}{\| BA \|}$ și $\frac{\| EO \|}{\| BC \|} = \frac{\| AE \|}{\| BA \|}$, deci $\frac{\| EO \|}{\| AD \|} + \frac{\| EO \|}{\| BC \|} = 1$. Ținînd seama că $\| EF \| = 2 \| EO \|$ (exerc. 12, § 8), rezultă relația cerută.

19. Fie M, N, P, Q respectiv mijloacele segmentelor $| AF |$, $| CE |$, $| BF |$, $| DE |$ și O mijlocul segmentului $| EF |$; $| MP |$ este linie mijlocie în triunghiurile ABF, AFE, EFB, deci trece prin O și $| OM | \equiv | OP |$. Analog, $| QN |$ este linie mijlocie în triunghiurile DEC, DEF și FEC, deci trece de asemenea prin O și $| OQ | \equiv | ON |$. Rezultă că $MQPN$ este paralelogram.

20. Se aplică teorema lui Thales pentru triunghiurile BAM ($AM \parallel ED$) și AMC ($FD \parallel AM$).

21. Triunghiul ADC este isoscel, deci $\| AD \| = \| BC \| = 2b$, iar $\| AC \|$ se calculează cu teorema lui Pitagora generalizată în triunghiul ABC.

Capitolul III

§ 1.

1. Mediatoarea segmentului determinat de punctele date.

3. A, B, C fiind cele trei puncte comune, centrele cercurilor coincid cu punctul de intersecție O al mediatoarelor triunghiului ABC și cele două raze sînt egale cu $\| OA \|$.

5. Fie $\mathcal{C}(O, r)$ un cerc și M' simetricul unui punct oarecare M față de O, adică $O \in | MM' |$ și $\| OM \| = \| OM' \|$. Arătați că $M \in \mathcal{C}(O, r) \Rightarrow M' \in \mathcal{C}(O, r)$. Ținînd seama că $(M')' = M$, de aici rezultă $M \in \mathcal{C}(O, r) \Leftrightarrow M' \in \mathcal{C}(O, r)$.

8. Arătați că se poate aplica teorema 2, cazul a.

9. Presupunînd contrariul, există $A \in \mathcal{C}(O, r)$ astfel ca A și O să fie de o parte și de alta a dreptei d. Atunci există $C \in d \cap | OA |$. Deduceți că d conține un punct din Int $\mathcal{C}(O, r)$ și folosiți exerc. 8.

11. $\mathcal{C}(A, \| AB \|)$.

12. P și C fiind mijloacele segmentelor $|OM|$ și $|OA|$, punctul P se află pe cercul $\mathcal{C}\left(C, \frac{r}{2}\right)$. Reciproc, dacă $P' \in \mathcal{C}\left(C, \frac{r}{2}\right)$, fie M' simetricul lui A față de P'. Se arată că $\|OM'\| = r$, deci $M' \in \mathcal{C}(O, r)$ și astfel orice punct al lui $\mathcal{C}\left(C, \frac{r}{2}\right)$ aparține locului geometric. Rezultă că locul geometric căutat este cercul $\mathcal{C}(O, r)$.

14. Dacă A, B, C, D sînt puncte pe un cerc astfel încît dreapta AC separă punctele B și D, atunci segmentele $|AC|$ și $|BD|$ au un punct comun.

§ 2.

3. *Cazul a*): C și D se găsesc de aceeași parte a dreptei AB. Atunci din teorema semidreptei interioare unui unghi rezultă că sau $|AC \subset \text{Int } \widehat{BAD}$ sau $|AD \subset \text{Int } \widehat{BAC}$. În primul caz se duce diametrul $MN \perp AD$ și din $\widehat{AB} \equiv \widehat{CD}$ și $\widehat{AM} \equiv \widehat{MD}$ se deduce că B și C sînt de o parte și de alta a lui MN, $\widehat{BN} \equiv \widehat{NC}$ și $BC \perp MN$; în cazul al doilea se procedează analog schimbînd rolul lui C și D. *Cazul* b) C și D sînt de o parte și de alta a dreptei AB. Arătați că există punctul $P \in |AB| \cap |CD|$ și că arcele mici $\widehat{AC}$ și $\widehat{BD}$ sînt congruente, reducînd astfel problema la cazul a).

4. Se va folosi că $OM \perp AB$.

10. Un cerc concentric cu cercul dat.

11. Dreaptă simetrică cu d față de mijlocul segmentului AB, din care se scoate punctul situat pe AB.

12. Fie O, O' centrele (M pe cercul cu centrul O), Q și Q' proiecțiile lui O, O' pe MN. Atunci $\|QQ'\| = \frac{1}{2}\|MN\| = \|PM\|$, deci $\|QA\| = \|PQ'\|$ și segmentele $|QQ'|$ și $|AP|$ au același mijloc R (vezi și exerc. 8, Cap. I. § 8). Notînd cu C mijlocul segmentului $|OO'|$, $|CR|$ este linie mijlocie în trapezul $OQQ'O'$, deci $CR \perp AP$ și $\|CP\| \equiv \|CA\|$. Locul geometric al punctului P este cercul $\mathcal{C}(C, \|AC\|)$.

§ 3.

1. Se folosește teorema 2 și teorema de construcție a unui unghi.

2. NM' și NM'' coincid cu perpendiculara prin N și NM

8. Se va arăta că $\widehat{BAO} \equiv \widehat{CBO}$ și $\widehat{ECF} \equiv \widehat{CBO}$.

9. Se tratează separat cazurile: A și O de aceeași parte sau de o parte și de alta a lui BC respectiv $O \in BC$

10. b) MN paralel cu dreapta centrelor.

11. Locul geometric este cercul de diametru $|OA|$, dacă $A \in \text{Int } \mathcal{C}(O, r)$, respectiv un arc al unui cerc analog, dacă $A \notin \text{Int } \mathcal{C}(O, r)$.

12. Fie $|CD|$ diametrul perpendicular pe AB. Dacă $M \in \widehat{ACB} - \{C\}$, $\triangle OMM' \equiv \triangle COP$, unde $M' = \text{pr}_{AB} M$(L.U.L.). Locul geometric se compune din cercurile de diametre $|OC|$ și $|OD|$.

13. Se vor considera cazurile: 1) $P, Q \in$ arcul mare $\widehat{AB}$, 2) $P \in$ arcul mare $\widehat{AB}$, $Q \in$ arcul mic $\widehat{AB}$, 3) $P, Q \in$ arcul mic $\widehat{AB}$ (în cazul $\|PQ\| < \|AB\|$). Se obțin arce capabile de $(\alpha + \beta)°$, $(180 - \alpha - \beta)°$, $|\alpha - \beta|°$ și $(180 - |\alpha - \beta|)°$, unde $\alpha = m(\widehat{AB})$, $\beta = m(\widehat{CD})$, care împreună formează două cercuri care trec prin A și B.

14. Două arce de cerc avînd capetele A și B.

15. Dacă PQ taie din nou cercul dat în R, unghiul $\widehat{AQR}$ este de măsură constantă și punctul R este mereu pe aceeași parte a diametrului cu un capăt în A. Se deduce că R este un punct fix.

16. Dacă CD este tangentă la cercul $\mathcal{C}$ circumscris triunghiului ABC, $m(\widehat{ACD}) = m(\widehat{ABC}) = \frac{m(\widehat{AC})}{2}$. Reciproc, dacă $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ACD})$, luăm pe tangenta în C la cercul $\mathcal{C}$ un punct $E \in \text{Int } \widehat{ACB'}$. Atunci $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ACE})$, deci în virtutea teoremei de construcție a unui unghi $|CD| = |CE|$.

17. Se va arăta că tangentele în F la cele două cercuri coincid și în acest scop se va folosi exercițiul 16. Mai întîi se observă că B și C sînt de aceeași parte a dreptei DE (căci $CB \parallel DE$); luăm de partea cealaltă a lui DE punctul G astfel încît $\widehat{EFG} \equiv \widehat{ECF}$. Rezultă că FG este tangentă cercului (FCE). Dar $\widehat{FBD} \equiv \widehat{ECF}$, deci $\widehat{DFG} \equiv \widehat{FBD}$ și astfel FG este tangentă și cercului (FBD).

18. a) Cercul simetric cu $\mathcal{C}(O, r)$ din care lipsesc punctele A și B. b) I fiind centrul cercului înscris, avem $m(\widehat{AIB}) = \frac{1}{2} m(\widehat{AMB}) + 90$; locul lui I se compune din două arce de cerc deschise, cu capetele A și B. c) Fie C mijlocul lui $|AB|$ și $D \in |OC|$, $\|OD\| = 2\|DC\|$; atunci $\|DG\| = \frac{1}{3}\|OM\|$ și locul lui G este cercul $\mathcal{C}\left(D, \frac{r}{3}\right)$.

§ 4.

8. Fie $|AB|$ o latură a poligonului înscris, M mijlocul arcului mic $\widehat{AB}$ și P, Q punctele de intersecție ale tangentei în M ca OA, respectiv OB. Atunci $l_n = \|AB\|$ și $L_n = \|PQ\|$. Folosiți triunghiurile asemenea OAB și OPQ și teorema lui Pitagora pentru triunghiul OMP.

13. Se va observa că $|C'D|$ este o mediană în triunghiul dreptunghic DAB și se va deduce că $|C'D'| \equiv |B'A'|$. Rezultă că $C'B'A'D'$ este un trapez isoscel sau paralelogram. Arătați că al doilea caz numai atunci e posibil cînd $\hat{B}$ sau $\hat{C}$ este un unghi drept.

14. $A'B' \parallel AB$, $A_1B' \parallel HC$ (linii mijlocii în triunghiuri), deci $m(\widehat{A'B'A_1}) = 90$. Acest raționament este valabil în fiecare dintre cazurile a), b), c).

15. Conform exercițiului 13, cercul $\mathcal{C}$ circumscris triunghiului $A'B'C'$ conține pe D și analog $E \in \mathcal{C}$, $F \in \mathcal{C}$. Conform exercițiului 14, punctele A', B', D și A_1 se află pe un cerc, care avînd trei puncte comune cu $\mathcal{C}$, coincide cu $\mathcal{C}$. Deci $A_1 \in \mathcal{C}$; analog B_1, $C_1 \in \mathcal{C}$.

16. Deoarece $m(\widehat{A'DA_1}) = 90$, $|A'A_1|$ este un diametru în cercul lui Euler al triunghiului ABC. Deci centrul acestui cerc coincide cu mijlocul lui $|A'A_1|$ și analog cu mijloacele lui $|B'B_1|$ și $|C'C_1|$. Așadar dreptele $A'A_1$, $B'B_1$, $C'C_1$ au un punct comun.

19. R fiind centrul pătratului, patrulaterul $OMRN$ este inscriptibil. Locul lui R este bisectoarea unghiului $\widehat{AOB}$ (fără punctul O).

20. Se va arăta că patrulaterul $BCPA$ este inscriptibil. Deci P este situat pe arcul mic deschis $\widehat{AC}$ al cercului circumscris triunghiului ABC. Pentru a arăta că orice punct P' al acestui arc aparține locului geometric se va demonstra că există un punct $M' \in |AE|$, astfel ca $DCP'M'$ să fie inscriptibil; se intersectează DM' cu AB în N' și se demonstrează că patrulaterul $AM'P'N'$ este inscriptibil.

22. Să presupunem că M se află pe arcul $\widehat{AC}$ care nu-l conține pe B; $m(\widehat{ABC}) < 90$, deci $\widehat{AC}$ este un arc mic și $Q \in |AC|$. Deoarece $\widehat{BAM}$ și $\widehat{BCM}$ sînt unghiuri suplementare, unul este obtuz, să zicem $\widehat{BAM}$; atunci $A \in |BR|$. Punctele Q și R aparțin cercului de diametru $|AM|$ și cum $Q \in |AC|$, punctele Q, R sînt de o parte și de alta a dreptei AM; rezultă că $AQMR$ este un patrulater convex inscriptibil. Același lucru este valabil și pentru patrulaterul $BPMR$. Așadar $\widehat{MRQ} \equiv \widehat{MAQ} \equiv \widehat{MBP} \equiv \widehat{MRP}$. Din convexitatea patrulaterelor amintite deducem ușor că punctele P și Q sînt de aceeași parte a lui RM, ceea ce împreună cu $\widehat{MRP} \equiv \widehat{MRQ}$ implică $|RP| = |RQ|$.

§ 5.

5. Fie cercurile $\mathcal{C}(O, r)$ și $\mathcal{C}(O', r')$, $r < r'$. Se construiesc tangentele OA și OB la cercul $\mathcal{C}(O', r' - r)$ se intersectează $|O'A|$ și $|O'B|$ cu $\mathcal{C}(O', r')$ în A' și B'; paralelele prin A' respectiv B' la OA respectiv OB vor fi tangentele comune „exterioare". Ducînd tangentele din O la cercul $\mathcal{C}(O', r + r')$ se obțin în mod analog tangentele comune „interioare".

6. $d = \|O_1O_2\| < \|O_1A\| + \|O_2A\| < r_1 + r_2$. Pentru a demonstra că $d > |r_1 - r_2|$, presupuneți contrariul și arătați că punctele lui $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ sînt fie toate în interiorul lui $\mathcal{C}(O_2, r_2)$, fie toate în exteriorul lui, ceea ce în condițiile problemei nu este posibil.

8. vezi 5.

10. Fie d dreapta dată. a) $A \in d$; centrul se găsește la intersecția mediatoarei lui $|AB|$ cu perpendiculara în A pe d, b) $B \in d$; analog, c) $AB \parallel d$: punctul de tangentă se găsește la intersecția lui d cu mediatoarea segmentului $|AB|$. d) există $C \in d \cap AB$; dacă $C \in |AB|$ problema nu are soluție; dacă $B \in |CA$, construim pe d punctele T_1 și T_2 astfel ca $\|CT_1\|^2 = \|CT_2\|^2 = \|CA\| \cdot \|CB\|$. Problema are două soluții: cercurile circumscrise triunghiurilor ABT_1 și ABT_2.

13. Se aplică exerc. 16, § 3.

§ 6.

4. $l_{\widehat{AB}} = \mu(\widehat{AB}) = 1$, $m(\widehat{AOB}) = \frac{180}{\pi} \cdot \mu(\widehat{AOB}) = \frac{180}{\pi}$.

5. A și B fiind punctele de intersecție ale cercurilor, se observă că triunghiul O_1OA este dreptunghic în A și $m(\widehat{O_1O_2A}) = 30$.

Exerciții recapitulative

2. $\frac{25}{2}$.

3. Fie $|AB|$ coarda, $M \in$ arcul mic $\widehat{AB}$, P, Q, R proiecțiile lui M pe tangentele în B și A și pe AB; dreapta MR taie cercul din nou în N. $\triangle NBR \sim \triangle AMR$, $\triangle AMQ \sim \triangle NAR$, din care se deduce că $\frac{\|MR\|}{\|MQ\|} = \frac{\|RB\|}{\|RA\|} \cdot \frac{\|AN\|}{\|BN\|}$. Analog $\frac{\|MR\|}{\|MP\|} = \frac{\|RA\|}{\|RB\|} \cdot \frac{\|BN\|}{\|AN\|}$, deci $\|MR\|^2 = \|MP\| \cdot \|MQ\|$.

4. Se va folosi puterea punctului A față de cerc.

5. $\triangle HBA' \sim \triangle HAB'$ implică $\| HA \| \cdot \| HA' \| = \| HB \| \cdot \| HB' \|$; sau se observă că punctele A, B, A', B' sînt pe un cerc și se scrie puterea lui H față de acest cerc în două moduri.

7. π.

8. Se va arăta că $m(\widehat{AFC}) = m(\widehat{AEB}) = 180 - m(\widehat{ABC})$.

10. Folosind patrulaterele inscriptibile $ABDE$ și $ACDF$, se va arăta că $\widehat{FDE} \equiv \widehat{BAC}$.

12. Fie $r_1 < r_2$, $C = pr_{O_1O_2} A$ și $D = pr_{AD_2}O_1$; folosind triunghiuri congruente, se arată că $\| O_1C \| = \| AD \| = r_1$.

Capitolul IV

§ 1.

2. Dreapta paralelă cu axa absciselor, care conține punctul de coordonate $(0, 2)$. 3. Dreapta paralelă cu axa ordonatelor, care conține punctul de coordonate $(5, 0)$. 4. $\left(3, \frac{9}{2}\right)$. 5. $(-2, 1)$, $(6,7)$ 6. b) π, c) $10\sqrt{5}$, d) $\sqrt{10}$. 7. $x \in \{-3, 7\}$. 8. Se aplică reciproca teoremei lui Pitagora. 9. Se arată că lungimile a două laturi sînt egale. 11. Punctul P corespunde lui P_0 din teorema 3. Se poate aplica și reciproca teoremei lui Pitagora. 12. $x = -1$. 13. Punctul de coordonate $(0, 6)$.

§ 2.

15. $a = \frac{3}{8}$, $b = \frac{39}{8}$. 17. $4x + 2y - 5 = 0$.

§ 3.

19. $5x + 2y + 5 = 0$. 21. Da. 22. $5x + 3y = 4$. 23. $a = 1$, $b = -1$.

24. Dacă $a = 0$, dreptele P_1P_2 și P_3P_4 sînt respectiv paralele cu axele de coordonate. Dacă $a \neq 0$, coeficientul unghiular al dreptei P_1P_2 este a, iar coeficientul unghiular al dreptei P_3P_4 este $-\frac{1}{a}$. Cele două drepte sînt evident perpendiculare. 28. Se numește ecuația dreptei prin tăieturi deoarece P_1 și P_2 sînt punctele de intersecție ale dreptei respectiv cu axele de coordonate.

§ 4.

29. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\frac{1}{3}$, 3. 30. $\frac{4}{5}$, $-\frac{4}{3}$, $-\frac{3}{4}$. 31. $\frac{5}{13}$, $-\frac{12}{13}$, $-\frac{12}{5}$.

32. a) $2 - \sqrt{3}$, b) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$, c) $-2 - \sqrt{3}$, d) $-2 - \sqrt{3}$. 33. $\frac{4 + 6\sqrt{2}}{15}$.

§ 5.

35. Măsurile în radiani ale unghiurilor cerute sînt respectiv: a) 0, b) $\frac{\pi}{2}$, c) $\frac{\pi}{3}$, d) $\frac{3\pi}{4}$. **36.** 150, $\frac{5\pi}{6}$. **37.** $\frac{3\sqrt{7}-4\sqrt{2}}{15}$.

Capitolul V

§ 1.

1. $(-1, 0)$, $(-1, 0)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

2. a) $\left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$, b) $\left\{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$, c) $\left\{\frac{5\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$, d) $\left\{\frac{7\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$. **5.** $(2+\sqrt{3})x + y - 1 = 0$.

§ 2.

1. a) 1, b) $\cos\frac{2\pi}{5}$, c) -1, d) -1, e) $\frac{1}{2}$, f) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, g) 0, h) -1, i) -1, j) 0, k) $-\sqrt{3}$, l) $-\frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

2. $-\frac{24}{25}$. **3.** a) pară, b) pară pentru n par și impară pentru n impar, c) nici pară nici impară, d) impară. **4.** a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, b) $\frac{1}{2}$. **5.** $\frac{56}{65}$. **7.** Figurînd pe cercul unitate C punctele $F(a) = P\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ și $F(b) = Q\left(-\frac{7}{25}, \frac{24}{25}\right)$, se constată că $a > b$ și $a - b \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Se calculează $\cos(a-b)$ cu ajutorul formulei (2), iar $\sin(a-b)$ cu ajutorul formulei (1). Coordonatele punctului $F(a-b)$ sînt $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$. **8.** Rezolvînd sistemul format din $\sin x + \cos x = 0{,}2$ și $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ și ținînd seama de $\cos x < 0$, se obține $\cos x = -\frac{3}{5}$, $\sin x = \frac{4}{5}$. Coordonatele punctului $F(x)$ sînt $\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

§ 3.

1. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **3.** $\frac{24-7\sqrt{3}}{50}$, $-\frac{24+7\sqrt{3}}{50}$.

5. a) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, b) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, c) $-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, d) $\frac{\sqrt{8+2\sqrt{6}-2\sqrt{2}}}{4}$,

e) $-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$. **6.** e) Se împart ambii membri cu 2 şi se recunoaşte că $\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$ şi $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$ etc. **8.** $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$, $\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$. **9.** Se observă mai întîi că $\cos^4\frac{7\pi}{8} = \cos^4\frac{\pi}{8}$ şi $\cos^4\frac{5\pi}{8} = \cos^4\frac{3\pi}{8}$. În continuare rămîne de arătat că $\cos^4\frac{\pi}{8} + \cos^4\frac{3\pi}{8} = \frac{3}{4}$. Dar $\cos\frac{3\pi}{8} = \sin\frac{\pi}{8}$ etc. **10.** Se scrie $E = \frac{1+\cos 2(a+b)}{2} + \frac{1+\cos 2(a-b)}{2} - \cos 2a \cos b$ şi după aplicarea formulelor (4) şi (2) se obţine $E = 1$. Deci E nu depinde de a şi b deoarece are valoarea 1, oricare ar fi valorile reale ale lui a şi b.

§ 4.

1. 0. **2.** h) Se scrie $\operatorname{tg} 3a - \operatorname{tg} 2a - \operatorname{tg} a = \operatorname{tg} 3a - \frac{\sin 3a}{\cos 2a \cos a} = \operatorname{tg} 3a - \operatorname{tg} 3a \cdot \frac{\cos 3a}{\cos 2a \cos a} = \operatorname{tg} 3a \cdot \frac{\cos 2a \cos a - \cos 3a}{\cos 2a \cos a}$ etc. **3.** 1. **4.** *n*. **5.** Rezolvînd sistemul format cu ecuaţiile $5\cos x + 10\sin x - 11 = 0$ şi $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, se obţin două soluţii $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ şi $\left(\frac{7}{25}, \frac{24}{25}\right)$. Aşadar, problema are două soluţii: $\cos x = \frac{3}{5}$, $\sin x = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$ sau $\cos x = \frac{7}{25}$, $\sin x = \frac{24}{25}$, $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{3}{4}$.

§ 5.

1. a) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$, b) $\frac{\sqrt{6}}{2}$, c) $-\sqrt{2}$, d) 0, e) $4\sin 3x \cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$, f) $4\cos 4x \cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$. **2.** e) $\operatorname{ctg}\frac{a}{2} = \frac{1+\cos a}{\sin a}$, conform formulei (12) Deci $1 + \cos a + \operatorname{ctg}\frac{a}{2} = 1 + \cos a + \frac{1+\cos a}{\sin a} = (1+\cos a)\left(1+\frac{1}{\sin a}\right) = \frac{1+\cos a}{\sin a}(1+\sin a) = \operatorname{ctg}\frac{a}{2}\left(\sin a + \sin\frac{\pi}{2}\right)$ etc. **3.** Dacă $\sin\frac{x}{2} = 0$, atunci $S = 0$. Presupunem că $\sin\frac{x}{2} \neq 0$. Se obţine, conform indicaţiei. $2S\sin\frac{x}{2} = 2\sin 3x \sin\frac{5x}{2}$. Deci $S = \frac{\sin 3x \sin\frac{5x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$. Pentru transformarea sumei T se procedează în mod analog. Se obţine $T = \frac{\cos 4x \sin\frac{7x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$.

§ 6.

1. a) minus, b) minus, c) plus, d) negativ, e) minus, f) plus. **2.** Graficele sînt trasate în figurile care urmează

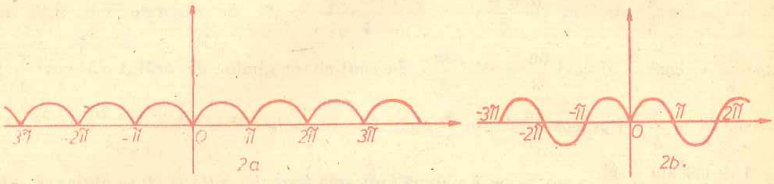


Fig. R. 2a, 2b

3. Graficul este trasat în figura care urmează, pentru $x \in [0, 2\pi]$:

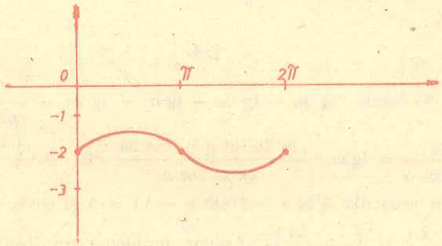


Fig. R. 3

Capitolul VI

§ 3.

1. a) $\frac{\pi}{3}$, b) $-\frac{\pi}{3}$, c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$, d) $\sqrt{3}$, e) 1, f) $\frac{11}{16}$. **2.** $\sin x = \frac{3}{5}$, $\cos x = \frac{4}{5}$. **3.** $x = 5$. **4.** f) Deoarece $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{4x}{5-3x} - \operatorname{arctg}\frac{5x-3}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)$, s-ar părea că egalitatea este verificată oricare ar fi $x \neq \frac{5}{3}$. Dar pentru $x > \frac{5}{3}$, $\operatorname{arctg}\frac{4x}{5-3x} - \operatorname{arctg}\frac{5x-3}{4} < 0$ deoarece $\frac{4x}{5-3x} < 0$ și $\frac{5x-3}{4} > 0$, iar $\operatorname{arctg}\frac{3}{4} > 0$. g) Dacă $\cos x = 0$, pentru $\sin x = 1$ și pentru $\sin x = -1$, egalitatea este verificată. Dacă $\cos x \neq 0$, atunci $\frac{\sin x + 2\cos x}{\cos x - 2\sin x} = \frac{\operatorname{tg} x + 2}{1 - 2\operatorname{tg} x} = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2)}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2)} = \operatorname{tg}(x + \operatorname{arctg} 2)$.

5. a) $x \in \left\{-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right\}$, b) $\frac{5\sqrt{3}-8}{11}$, c) $x \in \left\{0, \frac{1-\sqrt{13}}{4}\right\}$.

§ 4.

a) $x \in \left\{\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2} \mid k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$,

b) $x \in \left\{\frac{\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3} \mid k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{\frac{7\pi}{12} - 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$,

c) $x \in \left\{ \frac{2k + (-1)^k}{3 + (-1)^k} \cdot \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbf{Z} \right\}$, d) $x \in \left\{ -\frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{5} \mid k \in \mathbf{Z} \right\}$,

e) $x \in \left\{ \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3} \mid k \in \mathbf{Z} \right\}$,

f) $x \in \left\{ \frac{(-1)^k + \sqrt{1 + 4k\pi}}{2} \mid k \in \mathbf{N} \right\} \cup \left\{ \frac{(-1)^k - \sqrt{1 + 4k\pi}}{2} \mid k \in \mathbf{N} \right\}$.

§ 5.

1. $x \in \left\{ \arccos \frac{1 - \sqrt{7}}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z} \right\} \cup \left\{ -\arccos \frac{1 - \sqrt{7}}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z} \right\}$.

3. $x \in \left\{ (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z} \right\}$.

4. $x \in \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z} \right\}$.

5. $x \in \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z} \right\}$.

7. Ecuația se scrie $(\operatorname{tg} x - 2)(5\operatorname{tg} x + 4\operatorname{tg} x + 3) = 0$. Se obține $x \in \{\operatorname{arctg} 2 + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$.

9. Se face substituția $\cos x = y$. Se obține $x \in \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z} \right\}$.

§ 6.

1. $t \in \left\{ \pi - \arcsin \frac{4}{5} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z} \right\} \cup \{\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$.

2. $t \in \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z} \right\} \cup \left\{ \arcsin \frac{\sqrt{14}}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z} \right\}$.

3. $t \in \left\{ -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z} \right\}$.

4. $t \in \left\{ \pi - \arcsin \frac{\sqrt{21}}{5} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z} \right\} \cup \left\{ \pi + \arcsin \frac{4}{5} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z} \right\}$.

5. $t \in \left\{ -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z} \right\}$.

6. $t \in \{2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z} \right\}$.

7. a) $\frac{2\pi}{5}$, b) 10π, c) $\frac{2\pi}{7}$.

8. Dacă T ar fi perioadă, ar însemna că $f(x + T) = f(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Pentru $x = 0$, am avea $\sin 4T + \cos \sqrt{2}\, T = 1$, iar pentru $x = -T$, $-\sin 4T + \cos \sqrt{2}\, T = 1$.

Din cele două egalităţi se obţine $\sin 4T = 0$ şi $\cos \sqrt{2}\, T = 1$. În primul caz, din $\sin 4T = 0$, rezultă $T = \frac{k\pi}{4}$, $k \in \mathbf{Z}$, iar din $\cos \sqrt{2}\, T = 1$, rezultă $T = k'\pi\sqrt{2}$, $k' \in \mathbf{Z}$. Deoarece nu există numere întregi k şi k' astfel ca cele două valori ale lui T să fie egale, am ajuns la o contradicţie.

9. Se scrie $h(x) = 2 \sin 2x - 2\sqrt{3}(1 + \cos 2x) + 2\sqrt{3} - 3 = 2 \sin 2x - 2\sqrt{3} \cos 2x - 3 = 4\left(\sin 2x \cos \frac{\pi}{3} - \cos 2x \sin \frac{\pi}{3}\right) - 3 = 4 \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - 3$ şi se continuă ca la aplicaţia 4.

Probleme recapitulative

4. Fie C simetricul lui A faţă de M; $\triangle MNC \equiv \triangle MBA$, $\| AN \| > \| AB \| \equiv | NC |$, deci $\widehat{BAM} \equiv \widehat{MCN} > \widehat{MAN}$.

7. Fie $ABCD$ patrulaterul şi $\{O\} = AC \cap BD$. Dacă $ABCD$ este convex şi M un punct din plan, $\| MA \| + \| MC \| > \| AC \|$, $\| MB \| + \| MD \| \geqslant \| BD \|$. Dacă $ABCD$ este concav, fie de exemplu $C \in \operatorname{Int} \widehat{ABD}$; atunci $\| CA \| + \| CB \| + \| CD \| < \| CA \| + (\| BO \| + \| OC \|) + (\| CO \| + \| OD \|) = \| OA \| + \| OB \| + \| OC \| + \| OD \|$, deci suma distanţelor de la C la vîrfuri este mai mică decît de la O. Aşadar proprietatea nu rămîne valabilă pentru acest caz.

8. $| AC | \cap BO = \{E\}$, $| BC | \cap AO = \{D\}$, $| AD \subset \operatorname{Int} \widehat{BAC}$, $\{O\} = | BE | \cap | AD$, $O \in | BE | \subset \operatorname{Int} ACB$, deci $| CO$ intersectează segmentul $|AB|$.

12. Notînd $a = OA$, semiplanele $| aB$ şi $| aC$ sînt opuse. $P \in \operatorname{Int} \widehat{AOB}$ implică $| BP | \cap a = \emptyset$ şi $| CP | \cap a = \{D\}$, deci $D \in | CP |$. Reciproc, din $D \in | CP |$ rezultă $P \in | aB$; pe de altă parte există $E \in | CD | \cap OB$ şi $E \in | CP |$, deci P şi D sînt de aceeaşi parte a lui OB. Aşadar $P \in \operatorname{Int} \widehat{AOB}$.

17. $ABCD$ fiind trapezul dat ($|AB|$ = baza mare), se ia punctul E astfel încît $A \in | EB |$ şi $| EA | \equiv | DC |$. Triunghiul DEB va fi dreptunghic.

19. Asemănarea $\triangle SPQ \sim \triangle CBA$ rezultă în modul următor: PS şi SQ sînt linii mijlocii în CBE, CFE, deci $\| PS \| = \frac{1}{2} \| BE \|$, $\| SQ \| = \frac{1}{2} \| CF \|$. Dar $\frac{\| BE \|}{\| CF \|} = \frac{\| BC \|}{\| AC \|}$ şi notînd $\{R\} = BE \cap CF$, avem $\widehat{PSQ} \equiv \widehat{BRC} \equiv \widehat{BCA}$. Analog se arată că $\triangle TQM \sim \triangle CBA$. Putem scrie:

$$\frac{\| PQ \|}{\| AB \|} = \frac{\| PS \|}{\| BC \|} = \frac{\| BE \|}{2 \| BC \|} = \frac{1}{2} \frac{\| AD \|}{\| AB \|} = \frac{\| NM \|}{\| AB \|},$$

deci $\| PQ \| = \| NM \|$ şi analog $\| QM \| = \| PN \|$.

20. Fie A pe latura $[CD]$ a pătratului $CDEF$; putem presupune că $\| AE \| \geqslant \| AB \|$ (schimbînd la nevoie rolul lui E cu cel al lui F). Atunci $\| AC \| + \| AD \| + \| AE \| + \| AF \| \geqslant \| CD \| + \| AB \| + \| AF \| \geqslant \| AB \| + 2 \| CD \| \geqslant \| AB \| (1 + \sqrt{2})$. Dacă A și B sînt vîrfuri opuse în pătrat, relația de mai sus devine o egalitate, deci aceasta este soluția problemei.

21. $\| OM \| - \| ON \| | < \| MN \| < \| ON \| + \| OM \|$.

27. Se va observa că AO_1HO_2 este romb și se va arăta că triunghiurile ABC și $O_1O_2O_3$ sînt congruente, unde O_1, O_2, O_3 sînt centrele celor trei cecuri.

28. Fie A' simetricul lui A față de punctul D. Punctele A', B, H, C sînt situate pe un cerc de diametru $A'H$, care conține și punctul M.

29. Luăm $M \in | BD |$ astfel încît $\widehat{MCB} \equiv \widehat{ACD}$. Se obține: $\triangle CMB \sim \triangle CDA$ și $\triangle CMD \sim \triangle CBA$.

31. Cele patru puncte sînt vîrfurile unui dreptunghi.

32. Ecuațiile înălțimilor sînt $x + ay = 0$, $(10 - a)x + 2(10 - a)y - b - 20b = 0$, $(2 - a)x + 10(2 - a)y - b - 20b = 0$. Se determină coordonatele punctului de intersecție a două din mediatoare și se verifică că este situat pe a treia.

33. $t \in \left\{\frac{7\pi}{4}, \frac{15\pi}{4}, \frac{23\pi}{4}\right\}$.

34. a) $\left\{t \mid t = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\}$,

b) $\left\{t \mid t = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\}$,

c) $\left\{t \mid t = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\}$,

d) $\left\{t \mid t = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\}$.

36. $\frac{20}{29}, \frac{41}{841}, \frac{541}{641}$.

38. a) $4 \cos a \cos b \cos c$,

b) $4 \cos a \cos\left(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\frac{a}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$,

c) $2\sqrt{2} \cos \frac{a}{2} \cos\left(\frac{a}{4} - \frac{\pi}{4}\right)$,

d) $4 \sin a \sin\left(\frac{a}{2} - \frac{\pi}{12}\right) \cos\left(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{12}\right)$.

39. a) 2, b) 3, c) $\frac{3}{2}$, d) 14.

40. a) $x \in \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$, b) Se trece totul în membrul stîng și se dă factor comun $\sin x - \cos x$, c) Se aplică formula (12) și se ajunge la $\sin x - \cos x = 1$, d) După ce se transformă în sumă produsul de cosinusuri se ajunge la $2\cos 2x = 1$, e) Se aplică formulele (7) și (8) și se obține $3 \sin^2 \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} - 2 \cos \frac{x}{2} = 0$ sau $\cos \frac{x}{2} (3 \cos x - \sin x + 1) = 0$.

Deci $x \in \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{\pi + \arcsin \frac{3}{5} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \{\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$.

41. a) Ecuația este echivalentă cu $2 \sin^2 x - (2m - 1) \sin x - m = 0$,

b) Ecuația are soluții oricare ar fi valorile reale ale lui m,

c) Ecuația are soluții dacă $m \in (-\infty, 0] \cup \left[\frac{1}{5}, +\infty\right)$.

42) a), b), c), d). Se folosește indicația de la punctul e).

44. Se observă că $|OM| \equiv |ON|$. Deci unghiurile triunghiului au măsurile $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}$.

Cuprins

9 x 1 = 9
9 x 2 = 18
9 x 3 = 27
36

9 x 9 = 81
9 x 10 = 90

Nr. colilor de tipar: 12
Bun de tipar: 15.12.1981

Com. nr. 10586/28251
Combinatul poligrafic
«CASA SCÎNTEII»
București — R.S.R.