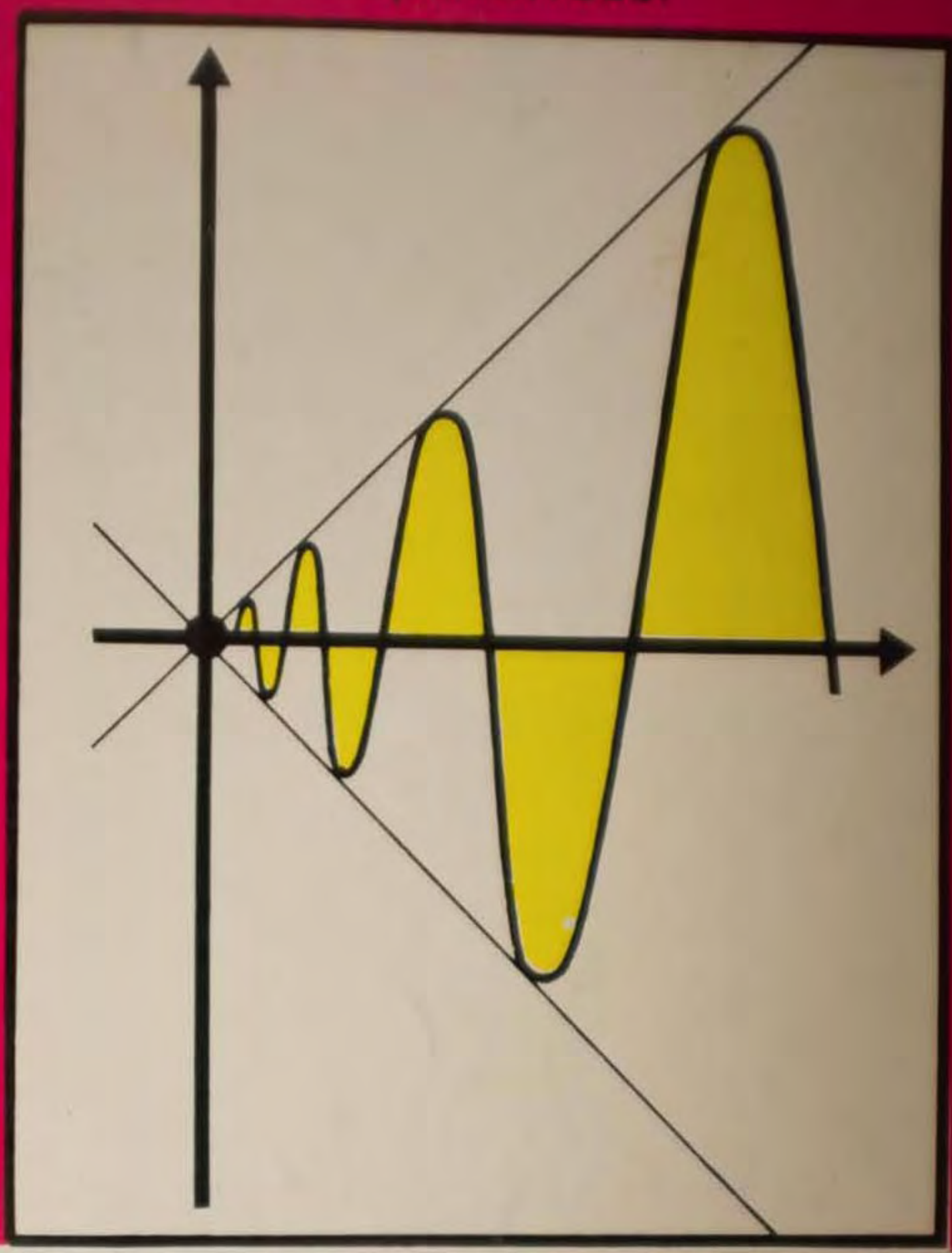
MINISTERUL ÎNVĂȚĂMÂNTULUI

GH. GUSSI
O. STÂNĂȘILĂ
T. STOICA



XI

Matematică

Elemente de analiză matematică

Manual pentru clasa a XI-a

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ, R.A.
BUCUREȘTI — 1995

MINISTERUL ÎNVĂȚĂMÂNTULUI

Cercet. dr. GH. GUSSI Prof. univ. dr. O. STĂNĂȘILĂ Prof. T. STOICA

XI

Matematică

Elemente de analiză matematică

Manual pentru clasa a XI-a

Editura Didactică și Pedagogică, R.A.
București

Manualul este în concordanță cu programa școlară actuală.

Referenți: *Prof. univ. dr.* N. BOBOC
Cercetător GR. ARSENE
Prof. I. MAFTEI
Prof. D. OGREZEANU
Prof. M. CHIRIȚĂ
Prof. M. RĂDULESCU
Prof. S. RĂDULESCU

ISBN 973-30-3058-9

Redactor: *Prof.* VALENTIN RADU
Tehnoredactor: ION MIREA
Coperta: NICOLAE SÎRBU

Capitolul I
NUMERE REALE. FUNCȚII REALE

Introducere

Cea mai mare parte a acestui capitol se referă la noțiuni pe care le-ați întâlnit în studiul algebrei sau geometriei. Înainte de orice, enunțăm câteva probleme a căror rezolvare se poate da prin (sau numai prin) metode de analiză matematică.

a) În calcule aproximative se pune adeseori problema de a afla valoarea unei funcții f într-un punct a, procedându-se astfel: se alege o aproximare b a lui a, $b \simeq a$ și se calculează $f(b)$ $\left[\text{de exemplu, pentru } f(x) = \frac{1}{3}(x+1) \text{ și } a = \pi, \text{ se alege } b = 3{,}14 \text{ și } f(\pi) \simeq \frac{1}{3}(3{,}14+1) = 1{,}38\right]$. Mai întâi este necesar un anumit control al erorilor făcute în astfel de aproximări, mai ales în cazul unor calcule lungi în care apar fenomene de „propagare" a erorilor; apoi, ce ne asigură că dacă $b \simeq a$, atunci $f(b) \simeq f(a)$?

Răspunsul la astfel de întrebări poate fi dat cu metode de analiză matematică.

b) Presupunem că trebuie construită o cisternă de forma indicată în figura I.1 (redusă la un cilindru circular drept cu două emisfere) având o arie totală prescrisă A. Soluția nu este unică și poate fi de folos să construim o astfel de cisternă, astfel încât volumul ei să fie cel mai mare posibil. Pentru a formula matematic această problemă, notăm cu x raza bazei cilindrului (egală cu raza fiecărei emisfere) și cu h înălțimea cilindrului. Atunci $A = 2\pi xh + 4\pi x^2$, de unde $h = \frac{A - 4\pi x^2}{2\pi x}$. Volumul cisternei va fi:

$$V(x) = \pi x^2 h + \frac{4\pi x^3}{3} = \pi x^2 \cdot \frac{A - 4\pi x^2}{2\pi x} + \frac{4\pi x^3}{3} = \frac{1}{6}(3Ax - 4\pi x^3).$$

Problema pusă revine atunci la determinarea valorii maxime a lui V când x ia diverse valori strict pozitive. Se poate da o soluție directă, luând $x_0 = \frac{\sqrt{A}}{2\sqrt{\pi}}$, deci $V(x_0) = \frac{1}{6} \cdot \frac{A\sqrt{A}}{\sqrt{\pi}}$ și arătând că $V(x) \leqslant V(x_0)$ pentru orice $x > 0$; Într-adevăr, aceasta revine la $\frac{1}{6}(3Ax - 4\pi x^3) \leqslant$

$$\leqslant \frac{1}{6} \cdot \frac{A\sqrt{A}}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{1}{6}\left(4\pi x^3 - 3Ax + \frac{A\sqrt{A}}{\sqrt{\pi}}\right) \geqslant 0,$$

$$\frac{2}{3}(\pi x + \sqrt{\pi A})\left(x - \frac{\sqrt{A}}{2\sqrt{\pi}}\right)^2 \geqslant 0, \text{ ceea ce este}$$

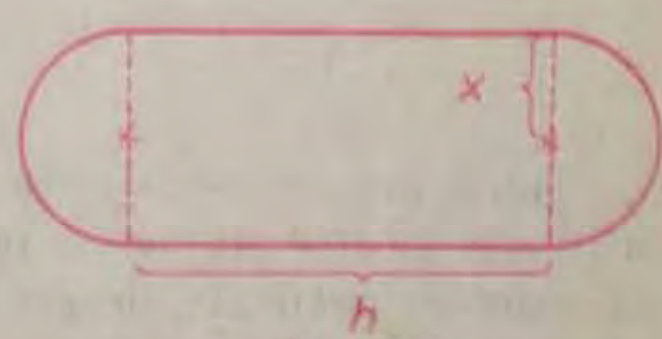


Fig. I.1

clar. Aşadar, $V(x) \leqslant V(x_0)$, pentru orice $x > 0$ şi volumul maxim este obţinut pentru $x = x_0$. Dar, în situaţii mai complicate o astfel de abordare directă nu este posibilă. În capitolul V, pag. 200, vom da o metodă practică, utilizând Analiza Matematică, pentru rezolvarea problemelor de extrem, aplicabilă în situaţii mai generale.

c) Considerăm o funcţie $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ şi fixăm $x_0 \in (a, b)$. Fie $M_0(x_0, f(x_0))$ punctul corespunzător pe graficul lui f, raportat la un sistem ortogonal xOy de axe (figura I.2).

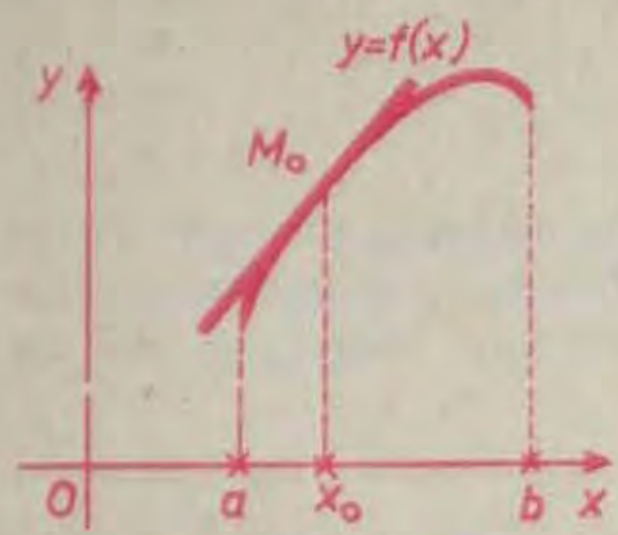


Fig. I.2

Se pune problema ca dintre toate dreptele trecând prin punctul M_0 să găsim, dacă este posibil, tangenta în M_0 la grafic, adică dreapta care „aproximează cel mai bine graficul lui f în jurul lui x_0". Ecuaţia oricărei drepte trecând prin M_0 este $y = f(x_0) + m(x - x_0)$ şi problema revine la a găsi numărul real m astfel încât să aibă loc aproximarea $f(x) \simeq f(x_0) + m(x - x_0)$ în jurul punctului x_0, într-un sens care va fi precizat.

În cazul când funcţia f descrie un proces fizic, problema anterioară corespunde „liniarizării" acelui proces în jurul poziţiei x_0, fapt utilizat în mod curent în aplicaţii. Răspunsul matematic la această problemă va fi dat în capitolul IV.

d) În algebră şi în trigonometrie au fost considerate unele funcţii cu valori reale de variabilă reală, foarte importante pentru aplicaţiile matematicii — funcţiile polinomiale, raţionale, exponenţiale, logaritmice, trigonometrice etc. În analiză va fi adâncit studiul acestora.

Până acum ştiţi să reprezentaţi graficul unor funcţii reale simple. Analiza matematică va da metode generale de determinare a unor puncte (puncte de maxim, de minim, inflexiuni etc.) şi a unor drepte (de exemplu, asimptote) ataşate în mod corespunzător funcţiilor reale dintr-o clasă largă de funcţii, permiţând studiul acestor funcţii şi trasarea graficului lor. Desenul constituie un excelent mijloc vizual de concentrare de informaţie, iar în cazul graficelor de funcţii descriind procese fizice, desenul permite să se obţină dintr-o privire o idee (şi chiar mai mult) asupra evoluţiei acelor procese.

e) Noţiuni importante ca: viteza şi acceleraţia unui mobil la un moment dat, intensitatea unui curent electric la un moment dat, tangenta la o curbă într-un punct, lungimea unui arc de curbă, aria unei figuri plane, volumul unui corp în spaţiu, centrul de greutate, momentul de inerţie etc. nu pot fi definite şi utilizate în mod corespunzător decât înţelegând noţiunea de *limită*.

§ 1. Numere reale

Dacă privim cu atenţie, în toate aceste probleme, obiectele matematice utilizate au fost numerele (şi funcţiile). În clasele primare aţi învăţat calculele cu numere naturale, descriind în fond operaţii cu mulţimi finite, iar în gimnaziu aţi învăţat să rezolvaţi ecuaţii de tipul $a + x = b$ cu a, b naturale date şi

$qx = p$, cu p, q numere întregi date, $q \neq 0$. Cu alte cuvinte, au fost considerate următoarele mulțimi de numere (naturale, întregi și respectiv raționale):

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \ldots\},\ \mathbf{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\},\ \mathbf{Q} = \left\{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbf{Z}, q \neq 0\right\}.$$

Dar multe probleme de tipul celor considerate mai sus nu pot fi rezolvate în cadrul mulțimii $\mathbf{Q}$ și sunt necesare numerele iraționale. Aceasta a impus, atât din rațiuni practice cât și prin resorturile interne ale dezvoltării matematicii, lărgirea conceptului de număr ca măsură a mărimilor din realitatea fizică dar și ca obiect matematic de studiu. Elaborarea noțiunii matematice de număr real a constituit un proces lung, sinuos, încheiat abia în secolul trecut prin lucrările matematicienilor K. Weierstrass (1815—1897), R. Dedekind (1831—1916), G. Cantor (1845—1918). Fundamentarea analizei matematice pe baze teoretice solide este necesară pentru că există o multitudine de probleme care nu pot fi rezolvate prin metode intuitive și numai conceptele matematice definite riguros conferă valabilitatea rezultatelor și permit studiul unor situații mai complicate În acest manual vom adânci conceptele de număr real și funcție reală de o variabilă reală, care stau la baza rezultatelor analizei matematice.

Reamintim că mulțimea $\mathbf{R}$ a numerelor reale este o mulțime care include mulțimea $\mathbf{Q}$ $\left(\text{deci } 3, -2, \frac{2}{3}, \frac{1}{10^4}, -\frac{8}{7} \text{ sunt numere reale}\right)$. Pe mulțimea $\mathbf{R}$ sunt definite o operație de adunare, o operație de înmulțire și o relație de ordine. Se mai spune că sunt definite o structură algebrică și o structură de ordine. Precizăm acești termeni. În general, dacă $f : A \to B$ este o funcție oarecare, atunci oricărui element $u \in A$ i se asociază $f(u) \in B$ și vom scrie uneori $u \to f(u)$. Dacă M este o mulțime, prin *operație algebrică (binară) pe M* cu eticheta $*$ înțelegem o funcție $M \times M \to M$, $(x, y) \mapsto x * y$; prin *relație (binară) pe M* înțelegem o submulțime R a produsului cartezian $M \times M$; pentru $x, y \in M$ scriem xRy în loc de $(x, y) \in R$ și citim: x este în relația R cu y. Relația R se numește *relație de ordine* dacă este reflexivă (xRx pentru orice $x \in M$), tranzitivă ($x, y, z \in M$; xRy, $yRz \Rightarrow xRz$) și antisimetrică ($x, y \in M$; xRy, $yRx \Rightarrow x = y$).

Exemple

1) Pe mulțimea $M = \mathbf{Z}$ a numerelor întregi sunt definite operațiile algebrice de adunare (cu eticheta $+$) și înmulțire (cu eticheta $\cdot$), precum și relația de ordine „mai mic sau egal", notată cu $\leqslant$.

2) În mod similar, pe mulțimea $M = \mathbf{Q}$ sunt definite operațiile algebrice de adunare $+$, înmulțire $\cdot$ și relația de ordine $\leqslant$, cu proprietățile uzuale care vă sunt binecunoscute.

Așa cum am mai spus, pe mulțimea $\mathbf{R}$ sunt date două operații algebrice care extind operațiile din $\mathbf{Q}$. Oricărui cuplu (x, y) de numere reale i se asociază suma $x + y$ și produsul xy și se definesc astfel operațiile de adunare $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $(x, y) \to x + y$ și înmulțire $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $(x, y) \to xy$.

1.1. Proprietățile algebrice ale lui R (axiomele adunării și înmulțirii)

1°. *Adunarea este asociativă și comutativă.*

2°. *Există numărul real* 0 (zero) *astfel încât* $x + 0 = x$, *pentru orice* $x \in \mathbf{R}$.

3°. *Pentru orice* $x \in \mathbf{R}$ *există numărul* $-x \in \mathbf{R}$ *astfel încât* $x + (-x) = 0$.

Numărul 0 este unic având proprietatea 2°: într-adevăr, dacă $0' \in \mathbf{R}$ și $x + 0' = x$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$, atunci pentru $x = 0$, rezultă $0 + 0' = 0$ și, pe de altă parte, din 2°, pentru $x = 0'$ rezultă $0' + 0 = 0'$. Așadar $0 = 0'$. În mod similar, se arată că pentru orice $x \in \mathbf{R}$ fixat există un unic element y astfel încât $x + y = 0$, anume $y = -x$; în plus, $-(-x) = x$. Dacă $x, y \in \mathbf{R}$, atunci se notează $x - y = x + (-y)$ (*diferența* numerelor x, y). Ecuația $a + x = b$ ($a, b \in \mathbf{R}$ fiind date) are o soluție și aceasta este unică, anume $x = b - a$.

4°. *Înmulțirea este asociativă și comutativă.*

5°. *Există numărul real* 1 ($1 \neq 0$) *astfel încât* $x \cdot 1 = x$ *pentru orice* $x \in \mathbf{R}$.

6°. *Pentru orice* $x \in \mathbf{R}$, $x \neq 0$ *există numărul* x^{-1} $\left(\text{notat și } \frac{1}{x}\right)$ *din* $\mathbf{R}$, *astfel încât* $x \cdot x^{-1} = 1$.

7°. *Înmulțirea este distributivă în raport cu adunarea, adică* $x(y + z) = xy + xz$, *pentru orice* $x, y, z \in \mathbf{R}$.

Din aceste proprietăți rezultă că 1 este unic, având proprietatea 5° și, de asemenea, pentru $x \neq 0$ dat inversul x^{-1} este unic. Apoi $x \cdot 0 = 0$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$ [într-adevăr, $x \cdot 0 = x(0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0$, conform 7°; notând $x \cdot 0 = u$, rezultă așadar $u = u + u$, deci $u = 0$]. Remarcăm că dacă $xy = 0$, atunci $x = 0$ sau $y = 0$ [într-adevăr, dacă $xy = 0$ și $x \neq 0$, atunci există x^{-1} și înmulțind cu x^{-1} relația anterioară obținem $x^{-1}(xy) = 0$, adică $(x^{-1}x)y = 0$, $1 \cdot y = 0$, deci $y = 0$].

Dacă $x, y \in \mathbf{R}$ și $y \neq 0$, se notează $\frac{x}{y} = xy^{-1}$ (*câtul* numerelor x și y). Reținem că împărțirea cu zero nu este definită. Este evident că pentru orice $a, b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, ecuația $ax = b$ are soluție unică, anume $x = \frac{b}{a}$.

Proprietățile 1°—7° se pot exprima pe scurt spunând că *mulțimea* $\mathbf{R}$ *are o structură de corp comutativ* (relativ la operațiile de adunare și înmulțire).

1.2. Proprietățile de ordine ale lui R (axiomele de ordine)

8°. *Pe mulțimea* $\mathbf{R}$ *este fixată o relație de ordine notată* $\leqslant$. Așadar, dacă $x, y, z \in \mathbf{R}$ și $x \leqslant y$, $y \leqslant z$, atunci $x \leqslant z$, iar dacă $x \leqslant y$, $y \leqslant x$, atunci $x = y$; se mai scrie $y \geqslant x$ în loc de $x \leqslant y$. Pentru $x, y \in \mathbf{R}$ se scrie $x < y$ (echivalent $y > x$) și se citește x este *strict mai mic* decât y dacă $x \leqslant y$ și $x \neq y$.

9°. *Pentru orice* $x, y \in \mathbf{R}$ *avem* $x \leqslant y$ *sau* $y \leqslant x$ (se mai spune că *relația de ordine pe* $\mathbf{R}$ *este totală*).

Dăm acum proprietăţile de compatibilitate între structura algebrică şi structura de ordine pe mulţimea **R**.

10°. *Dacă $x, y \in \mathbf{R}$ şi $x \leqslant y$, atunci $x + z \leqslant y + z$ pentru orice $z \in \mathbf{R}$.*

11°. *Dacă $x, y \in \mathbf{R}$ şi $x \leqslant y$, atunci $xz \leqslant yz$ pentru orice $z \in \mathbf{R}$, $z \geqslant 0$.*

Din proprietăţile algebrice (1°—7°) şi de ordine (8°—11°) se deduc, aşa cum ştiţi de fapt din manualele de algebră ale claselor anterioare, toate regulile calculului algebric şi ale calculului cu inegalităţi. În analiza matematică este utilizat sistematic calculul cu inegalităţi şi este esenţială mânuirea lui corectă. Proprietăţile anterioare sunt satisfăcute nu numai de elementele mulţimii **R**: de exemplu, elementele lui **Q** au aceleaşi proprietăţi. Se mai spune că **R** şi **Q** sunt corpuri comutative *total ordonate*. Ceea ce deosebeşte mulţimea **R** de mulţimea **Q** este axioma lui Cantor a marginii superioare, care stă la baza obţinerii tuturor rezultatelor profunde ale analizei matematice şi pe care o enunţăm mai jos. Sunt necesare unele pregătiri şi începem cu un exemplu. Să considerăm mulţimile următoare:

$$A = \{x \in \mathbf{Q} \mid x^2 \leqslant 3\} \text{ şi } B = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 \leqslant 3\}.$$

Ambele mulţimi sunt majorate de numărul 2, în sensul că pentru orice $x \in A$ avem $x \leqslant 2$ şi pentru orice $x \in B$ avem $x \leqslant 2$. Se observă că ele sunt majorate şi de numerele 1,8; 1,74; 1,733 etc. (orice element din A sau din B este mai mic decât fiecare din aceste numere). Luând aşadar aproximaţiile succesive prin adaos ale lui $\sqrt{3}$, se găsesc majoranţi „din ce în ce mai mici" ai mulţimilor A, B. Remarcăm că $A \subset \mathbf{Q}$, $B \subset \mathbf{R}$. Deoarece $\sqrt{3}$ este iraţional (adică $\sqrt{3} \notin \mathbf{Q}$), rezultă că $\sqrt{3} \notin A$; dar $\sqrt{3} \in B$.

O submulţime nevidă $C \subset \mathbf{R}$ se numeşte *majorată* (sau *mărginită superior*) dacă există cel puţin un număr real k astfel încât pentru orice $x \in C$ să avem $x \leqslant k$. Un astfel de număr k se numeşte un *majorant* al lui C.

Putem acum formula proprietatea următoare, a cărei înţelegere cere oarecare efort.

12°. *Orice submulţime nevidă majorată $C \subset \mathbf{R}$ admite un cel mai mic majorant (axioma lui Cantor). Acest element este un număr real unic, numit marginea superioară a lui C, şi este notat* sup C.

În exemplul anterior mulţimile A, B, ca submulţimi ale lui **R**, sunt majorate şi se poate arăta că sup $A = \sqrt{3}$, sup $B = \sqrt{3}$. Se observă că sup $A \notin A$ şi sup $B \in B$. De asemenea, se observă că, în general, submulţimile lui **Q** nu au proprietatea 12° (într-adevăr, $A \subset \mathbf{Q}$ este majorată în **Q**, dar nu admite un cel mai mic majorant număr raţional).

La punctul 4.1 vom reveni asupra acestor noţiuni şi le vom fixa mai bine.

Cu aceasta definiţia axiomatică a mulţimii **R** este încheiată. Pe scurt, ea se rezumă astfel: **R** satisface proprietăţile 1° — 12° sau echivalent, *este un corp comutativ total ordonat, în care orice submulţime nevidă majorată are margine superioară, aparţinând lui* **R**.

Se pun în mod natural două întrebări:

a) Există o mulţime **R** având proprietăţile 1° — 12°?

b) Pot exista mai multe mulţimi satisfăcând proprietăţile 1° — 12°?

La prima întrebare se poate răspunde construind prin operaţii de teoria mulţimilor pornind de la **Q** o mulţime având proprietăţile 1° — 12°. În acest sens se cunosc construcţia

zecimală a lui Weierstrass, construcția lui Dedekind (folosind „tăieturile" în mulțimea $\mathbf{Q}$) și construcția lui Cantor (folosind șirurile de numere raționale), fiecare din aceste construcții fiind laborioasă.

La cea de-a doua întrebare răspunsul este mai delicat. Anume, se poate arăta că dacă S este un alt corp comutativ total ordonat satisfăcând axioma lui Cantor, atunci există o aplicație bijectivă $f : S \to \mathbf{R}$ astfel încât $f(x + y) = f(x) + f(y)$, $f(xy) = f(x)f(y)$ pentru orice $x, y \in S$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ și, în plus, dacă $x \leq y$, atunci $f(x) \leq f(y)$. Orice calcul efectuat cu elemente $x, y, z, \ldots$ din S poate fi transformat într-un calcul cu numerele reale $f(x), f(y), f(z), \ldots$ și orice element $x \in S$ se poate identifica prin numărul real $f(x)$. Se mai spune că proprietățile 1° — 12° caracterizează mulțimea $\mathbf{R}$ „până la izomorfism".

Ca o consecință a proprietăților 1°—12° se poate stabili următorul rezultat important, numit *proprietatea* (sau într-un alt context, *axioma*) *lui Arhimede* (287—212 î. Cr.):

Pentru orice $x \in \mathbf{R}$ există un număr întreg n unic astfel încât $n \leq x < n + 1$. Acest număr este numit partea întreagă a lui x și este notat $[x]$.

Exemple: $[2, 67] = 2$, $[3] = 3$, $[\pi] = 3$, $[-\pi] = -4$, $[-0{,}6347] = -1$.

Deși mulțimea $\mathbf{Q}$ nu satisface proprietatea lui Cantor, totuși în $\mathbf{Q}$ are loc proprietatea lui Arhimede.

1.3. Reprezentarea geometrică a lui R

Convenim să spunem că o mulțime P *admite o reprezentare* pe o mulțime Q dacă există o aplicație bijectivă de la P la Q, adică o corespondență bijectivă între elementele mulțimilor P și Q.

Considerând o axă având originea A_0 și vectorul unitate $\vec{u} = \overrightarrow{A_0A_1}$ (figura 1.3) și notând cu Δ mulțimea punctelor axei, se definește, așa cum de altfel s-a făcut în clasele anterioare, aplicația $\alpha : \mathbf{R} \to \Delta$ care asociază oricărui

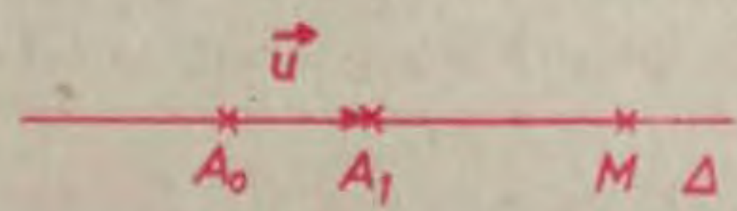


Fig. 1.3

număr real x acel unic punct $M \in \Delta$ astfel încât $\overrightarrow{A_0M} = x\vec{u}$. Așadar, $\alpha(x) = M$ și, în particular, $\alpha(0) = A_0$, $\alpha(1) = A_1$. Aplicația α este bijectivă și se numește *reprezentarea geometrică a lui* $\mathbf{R}$ *pe* Δ (depinzând de $\vec{u}$); inversa ei $\alpha^{-1} : \Delta \to \mathbf{R}$ asociază oricărui punct al lui Δ abscisa acestui punct. Dacă $a, x, b \in \mathbf{R}$, faptul că $a < x < b$ înseamnă că punctul $\alpha(x)$ este situat între punctele $\alpha(a)$ și $\alpha(b)$. Aplicația α a fost stabilită pentru prima dată de R. Descartes (1596—1650) și-a constituit punctul de plecare în elaborarea geometriei analitice și în interpretarea geometrică a unor rezultate ale analizei matematice. Existența aplicației α, care permite o identificare a punctelor de pe Δ cu elementele lui $\mathbf{R}$, justifică faptul că mulțimea $\mathbf{R}$ este uneori numită *dreaptă reală*, iar numerele reale se mai numesc *puncte*.

Considerând un plan P și un sistem ortogonal de axe în acel plan, se poate stabili (așa cum știți) o aplicație bijectivă de la P la $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, asociind oricărui punct din planul P perechea ordonată a coordonatelor lui. Astfel de reprezentări geometrice au fost considerate în clasele anterioare; ele au avantaje considerabile în privința comunicării rezultatelor analizei matematice și vor fi utilizate sistematic în continuare.

La prima vedere, dreapta reală are o descriere foarte simplă, dar la o cercetare mai atentă se remarcă coexistența pe $\mathbf{R}$ a cel puțin trei structuri — structura algebrică, structura de ordine, precum și structura de convergență care va fi definită în capitolul următor.

Presupunem că $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$. Se pot considera intervalele *mărginite*

$(a, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$ (interval *deschis*);

$[a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ (interval *închis și mărginit*);

$[a, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leqslant x < b\}$, $(a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \leqslant b\}$ (intervale *semideschise*).

De asemenea, se definesc $(a, a) = [a, a) = (a, a] = \varnothing$ și $[a, a] = \{a\}$. Pentru un interval ca mai sus, numărul real $b - a$ se numește *lungimea* intervalului respectiv; dacă I este un interval mărginit, vom nota cu $l(I)$ lungimea acelui interval. Intervalele închise și mărginite se mai numesc intervale *compacte*. De exemplu, $[0, 1]$, $[-5, 3]$, $[-\pi, \pi]$ sunt intervale compacte.

Se utilizează de asemenea intervale *nemărginite* pe dreapta reală, de forma

$(-\infty, a) = \{x \in \mathbf{R} \mid x < a\}$, $(-\infty, a] = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leqslant a\}$,

$(a, \infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid x > a\}$, $[a, \infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geqslant a\}$, $(-\infty, \infty) = \mathbf{R}$,

unde a este un număr real. În general, un *interval* este o submulțime $I \subset \mathbf{R}$, astfel încât $a, b \in I$, $a \leqslant c \leqslant b \Rightarrow c \in I$ (și se poate arăta că singurele intervale sunt cele indicate anterior).

Reamintim că o mulțime F se numește *finită* dacă $F = \varnothing$ sau există $n \geqslant 1$ întreg și o funcție bijectivă $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to F$; în acest caz, avem $F = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, unde $a_k = f(k)$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Mulțimile care nu sunt finite se numesc *infinite*; evident, intervalele de lungime > 0 sunt mulțimi infinite. Reamintim, de asemenea, că dacă $M = \{M_i\}_{i \in I}$ este o colecție de mulțimi, se definesc *intersecția* $\bigcap_{i \in I} M_i = \{x \mid \forall i \in I,\ x \in M_i\}$ și reuniunea $\bigcup_{i \in I} M_i = \{x \mid \exists i \in I,\ x \in M_i\}$.

Pentru orice $a, b \in \mathbf{R}$, notăm prin $\max(a, b)$ cel mai mare dintre numerele a, b. Pentru orice $x \in \mathbf{R}$, *modulul lui* x este

$$(1) \qquad |x| = \max(x, -x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x > 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0. \end{cases}$$

Evident, $x \leqslant |x|$ și $|-x| = |x|$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Proprietățile modulului sunt cuprinse în teorema următoare.

TEOREMA I.1 *(proprietățile modulului).* M_1. **Pentru orice** $x \in \mathbf{R}$ **avem** $|x| \geqslant 0$; $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

M_2. Dacă $x, y \in \mathbf{R}$, atunci $|x+y| \leqslant |x| + |y|$;

M_3. Pentru orice $x, y \in \mathbf{R}$ avem $|xy| = |x| \cdot |y|$ şi dacă $y \neq 0$, atunci $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.

La aceste proprietăţi se mai adaugă:

M_4. Fie $x \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$. Avem $|x| < \varepsilon \Leftrightarrow x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$; $|x| \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$; $|x| > \varepsilon \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, \infty)$ şi $|x| \geqslant \varepsilon \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, \infty)$.

M_5. Pentru orice $x, y \in \mathbf{R}$ avem $||x| - |y|| \leqslant |x - y|$.

Demonstraţie. Proprietăţile M_1, M_2, M_3 sunt bine cunoscute. Demonstrăm M_4. Dacă $|x| < \varepsilon$, atunci $\max(x, -x) < \varepsilon$, deci $x < \varepsilon$ şi $-x < \varepsilon$, adică $-\varepsilon < x < \varepsilon$ şi reciproc. Faptul că $|x| > \varepsilon$ revine la $\max(x, -x) > \varepsilon$, adică $-x > \varepsilon$ *sau* $x > \varepsilon$, deci $x \in (-\infty, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, \infty)$ etc. Pentru a demonstra M_5 este suficient de dovedit că $-|x-y| \leqslant |x| - |y| \leqslant x - y|$ (conform inegalităţii secunde din M_4). Prima inegalitate rezultă observând că $|y| = |y - x + x| \leqslant |y - x| + |x| = |x - y| + |x|$, iar pentru inegalitatea secundă observăm că $|x| = |x - y + y| \leqslant |x - y| + |y|$, în ambele cazuri aplicând M_2.

1.4. Reprezentarea zecimală a lui R

Ideea fundamentală a scrierii zecimale este aceea de a exprima orice număr real folosind un număr finit de semne, anume cifrele zecimale 0, 1, 2, ..., 9, la care se adaugă „–" (minus) şi „," (virgula). Acelaşi lucru se poate realiza prin scrierea binară.

Reamintim că numerele raţionale de forma $\frac{a}{10^n}$, cu $a \in \mathbf{Z}$ şi $n \geqslant 0$ natural, pot fi identificate cu fracţii zecimale finite.

Exemple: avem $2{,}471 = \frac{2\,471}{10^3}$; $\frac{1\,127}{10^4} = 0{,}1127$; $-4{,}38 = -\frac{438}{10^2}$.

Acestea sunt insuficiente atât în construcţii matematice, cât şi în descrierea matematică a măsurătorilor fizice $\left(\text{de exemplu, } \frac{1}{3}, \frac{12}{7} \text{ nu se exprimă prin fracţii zecimale finite}\right)$. Este esenţială de aceea considerarea fracţiilor zecimale infinite.

Notăm cu $\mathcal{F}$ mulţimea *fracţiilor zecimale infinite*, adică a succesiunilor infinite de cifre zecimale de forma $m, x_1x_2x_3...$, unde $m \in \mathbf{Z}$, iar $0 \leqslant x_k \leqslant 9$, x_k întregi (pentru orice $k \geqslant 1$). Facem convenţia de a elimina din mulţimea $\mathcal{F}$ fracţiile zecimale infinite în care toate cifrele sunt egale cu 9 de la un rang încolo. Cu această convenţie, două elemente $\alpha = m, x_1x_2x_3...$ şi $\beta = n, y_1y_2y_3...$ din $\mathcal{F}$ se consideră *egale* dacă $m = n$ şi $x_k = y_k$, pentru orice $k \geqslant 1$. Din clasele anterioare se ştie că *orice număr real se reprezintă printr-o fracţie zecimală infinită.*

Anume, oricărui număr real $x \in \mathbf{R}$ i se poate asocia în mod bine determinat o fracţie zecimală infinită notată $\beta(x) = m, x_1x_2x_3...$; în acest mod s-a definit o aplicaţie

$$\beta : \mathbf{R} \to \mathcal{F},$$

numită *reprezentarea zecimală a lui* $\mathbf{R}$ (în analogie cu reprezentarea geometrică a lui $\mathbf{R}$, definită în 1.3). Aplicaţia β este bijectivă şi vom identifica orice număr real x cu fracţia zecimală infinită $\beta(x)$ scriind $x = m, x_1x_2x_3...$; reamintim că x este iraţional dacă şi numai dacă reprezentarea sa zecimală nu este periodică.

TEOREMA 1.2. Pentru orice $x \in \mathbf{R}$, $x \geqslant 0$ şi pentru orice întreg $n \geqslant 0$ avem

$$x^{(n)} \leqslant x < x^{(n)} + \frac{1}{10^n}, \tag{2}$$

unde $x^{(n)}$ este numărul obţinut reţinând partea întreagă şi primele n zecimale ale lui x. Un rezultat similar are loc pentru $x < 0$, anume $|x^{(n)} - x| < \frac{1}{10^n}$.

Demonstraţie. Pentru orice x fixat, $x^{(n)}$ este aproximarea prin lipsă (trunchierea) de ordin n a numărului x; aproximarea prin adaos de ordin n a lui x este $x^{(n)} + \frac{1}{10^n}$. Dar orice număr real este cuprins între aproximările lui prin lipsă şi prin adaos de orice ordin şi se obţine astfel relaţia (2).

Exemplu. Fie $x = \pi$; în acest caz, inegalităţile (2) pentru $n = 0, 1, 2, \ldots$ sunt: $3 \leqslant \pi < 4$; $3{,}1 \leqslant \pi < 3{,}2$; $3{,}14 \leqslant \pi < 3{,}15, \ldots$.

Unul din avantajele reprezentării zecimale a numerelor reale îl constituie posibilitatea de comparare a acestora şi efectuarea unor calcule aproximative cu numere reale folosind trunchierile lor. De exemplu, nu este evident care din numerele $\sqrt{2}$ şi $\frac{707}{500}$ este mai mare, dar considerând reprezentările lor zecimale 1,4142 ... şi 1,4140 ... respectiv, este evident că primul număr este mai mare.

Fie $a \in \mathbf{R}$ fixat. Dacă un număr real x este o aproximare a numărului a, atunci se scrie $x \simeq a$ sau $a \simeq x$. De exemplu: $\pi \simeq 3{,}1416$; $\frac{1}{3} \simeq 0{,}33$; $\sqrt{2} \simeq 1{,}414$. În această formulare nu este însă precizat sensul termenilor utilizaţi şi, în plus, în orice formulă aproximativă este necesară evaluarea erorii făcute. Formularea riguroasă este următoarea: dacă se dă numărul pozitiv ε, atunci se numeşte ε —*aproximare* (sau *aproximare de ordin cel mult* ε) a lui a orice număr real x astfel încât $|x - a| < \varepsilon$; numărul real şi pozitiv $|x - a|$ se numeşte *eroarea absolută* în formula aproximativă $x \simeq a$.

Exemple

1) 3,1416 este o aproximare de ordin cel mult $\frac{1}{10^4}$ a lui π, deoarece $|\pi - 3{,}1416| < \frac{1}{10^4}$ şi similar, 0,33 este o aproximare de ordin cel mult $\frac{1}{10^2}$ a lui $\frac{1}{3}$.

2) Fie $a = 2{,}9998$ şi $b = 3{,}0001$. Eroarea absolută în formula aproximativă $b \simeq a$ este $|a - b| = 0{,}0003 = \frac{3}{10^4} < \frac{1}{10^3}$. În general, dacă numerele a şi b au aceeaşi parte întreagă şi aceleaşi prime n zecimale, atunci $a^{(n)} = b^{(n)}$, şi $|a - b| = |a - a^{(n)} + b^{(n)} - b| \leqslant |a - a^{(n)}| + |b^{(n)} - b| < \frac{2}{10^n} < \frac{1}{10^{n-1}}$, adică b este o

aproximare de cel mult $\frac{1}{10^{n-1}}$ a lui a. Afirmația inversă nu este adevărată, așa cum arată numerele a și b, considerate la început, unde a și b nu au zecimale comune, deși $|a-b| < \frac{1}{10^3}$.

3) Teorema I.2 se mai poate enunța astfel: pentru orice x real, are loc formula aproximativă $x \simeq x^{(n)}$, cu eroare absolută mai mică decât 10^{-n}, $\forall\, n \in \mathbf{N}$.

TEOREMA I.3. Fie a, b numere reale fixate și $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$. Presupunem că x este o ε_1 — aproximare a lui a și y este o ε_2 — aproximare a lui b. Atunci

1°. suma $x+y$ este o $(\varepsilon_1+\varepsilon_2)$ — aproximare a lui $a+b$;

2°. diferența $x-y$ este o $(\varepsilon_1+\varepsilon_2)$ — aproximare a lui $a-b$;

3°. produsul xy este o ε — aproximare a lui ab, unde $\varepsilon = \varepsilon_1\varepsilon_2 + |x|\varepsilon_2 + |y|\varepsilon_1$.

Demonstrație. Conform ipotezei, $|x-a| < \varepsilon_1$ și $|y-b| < \varepsilon_2$.

1°. Avem $|(x+y)-(a+b)| = |(x-a)+(y-b)| \leqslant |x-a| + |y-b| < \varepsilon_1+\varepsilon_2$.

2°. În mod similar, $|(x-y)-(a-b)| = |(x-a)+(b-y)| \leqslant |x-a|+|y-b| < \varepsilon_1+\varepsilon_2$.

3°. Mai întâi, se observă că are loc identitatea

$xy - ab = (x-a)(b-y) + y(x-a) + x(y-b)$, de unde

$|xy-ab| \leqslant |x-a|\cdot|y-b| + |y|\cdot|x-a| + |x|\cdot|y-b| < \varepsilon_1\varepsilon_2 + |y|\varepsilon_1 + |x|\varepsilon_2$.

Exemplu. În formulele aproximative $\pi \simeq 3{,}1416$, $\sqrt{2} \simeq 1{,}4142$ erorile absolute sunt mai mici decât $\varepsilon = 0{,}0001$. Atunci, în formulele aproximative $\pi + \sqrt{2} \simeq 4{,}5558$, $\pi - \sqrt{2} \simeq 1{,}7274$, eroarea absolută este mai mică decât 0,0002.

Rezultate de tipul celor din teorema I.3 sunt aplicate în mod curent în prelucrarea matematică a datelor experimentale. La introducerea datelor numerice pe calculator se utilizează fracții zecimale finite, în care numărul de zecimale considerate depinde de precizia urmărită ca și de mărimea memoriei calculatorului. În orice caz, trebuie făcută distincția netă dintre un număr real și trunchierile sale de diverse ordine. De exemplu, trebuie făcută distincția între numărul π și oricare din aproximările lui: 3,14; 3,1416 etc.

EXERCIȚII (capitolul I, § 1)

1. Fie $a \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$ dat. Să se rezolve în mulțimea $\mathbf{R}$ ecuațiile: $x^2 = a^2$, $x^3 = a^3$, $x^4 = a^4$.

2. Folosind proprietatea lui Arhimede, să se arate că dacă $x, y \in \mathbf{R}$, $x > 0$, atunci există n natural astfel încât $nx > y$.

3. Să se rezolve în mulțimea $\mathbf{R}$ ecuațiile:

a) $|x| + |x-1| = 1$; b) $|x-1| + |x+1| = 2$.

4. Dacă $x, y \in \mathbf{R}$ și $|x-1| \leqslant 4$, $|y-2| \leqslant 5$, să se arate că $-6 \leqslant x+y \leqslant 12$.

5. Să se rezolve în $\mathbf{R}$ inecuațiile: a) $|x| + |x-1| > 0$; b) $|x| + |x-3| < 0$; c) $|x-1| \leqslant 1$; d) $|x| + |x-2| \leqslant 2x$; e) $|x+1| > 2$; f) $|x+1| > -1$; g) $|x-1| + |x^2-3x+2| > 0$.

6. Să se exprime cu ajutorul modulului faptul că $x \neq y$ și faptul că $x - \frac{1}{10} < y < x + \frac{1}{10}$ (x, y fiind numere reale).

7. Fie $a_1, \ldots, a_n$ numere reale. Dacă $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ sunt numere reale luând doar valorile 0, 1 și -1, să se arate că $\left|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_i|$.

8. a) Presupunem că $0 < x < y$ în $\mathbf{R}$; să se arate că $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$. Este adevărată reciproca?

b) Presupunem că $x_1 \leqslant y_1$, $x_2 \leqslant y_2$ și $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$ în $\mathbf{R}$. Să se arate că $x_1 = y_1$ și $x_2 = y_2$. Generalizare.

9. Pentru orice $x \in \mathbf{R}$ se notează $x_+ = \frac{x + |x|}{2}$ și $x_- = \frac{-x + |x|}{2}$. Să se arate că $x = x_+ - x_-$, $|x| = x_+ + x_-$. Să se reprezinte graficele funcțiilor $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definite prin $f(x) = x_+$ și $g(x) = x_-$.

10. Fie b_1, b_2 numere reale fixate. Să se arate că funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin $f(x) = |x + b_1| + |x + b_2|$, $\forall x \in \mathbf{R}$, nu este injectivă.

11. Pentru orice numere reale $x > 0$, $y > 0$ se pot considera mediile: aritmetică $m_a = \frac{x+y}{2}$, geometrică $m_g = \sqrt{xy}$ și armonică $m_\alpha = \frac{2xy}{x+y}$. Să se arate că

$$m_\alpha \leqslant m_g \leqslant \frac{m_a + m_\alpha}{2} \leqslant m_a.$$

12. Fie x, y, a, b numere reale oarecare. Să se arate că:

1°. $(xa + yb)^2 \leqslant (x^2 + y^2)(a^2 + b^2)$ (inegalitatea lui Cauchy-Buniakowski-Schwartz); A.L. Cauchy, 1789–1857; V. Buniakowski, 1804–1889; H.A. Schwartz, 1843–1921.

2°. $\sqrt{(x+y)^2 + (a+b)^2} \leqslant \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{y^2 + b^2}$ (inegalitatea lui H. Minkowski, 1864–1909).

13. Să se determine toate valorile numărului natural n astfel încât:

a) $\frac{1}{n} < \frac{1}{10}$; d) $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{10}$; g) $\frac{n^2}{n+1} < 10$;

b) $\frac{1}{n} > \frac{1}{20}$; e) $\frac{1}{5^n} > \frac{1}{125}$; h) $\left|\frac{n^2}{n^2+1} - 1\right| < \frac{1}{100}$;

c) $\frac{1}{2^n} < 1$; f) $\left|\frac{2n+1}{n} - 2\right| > \frac{1}{10}$; i) $\left|\frac{2^n+1}{2^n+2} - 1\right| < \frac{1}{10}$.

În care cazuri mulțimile respective de valori sunt finite?

14. Să se determine $\bigcap_{n \in \mathbf{N},\, n \geqslant 1} \left[0, \frac{1}{n}\right]$; $\bigcap_{n \in \mathbf{N},\, n \geqslant 1} \left(0, \frac{1}{n}\right)$; $\bigcup_{n \in \mathbf{Z}} [-n, n]$; $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} \left[0, \frac{n}{n+1}\right]$.

15. Să se arate că în orice interval mărginit din $\mathbf{R}$ se află cel mult un număr finit de numere întregi.

16. Să se arate că intersecția a două intervale deschise este mulțimea vidă sau un interval deschis. Dar intersecția a două intervale compacte?

17. a) Să se indice o submulțime a lui $\mathbf{R}$ care nu poate fi reprezentată ca reuniune a două intervale.

b) Să se arate că mulțimea $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$ este o reuniune de intervale deschise.

18. Fie $q \geqslant 1$ un număr întreg. Să se arate că pentru orice $x \in \mathbf{R}$ există p întreg astfel încât $\frac{p}{q} \leqslant x < \frac{p+1}{q}$. Să se deducă inegalitatea $\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q}$.

19. Pentru orice $x, y \in \mathbf{R}$ se notează $d(x, y) = |x - y|$, distanța euclidiană între x și y. Să se arate că $\forall\, x, y, z \in \mathbf{R}$ avem $d(x, y) \geqslant 0$ și $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$; $d(x, y) = d(y, x)$; $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(y, z)$.

20. Să se figureze pe dreapta reală următoarele mulțimi de puncte: $A_1 = \{x \in \mathbf{R} \mid d(x, 1) \leqslant 1\}$, notată pe scurt $\{d(x, 1) \leqslant 1\}$; $A_2 = \{d(x, 1) > 2\}$; $A_3 = \{1 \leqslant d(x, 2) \leqslant 5\}$; $A_4 = \{d(x, 0) > -1\}$; $A_5 = \{d(x, 0) \geqslant 4\}$; $A_6 = \{d(x, 0) \leqslant 4\}$.

21. Fie $I = [a, b]$ un interval închis, respectiv $J = (a, b)$, unde $a < b$. Să se arate că pentru orice $x, y \in I$ (respectiv $\in J$), avem $d(x, y) \leqslant l(I)$, (respectiv $d(x, y) < l(J)$).

22. Să se determine valorile numărului natural n astfel încât:

a) $d\left(\frac{3n+1}{n}, 3\right) < \frac{1}{10}$; b) $d\left(\frac{3n+1}{n}, 3\right) < \frac{1}{10^4}$; c) $d\left(\frac{3n+1}{n}, 1\right) < \frac{1}{10}$.

23. Pentru câte valori ale numărului natural n au loc relațiile:

a) $\frac{n+1}{n+2} > \frac{11}{10}$; b) $\frac{(2n)!}{(2n+1)!} > \frac{1}{10}$; c) $\left| \frac{n+1}{2n+3} - \frac{1}{2} \right| > \frac{1}{10}$;

d) $\left| \frac{n^2+2n}{n^2+1} - 1 \right| > \frac{1}{20}$.

24. Să se arate că există N_1, N_2 naturale astfel încât:

a) $\frac{n}{n^2+n+1} < \frac{1}{10}$ pentru orice $n \geqslant N_1$; b) $2^n \geqslant n$ pentru orice $n \geqslant N_2$.

25. Să se arate că:

a) există $M > 0$ astfel încât $\frac{n^2+1}{n^4+1} < M$ pentru orice $n \in \mathbf{N}$;

b) nu există $M > 0$ astfel încât $\frac{n^4+1}{n^2+1} < M$ pentru orice $n \in \mathbf{N}$.

26. Să se indice două numere reale $a < b$ astfel încât $a < \frac{2n^2+n}{2n^2+1} < b$, pentru orice n natural.

27. Câte zecimale exacte trebuie considerate pentru π și pentru $\sqrt{2}$ astfel încât suma $\pi + \sqrt{2}$ să fie calculată cu o aproximare de cel mult 10^{-4}? Aceeași întrebare pentru $\pi\sqrt{2}$.

28. Fie $\frac{p}{q}$ ($p > 0$, $q > 0$ întregi) o aproximare a lui $\sqrt{2}$. Să se arate că numărul raţional $\frac{p+2q}{p+q}$ este o aproximare „mai bună" pentru $\sqrt{2}$.

29. Fie a, b numere reale fixate. Ce se poate spune despre a şi b în ipoteza că $|a-b| < \varepsilon$ pentru orice $\varepsilon > 0$ întreg? Dar dacă $|a-b| < \varepsilon$ pentru orice număr raţional $\varepsilon > 0$?

30. Fie a, b numere reale fixate. Să se arate că dacă $a < b + \varepsilon$ pentru orice $\varepsilon > 0$, atunci $a \leqslant b$.

31. Să se arate că $\forall k \geqslant 1$, $\frac{1}{\sqrt{k}} > 2\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k}$; deduceţi că pentru orice A există N natural astfel încât $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > A$ pentru orice $n \geqslant N$.

32. Să se verifice prin inducţie că $x^n \geqslant 1 + n(x-1)$ pentru orice n natural şi pentru orice $x > 0$ *(inegalitatea lui I. Bernoulli*, 1654—1705).

§ 2. Funcţii reale. Operaţii cu funcţii reale

Se poate afirma că analiza matematică elementară revine la studiul funcţiilor de o variabilă reală cu valori reale. Acest studiu este cerut atât de nevoia de a descrie evoluţia unor procese fizice, tehnologice, economice, dar şi de însăşi dezvoltarea matematicii. În cea mai mare parte, cuprinsul acestui paragraf vă este cunoscut şi am căutat aici doar o prezentare sintetică. Vom urmări totodată sistematic modul cum se reflectă structurile (algebrice şi de ordine) dreptei reale asupra funcţiilor reale.

2.1. Funcţii reale ; grafice, exemple

Reamintim că două funcţii $f : E \to F$, $g : E_1 \to F_1$ sunt *egale* dacă au loc egalităţile de mulţimi $E = E_1$, $F = F_1$ şi dacă $f(x) = g(x)$ pentru orice $x \in E$. În pofida simplităţii acestei definiţii, demonstrarea egalităţii a două funcţii poate să nu fie uşoară. De exemplu, dacă $a \in \mathbf{R}$, atunci demonstrarea egalităţii funcţiilor f, $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definite prin $f(x) = (x+a)^n$, $g(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} a^k$ revine la stabilirea formulei binomului lui Newton.

Reamintim că funcţiile cu valori în $\mathbf{R}$ se numesc *funcţii reale*. Să presupunem că $f : D \to \mathbf{R}$ este o funcţie reală de o variabilă reală, definită pe o submulţime $D \subset \mathbf{R}$; atunci *graficul* ei G_f este submulţimea lui $\mathbf{R}^2$ formată din toate perechile $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ astfel încât $x \in D$ şi $y = f(x)$, adică

$$G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in D\}.$$

Se mai spune că relația

(3) $$y = f(x)$$

este *ecuația graficului* lui f. Făcând convenția de a fixa în plan un sistem ortogonal de axe xOy, de a considera D ca mulțime de puncte pe axa absciselor, iar valorile lui f ca puncte pe axa ordonatelor, graficul G_f este o submulțime de puncte din acel plan, anume submulțimea formată din punctele ale căror coordonate verifică relația (3). Graficul unei funcții reale date nu poate fi întotdeauna reprezentat cu precizie și se indică doar o schiță aproximativă cuprinzând puncte remarcabile ale graficului. Prin grafice se redau vizual caracteristici ale funcțiilor și o imagine gobală asupra valorilor funcției prin limbajul special oferit de desen. În unele cazuri, semnalele fizice, asimilate cu funcții reale, au graficele indicate pe ecranul osciloscoapelor (în fig. 1.4 apar două semnale).

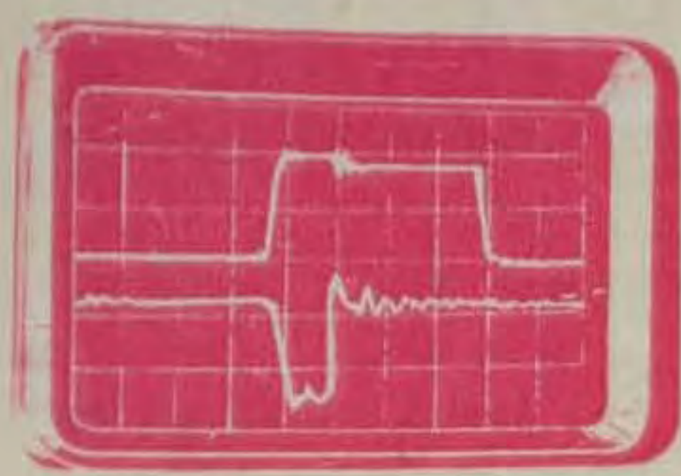


Fig. 1.4

Exemple

1) Funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin $f(x) = \sin x$ este diferită de funcția $g : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$, definită prin $g(x) = \sin x$. De exemplu, g este bijectivă, în timp ce f nu este injectivă nici surjectivă. Se spune, în acest caz, că f este o prelungire a lui g.

2) Multe legi fizice exprimă dependențe ale unor mărimi de alte mărimi. Modelul matematic al lor îl constituie uneori funcțiile reale. De exemplu, formula $s = v \cdot t$ (legea mișcării rectilinii uniforme cu viteza constantă v) este strâns legată de funcția reală $s : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin $s(t) = v \cdot t$. „Graficul mișcării uniforme" este de fapt graficul funcției s. De obicei studiul mișcării este limitat la un interval de timp I și atunci trebuie considerată funcția $s : I \to \mathbf{R}$, $s(t) = v \cdot t$ (am folosit aceeași notație pentru funcții care trebuie considerate distincte).

Multe teoreme din analiza matematică se referă la funcții definite pe intervale. În anumite contexte fizice, barele rectilinii pot fi asimilate prin intervale; de asemenea, se vorbește curent de intervale de timp (definiția noțiunii de interval a fost dată la pagina 9). Să considerăm o bară metalică asimilată cu un interval $I \subset \mathbf{R}$. Pentru orice punct $x \in I$ notăm cu $t(x)$ temperatura barei în punctul x. În acest mod este definită o funcție reală $t : I \to \mathbf{R}$ (fig. 1.5). Proprietățile matematice posibile ale acestei funcții: mărginire, monotonie, continuitate etc. sunt strâns legate de proprietăți fizice ale barei considerate.

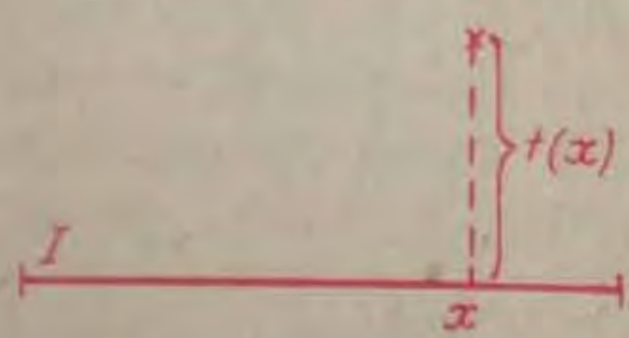


Fig. 1.5

În cadrul rigorii matematice, ori de câte ori este studiată o funcție, trebuie indicate explicit, domeniul (mulțimea) ei de definiție și mulțimea de valori.

3) În unele considerații fizice este utilă funcția următoare:

$$\sigma : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \text{ definită prin } \sigma(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x < 0 \\ 1, & \text{dacă } x \geq 0 \end{cases}$$

numită *treapta unitate* (a lui O. Heaviside, 1850 – 1925), având graficul indicat în figura 1.6 (săgeata corespunde capătului unui interval deschis).

Acesta este un exemplu de funcție reală definită „cu acoladă". Astfel de funcții apar în mod necesar în unele descrieri. Să presupunem că tensiunea U într-o rețea electrică

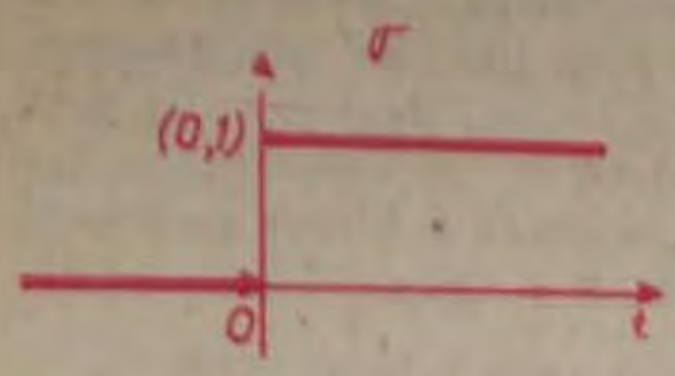


Fig. 1.6

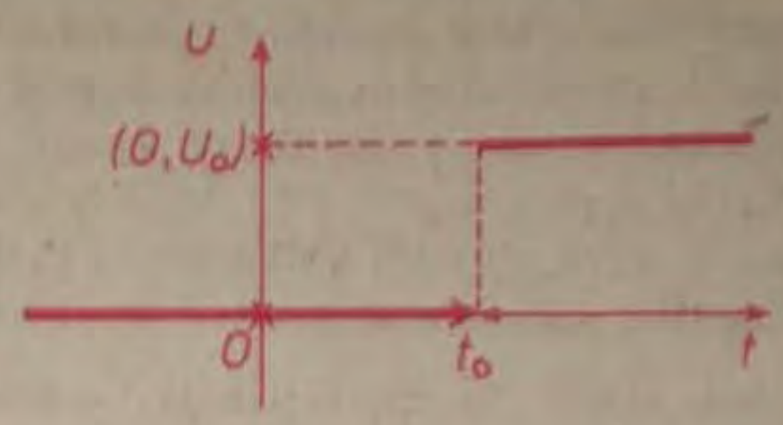


Fig. 1.7

este egală cu zero până la un moment t_0 şi are o valoare constantă U_0 începând din acel moment. Funcţia care modelează variaţia în timp a tensiunii din acea reţea este funcţia $U : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin

$$U(t) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } t < t_0 \\ U_0, & \text{dacă } t \geq t_0 \end{cases}$$

având graficul indicat în figura 1.7. De remarcat că funcţia U este constantă pe fiecare din intervalele $(-\infty, t_0)$, $[t_0, \infty)$, dar nu este constantă pe $\mathbf{R}$. Are loc egalitatea $U(t) = U_0 \cdot \sigma(t - t_0)$ pentru orice $t \in \mathbf{R}$. Pentru $t_0 = 0$, $U_0 = 1$, avem $U = \sigma$.

4) Se pot considera funcţii reale mai neobişnuite având însă importanţă teoretică: de exemplu, funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ a lui P.L. Dirichlet (1805–1859), definită prin

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in \mathbf{Q} \\ 0, & \text{dacă } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$$

2.2. Operaţii algebrice cu funcţii reale

Fie $f : D \to \mathbf{R}$, $g : D \to \mathbf{R}$ două funcţii reale definite pe aceeaşi mulţime D. Se pot considera atunci *funcţia-sumă* $s = f + g$, $s : D \to \mathbf{R}$ definită prin $s(x) = f(x) + g(x)$, $\forall\, x \in D$ şi *funcţia-produs* $p = fg$, $p : D \to \mathbf{R}$ definită prin $p(x) = f(x) \cdot g(x)$, $\forall\, x \in D$. Se pot, de asemenea, defini *funcţia-diferenţă* $f - g : D \to \mathbf{R}$ prin $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$, $\forall\, x \in D$ şi *funcţia-cât* $h = \dfrac{f}{g}$, definită pe mulţimea $D_1 = \{x \in D \mid g(x) \neq 0\}$ prin $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, $\forall\, x \in D_1$.

Se observă că aceste funcţii au fost definite folosind structura algebrică a dreptei reale, care este domeniul de valori (codomeniul) al funcţiilor f şi g.

Exemple

1) Pentru funcţiile $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definite prin $f(x) = (x + 2)^2$, $g(x) = (x - 2)^2$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$, suma $s = f + g$ este funcţia $s : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $s(x) = (x + 2)^2 + (x - 2)^2 = 2x^2 + 8$, iar funcţia-cât $h = \dfrac{f}{g}$ este definită pe mulţimea $D_1 = \mathbf{R} \setminus \{2\}$, prin $h(x) = \dfrac{(x + 2)^2}{(x - 2)^2}$, $\forall\, x \in D_1$.

2) Pentru funcţiile $f : [0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ şi $g : (-\infty, 0) \to \mathbf{R}$, $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{-x}}$ nu se pot defini $f + g$, $f - g$, fg şi $\dfrac{f}{g}$, pentru că f şi g nu au aceeaşi mulţime de definiţie.

3) Orice funcţie monom $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin $f(x) = ax^p$ (a real şi $p \geq 0$ întreg) este obţinută prin operaţii de produs între funcţii constante şi funcţia identică $1_{\mathbf{R}} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x$. Orice funcţie polinomială $P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ se obţine prin sume finite de funcţii-monom. Aceasta revine la faptul că există numere reale $a_0, a_1, \ldots, a_n$, $a_0 \neq 0$ astfel încât $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$ (dacă P are gradul n). În cazurile $n = 1$ şi $n = 2$ regăsim funcţiile de gradul I (liniară) şi de gradul II studiate în clasele anterioare. Funcţiile raţionale sunt câturi de funcţii polinomiale; dacă P şi Q sunt funcţii polinomiale, atunci funcţia raţională $\frac{P}{Q}$ este definită pe mulţimea $\{x \in \mathbf{R} \mid Q(x) \neq 0\}$.

Observaţie. Structura de ordine pe mulţimea $\mathbf{R}$ permite introducerea unei relaţii de ordine şi pe mulţimea funcţiilor reale definite pe o aceeaşi mulţime D. Fie $f, g : D \to \mathbf{R}$ două funcţii; scriem $f \leq g$ (şi citim f este mai mică sau egală cu g pe mulţimea D) dacă $f(x) \leq g(x)$ pentru orice $x \in D$. În mod similar, faptul că $f > 0$ înseamnă că $f(x) > 0$ pentru orice $x \in D$. Relaţia „$f \leq g$" este reflexivă ($f \leq f$), tranzitivă ($f \leq g$, $g \leq h \Rightarrow f \leq h$) şi antisimetrică ($f \leq g$, $g \leq f \Rightarrow f = g$), deci este o relaţie de ordine. Spre deosebire de relaţia de ordine pe mulţimea numerelor reale, în cazul funcţiilor relaţia de ordine nu este totală; anume fiind date două funcţii $f, g : D \to \mathbf{R}$ *nu* rezultă în mod necesar $f \leq g$ sau $g \leq f$, ci se poate ca ele să nu fie comparabile.

Reamintim că dacă a, b sunt numere reale, atunci notăm cu $\max(a, b)$ şi $\min(a, b)$ cel mai mare şi respectiv cel mai mic dintre numerele a, b. Aşadar

$$\max(a, b) = \begin{cases} a, & \text{dacă } a \geq b \\ b, & \text{dacă } a < b \end{cases}, \quad \min(a, b) = \begin{cases} a, & \text{dacă } a \leq b \\ b, & \text{dacă } a > b \end{cases}.$$

Evident, $\max(a, b) = \max(b, a)$, $\min(a, b) = \min(b, a)$. Aceste noţiuni se pot extinde pentru un număr finit de numere reale.

Dacă $f, g : D \to \mathbf{R}$ sunt două funcţii reale, atunci se pot defini funcţiile $h = \max(f, g) : D \to \mathbf{R}$, $h(x) = \max(f(x), g(x))$, $k = \min(f, g) : D \to \mathbf{R}$, $k(x) = \min(f(x), g(x))$. De asemenea, se defineşte funcţia-modul $|f| : D \to \mathbf{R}$ $x \mapsto |f(x)|$. Aşadar, pentru orice $x \in D$ avem:

$$|f|(x) = \begin{cases} f(x), & \text{dacă } f(x) > 0 \\ 0, & \text{dacă } f(x) = 0 \\ -f(x), & \text{dacă } f(x) < 0. \end{cases}$$

2.3. Compunerea şi inversarea funcţiilor

Dacă $f : A \to B$, $g : B \to C$ sunt două funcţii astfel încât domeniul de valori al lui f să coincidă cu domeniul de definiţie al lui g, atunci se poate considera *funcţia-compusă* $h = g \circ f$, $h : A \to C$ definită prin $h(x) = g(f(x))$, $\forall\, x \in A$.

Dacă $f_1 : A \to B$, $f_2 : B \to C$, $f_3 : C \to D$ sunt trei funcţii, atunci se verifică imediat relaţia $f_3 \circ (f_2 \circ f_1) = (f_3 \circ f_2) \circ f_1$; se mai spune că operaţia de compunere este asociativă.

Exemple

1) Fie $f : \mathbf{R} \to [0, \infty)$, $f(x) = x^2$ şi $g : [0, \infty) \to \mathbf{R}$, $g(x) = \sqrt{x}$. Are sens $h = g \circ f$ şi se obţine funcţia $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $h(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2} = |x|$, $\forall x \in \mathbf{R}$. De asemenea, are sens şi $k = f \circ g$, $k : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $k(x) = f(g(x)) = g(x^2) = (\sqrt{x})^2 = x$, $\forall x \geq 0$.

2) Funcţia $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin $h(x) = \sin^2 x$ este tocmai $g \circ f$ pentru $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sin x$ şi $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(u) = u^2$; în mod similar, funcţia $h : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $h(x) = \sin \frac{1}{\sqrt{x}}$ este egală cu $g \circ f$ unde $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ şi $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(u) = \sin u$.

Fie $f : A \to B$ o funcţie bijectivă. În acest caz se poate defini *inversa* lui f, anume funcţia $f^{-1} : B \to A$, care asociază oricărui element $y \in B$ acel unic $x \in A$ astfel încât $f(x) = y$. Evident, $f^{-1} \circ f = 1_A$, $f \circ f^{-1} = 1_B$.

Dacă $f : A \to B$ este o funcţie oarecare şi $A' \subset A$ este o submulţime, atunci se poate defini submulţimea $\{f(x) \mid x \in A'\}$ a lui B, numită *imaginea* lui A' prin f şi notată $f(A')$.

Exemple

1) Funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3$ este bijectivă şi inversa ei este $f^{-1} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

2) Funcţia $f : \mathbf{R} \to [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$ nu poate fi inversată (nefiind injectivă) Dar prin restricţie la intervalul $A = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ se obţine o funcţie bijectivă.

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]; \text{ inversa acestei funcţii este } \arcsin = \sin^{-1},$$

$$\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

definită asociind oricărui număr $x \in [-1, 1]$ acel unic $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ astfel încât $\sin y = x$.

În mod similar, funcţiile $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$, $\operatorname{tg} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbf{R}$, $\operatorname{ctg} : (0, \pi) \to \mathbf{R}$, sunt bijective şi admit respectiv următoarele inverse:

$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$, $x \mapsto y$ (unde y este definit prin $\cos y = x$);

$\operatorname{arctg} : \mathbf{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $x \mapsto y$ unde $\operatorname{tg} y = x$;

$\operatorname{arcctg} : \mathbf{R} \to (0, \pi)$, $x \mapsto y$ unde $\operatorname{ctg} y = x$.

EXERCIŢII (capitolul I, § 2)

1. Să se determine domeniul maxim de definiţie pentru funcţiile f următoare (adică mulţimea acelor $x \in \mathbf{R}$ pentru care $f(x)$ are sens şi este un număr real):

a) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

b) $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{x}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$

d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

e) $f(x) = \sqrt{x^2-4}$

f) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$

g) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3-1}$

h) $f(x) = \dfrac{x^3-4}{x^2}$

i) $f(x) = \dfrac{x}{x^3-1}$

j) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{|x-1|}$

k) $f(x) = \dfrac{x-1}{|x|-1}$

l) $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1}$

m) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+|x|}$

n) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4x+m}$ $(m \in \mathbf{R})$

o) $f(x) = \dfrac{1}{x^4-16}$

p) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^4-16}}$

q) $f(x) = \dfrac{1}{|x^4-16|-15}$

r) $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$

s) $f(x) = \sqrt[3]{1-x^3} + \sqrt[3]{1+x^3}$

t) $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x-1}}{x^2-1}$

u) $f(x) = \sqrt{1-\cos x}$

v) $f(x) = \sqrt{\sin x}$

w) $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{\sin x}$

z) $f(x) = \operatorname{ctg} \pi x$.

2. Să se traseze graficul funcţiilor $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definite prin:

a) $f(x) = |x| + 2$

b) $f(x) = |2-4x|$

c) $f(x) = |x^2-1|$

d) $f(x) = x + |x|$

e) $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } x \leq 1 \text{ sau } x \geq 3 \\ 2, \text{ dacă } 1 < x < 3 \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ dacă } x \leq 0 \\ -x^2, \text{ dacă } x > 0 \end{cases}$

g) $f(x) = |1 + x - |x||$

h) $f(x) = \sin x + |\sin x|$

i) $f(x) = \min\limits_{t \leq x} t^2$

j) $f(x) = \max(x, x^2)$

k) $f(x) = \min(1, x)$

l) $f(x) = \min(1, x, x^2)$

3. Se consideră intervalul $I = [0, 2]$. Să se traseze graficul funcţiei $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } x \in I \\ 0, \text{ dacă } x \notin I \end{cases}$ şi al funcţiei $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin $g(x) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } x \in I \\ x, \text{ dacă } x \notin I \end{cases}$

4. Să se reprezinte grafic funcțiile $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definite prin:

a) $f(x) = -2x \cdot \operatorname{sgn} x$;
b) $f(x) = (x^2 + 1) \operatorname{sgn} x$;
c) $f(x) = 2x + \sigma(x)$;
d) $f(x) = x^2\sigma(x)$;
e) $f(x) = x\sigma(x - 2)$;
f) $f(x) = \sigma(x) - \sigma(x - 2)$;
g) $f(x) = (\sin x) \operatorname{sgn} x$;
h) $f(x) = (\sin x)\sigma(x)$.

5. Să se explicite $f(x)$ pentru funcțiile f ale căror grafice sunt indicate în figura I.8, unde $n \geq 1$ este întreg.

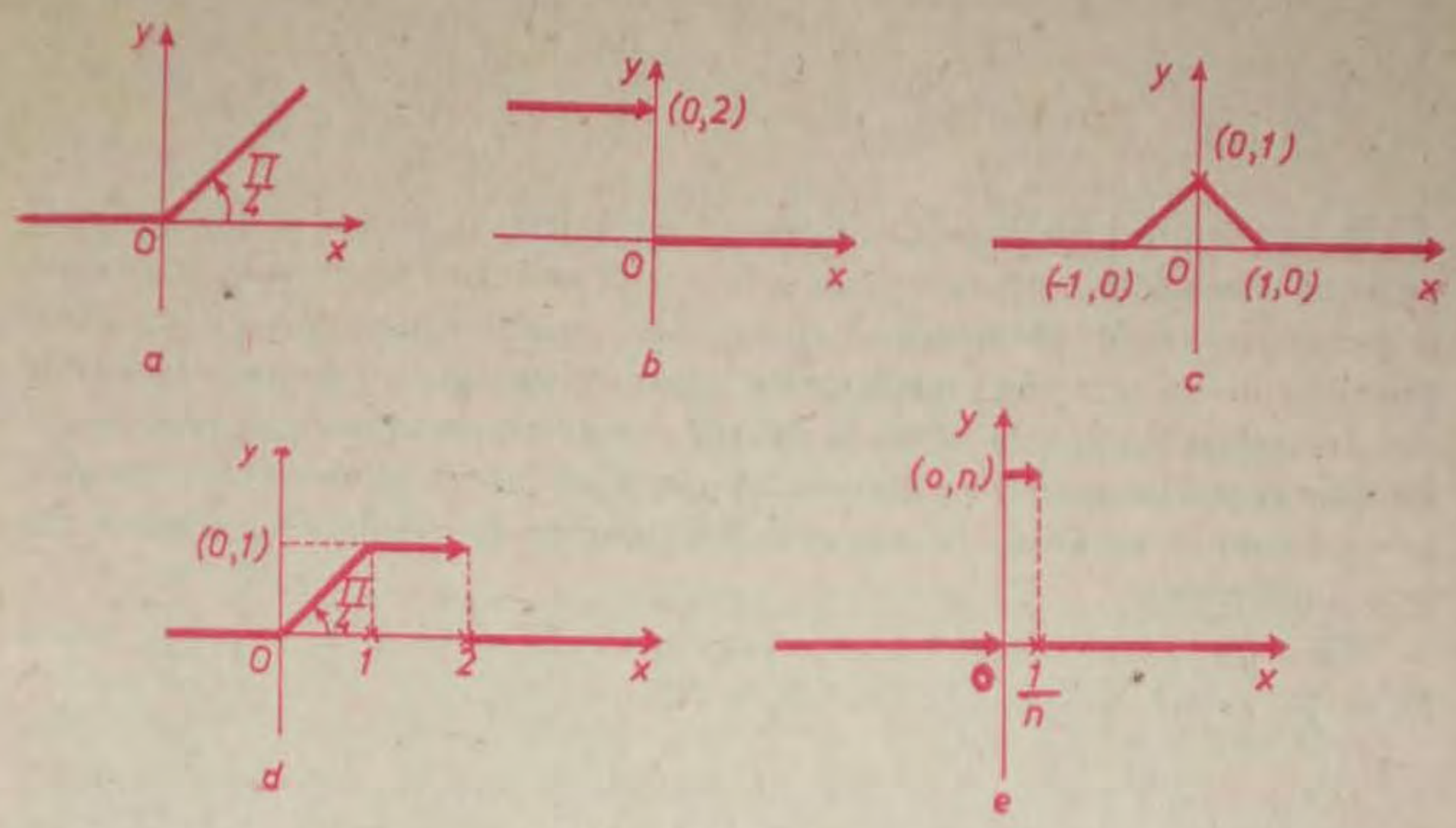


Fig. I.8

6. Să se determine funcția reală $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ știind că $f(x + 1) = x^2 + 3x - 1$, $\forall x \in \mathbf{R}$; idem, $f(2x - \pi) = \cos^2 x$, $\forall x \in \mathbf{R}$ și $f(1 - 2x) = |x|$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

7. a) Dacă $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este o funcție reală fixată și se consideră funcția $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin $g(x) = f(x - a)$ ($a \in \mathbf{R}$ constant), ce legătură există între graficele G_f, G_g?

b) Fie $f : D \to \mathbf{R}$ o funcție reală fixată și k o constantă reală. Se consideră funcțiile $u : D \to \mathbf{R}$, $v : D \to \mathbf{R}$ definite prin $u(x) = f(x) + k$, $v(x) = kf(x)$. Cum pot fi obținute graficele lui u și v din graficul lui f?

8. Presupunem construit graficul unei funcții reale $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Cum se obțin graficele funcțiilor $-f$, $|f|$, $\sigma \cdot f$, $\operatorname{sgn} f$?

9. Să se calculeze $g \circ f$, $f \circ g$ pentru următoarele perechi de funcții $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$:

a) $f(x) = x + 1$, $\quad g(x) = x^2 - x$;

b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $\quad g(x) = |x|^3$;

c) $f(x) = \begin{cases} x, \text{ dacă } x \geq 0 \\ 0, \text{ dacă } x < 0 \end{cases}$, $\quad g(x) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } x \geq 0 \\ x, \text{ dacă } x < 0 \end{cases}$;

d) $f(x) = x + |x|$, $\quad g(x) = \begin{cases} x, \text{ dacă } x \geq 0 \\ x^2, \text{ dacă } x < 0 \end{cases}$;

e) $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } x \text{ este rațional} \\ 0, \text{ dacă } x \text{ este irațional} \end{cases}$, $\quad g(x) = \begin{cases} x^2, \text{ dacă } x \text{ este rațional} \\ 0, \text{ dacă } x \text{ este irațional} \end{cases}$.

10. Se consideră funcțiile $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2x + 7$ și $g : (0, 1) \to \mathbf{R}$, $g(x) = \frac{1}{2x - 2}$.

Să se determine o valoare $\delta > 0$ astfel încât:

a) $|f(x) - 9| < \frac{1}{100}$, dacă $|x - 1| < \delta$

b) $g(x) < -100$, dacă $x \in (1 - \delta, 1)$.

§ 3. Noțiunea de șir

Există multe probleme de algebră, geometrie și chiar de matematică aplicată care utilizează șiruri. Este suficient să amintim progresiile aritmetice și geometrice, șirul perimetrelor $(p_n)_{n \geq 3}$ poligoanelor regulate cu n laturi înscrise într-un cerc șirul rezultatelor intermediare într-un proces algoritmic etc. În același timp, vom vedea că șirurile constituie un important instrument teoretic și practic al analizei matematice. Intuitiv, un șir de elemente înseamnă „un element după altul" fiecare având un număr de ordine. Dar aceasta nu este o definiție.

Fie k un număr natural fixat. Vom nota $\mathbf{N}_k = \{n \in \mathbf{N} \mid n \geq k\}$, adică $\mathbf{N}_k = \{k, k+1, k+2, \ldots\}$. Deci $\mathbf{N}_0 = \mathbf{N}$.

DEFINIȚIA I.1. Fie M o mulțime fixată. Prin șir infinit de elemente ale lui M vom înțelege o funcție

$$f : \mathbf{N}_k \to M,$$

unde k este un număr natural fixat.

În loc de șir infinit vom spune, pe scurt, șir.

Cel mai adesea avem $k = 0$ sau $k = 1$. Punând $f(n) = a_n$, șirul f se mai notează $(a_n)_{n \geq k}$. Cele mai des utilizate șiruri vor fi scrise astfel: $(a_n)_{n \geq 0}$ sau $(a_n)_{n \geq k}$. Elementul a_n se numește *termenul de rangul n* al șirului; pentru $k = 1$ el este tocmai al n-lea termen al șirului.

Așadar, șirul de numere reale $(a_n)_{n \geq 0}$ este funcția $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ definită prin $f(n) = a_n$, $\forall n \geq 0$. Dacă $M = \mathbf{Q}$ (respectiv $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$), vom spune că avem un șir de numere raționale (respectiv iraționale).

Două șiruri $(a_n)_{n \geq k}$, $(b_n)_{n \geq k}$ sunt *egale* dacă $a_n = b_n$ pentru orice $n \geq k$.

Este important de făcut distincție între un șir și mulțimea termenilor săi (ceea ce revine la distincție între o funcție și imaginea acelei funcții). Astfel, șirurile $((-1)^n)_{n \geq 1}$ și $((-1)^{n+1})_{n \geq 1}$ sunt distincte, dar au aceeași mulțime a termenilor, anume $\{-1, 1\}$.

Pentru un șir $(a_n)_{n \geq 0}$ se poate considera submulțimea $\{(n, a_n) \mid n \in \mathbf{N}\}$ a lui $\mathbf{R}^2$, adică graficul șirului.

Exemple de şiruri

1) Dacă $a \in \mathbf{R}$, atunci se poate considera şirul constant $(a_n)_{n\geq 0}$ definit prin $a_n = a$ pentru orice întreg $n \geq 0$. Dacă $b \neq a$ este un alt număr real, atunci se poate considera şirul $(c_n)_{n\geq 0}$ definit prin

$$c_n = \begin{cases} a, \text{ dacă } n \text{ este impar} \\ b, \text{ dacă } n \text{ este par} \end{cases}$$

care nu mai este un şir constant. Se observă că pentru orice $n \geq 0$ avem:

$$c_n = a \cdot \frac{1-(-1)^n}{2} + b \cdot \frac{1+(-1)^n}{2}.$$

2) Şirul $(n)_{n\geq 0}$ se numeşte şirul numerelor naturale, a cărui mulţime de termeni este $\mathbf{N}$. Se pot, de asemenea, considera şirul $(2n)_{n\geq 0}$ al numerelor pare şi şirul $(2n+1)_{n\geq 0}$ al numerelor impare.

3) Indicăm un exemplu de şir care apare în unele consideraţii economice.

Presupunem costul iniţial al unei instalaţii egal cu C. După începerea funcţionării instalaţiei, acesta se micşorează treptat, deoarece în calcule economice se face convenţia că o parte din cost este transferată produselor obţinute cu ajutorul acelei instalaţii. Să notăm cu C_n costul acelei instalaţii după n ani de funcţionare, $n \geq 1$. Raportul $\mu = \frac{C - C_1}{C}$ se numeşte *coeficient de amortizare* a costului iniţial; deoarece $C_1 < C$, avem $0 < \mu < 1$. Pentru calculul lui C_n în funcţie de C, n, μ se observă mai întâi că $\mu C \to C - C_1$, deci $C_1 = C(1-\mu)$; economiştii fac ipoteza că în anii următori se respectă aceeaşi regulă, adică $C_2 = C_1(1-\mu) = C(1-\mu)^2$, $C_3 = C_2(1-\mu) = C(1-\mu)^3$ etc. şi, în general, $C_n = C(1-\mu)^n$ pentru orice $n \geq 1$. Aşadar, este definit în mod firesc un şir de numere reale $(C_n)_{n\geq 0}$ unde $C_0 = C$.

Ca o aplicaţie concretă, să presupunem costul iniţial al instalaţiei $C = 500\,000$ lei şi după 4 ani, $C_4 = 20\,000$ lei. Ne propunem să determinăm costul instalaţiei după 8 ani şi să aflăm după câţi ani costul acelei instalaţii devine mai mic decât 100 lei. Mai întâi, din relaţia $C_4 = C(1-\mu)^4$, rezultă $20\,000 = 500\,000(1-\mu)^4$, adică $25(1-\mu)^4 = 1$, de unde $\mu = 1 - \frac{\sqrt{5}}{5}$. Atunci $C_8 = C(1-\mu)^8 = 500\,000\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^8 = 800$ lei. Punând condiţia $C_n < 100$, rezultă $500\,000\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^n < 100$, deci $n \geq 11$. Aşadar, după 11 ani costul acelei instalaţii coboară sub 100 de lei.

4) Pentru orice număr real $x = m, x_1x_2x_3\ldots$, $x > 0$, am notat cu $x^{(0)} = m$, $x^{(1)} = m + \frac{x_1}{10}$, $x^{(2)} = m + \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{100}$, ... trunchierile sale succesive. În acest mod, se obţine un şir de numere raţionale $(x^{(n)})_{n\geq 0}$ asociat lui x. Reamintim că $0 \leq x - x^{(n)} < \frac{1}{10^n}$ pentru orice $n \geq 0$, conform teoremei I.2.

5) Considerăm un semnal într-un interval I de timp, identificat cu o funcţie $\varphi : I \to \mathbf{R}$. Pentru orice moment $t \in I$, valoarea $\varphi(t)$ se numeşte *eşantionul* semnalului φ la momentul t. Pentru orice şir de momente $(t_n)_{n\geq 0}$ din I se poate considera şirul $(\varphi(t_n))_{n\geq 0}$ al eşantioanelor semnalului φ la momentele considerate.

§ 4. Submulțimi ale lui R

4.1. Submulțimi mărginite ale lui R

La acest punct vom preciza câteva noțiuni importante legate de relația de ordine pe **R**. Pentru înțelegerea lor recomandăm folosirea reprezentării geometrice pe axă.

Fie $A \subset \mathbf{R}$ o submulțime nevidă. Reamintim că un element $b \in \mathbf{R}$ se numește *majorant pentru* A dacă el este mai mare decât toate elementele lui A, adică $x \leqslant b$ pentru orice $x \in A$. Dacă o mulțime admite majoranți, ea se numește *mărginită superior* sau *majorată*. În mod similar se definesc minoranții lui A (ca elemente $a \in \mathbf{R}$ astfel încât $a \leqslant n$ pentru orice $x \in A$) și submulțimile mărginite inferior. Dacă un majorant b al lui A aparține lui A, atunci se spune că A are un *cel mai mare element* (anume b); acest număr este unic și este notat cu „max A". Similar, dacă mulțimea A are un minorant aparținând lui A, atunci acesta este *cel mai mic element* al lui A notat „min A".

Exemple

1) Dacă $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_p$ sunt numere reale și $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$, atunci minoranții lui A sunt numerele $\leqslant a_1$, iar majoranții lui A sunt numerele $> a_p$. Apoi min $A = a_1$, max $A = a_p$.

2) Dacă $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$, atunci max $A = 1$, iar majoranții lui A sunt toate numerele reale mai mari sau egale cu 1. Arătăm că nu există min A; într-adevăr dacă ar exista min A, atunci el aparține lui A, adică min $A = \frac{1}{k}$, $k \geqslant 1$. Dar $\frac{1}{k+1} < \frac{1}{k}$ și se obține o contradicție (anume în A ar exista elemente mai mici decât min A). Minoranții lui A sunt toate numerele $a \leqslant 0$.

DEFINIȚIA I.2. O submulțime nevidă $M \subset \mathbf{R}$ se numește mărginită dacă ea este mărginită superior și inferior. Un șir infinit $(a_n)_{n \geqslant k}$ de numere reale se numește mărginit dacă mulțimea termenilor săi este mărginită.

Așadar, mulțimea M este mărginită dacă și numai dacă ea este conținută într-un interval compact $[\alpha, \beta]$ și este nemărginită în caz contrar. Șirul $(a_n)_{n \geqslant k}$ este mărginit dacă și numai dacă există numere reale $\alpha < \beta$ astfel încât $\alpha \leqslant a \leqslant \beta$ pentru orice $n \geqslant k$.

Exemple

1) Orice interval mărginit este mulțime mărginită.

2) Dacă o submulțime $A \subset \mathbf{R}$ are un cel mai mare element, atunci max A este un majorant al lui A (chiar cel mai mic majorant al lui A), iar dacă există și min A, atunci mulțimea A este mărginită și $A \subset [\min A, \max A]$.

3) Mulțimea **N** nu este mărginită superior, deci nu este mărginită. De asemenea, mulțimile **Z**, **Q**, **R** nu sunt mărginite.

4) Şirul $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\geq 1}$ este mărginit deoarece toţi termenii săi aparţin intervalului $[0, 1]$, adică $0 \leq \frac{1}{n^2} \leq 1$ pentru orice $n \geq 1$. În mod similar, şirul $\left(\frac{1}{n-2}\right)_{n\geq 3}$ este mărginit deoarece $0 < \frac{1}{n-2} \leq 1$ pentru orice $n \geq 3$.

5) Şirul $\left(\frac{(-1)^n}{n^2+1}\right)_{n\geq 0}$ este mărginit deoarece $\left|\frac{(-1)^n}{n^2+1}\right| = \frac{1}{n^2+1} \leq 1$ pentru orice $n \geq 0$.

Mai general, un şir $(a_n)_{n\geq k}$ este mărginit dacă şi numai dacă există un număr $D > 0$ astfel încât $|a_n| \leq D$ pentru orice $n \geq k$.

La punctul 1.2 am enunţat axioma lui Cantor, conform căreia orice submulţime nevidă majorată $C \subset \mathbf{R}$ admite un cel mai mic majorant, notat „sup C".

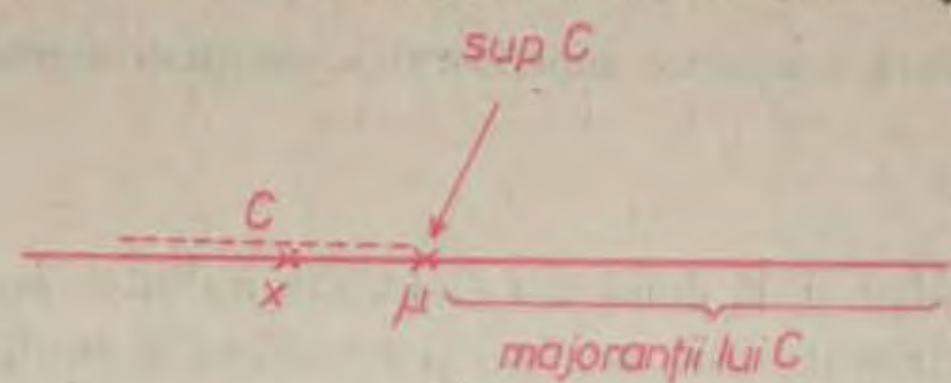


Fig. 1.9

Numărul $\mu = \sup C$ este numit *marginea superioară a mulţimii* C şi el este caracterizat, aşadar, prin următoarele două condiţii:

1°. pentru orice $x \in C$ avem $x \leq \mu$;

2°. pentru orice $\varepsilon > 0$ există $y \in C$ astfel încât $\mu - \varepsilon < y$ (pentru că $\mu - \varepsilon$ nu este majorant al lui C).

Prin simetrie faţă de origine, rezultă că orice submulţime minorată $C \subset \mathbf{R}$ admite un cel mai mare minorant numit *marginea inferioară* a lui C şi notat „inf C".

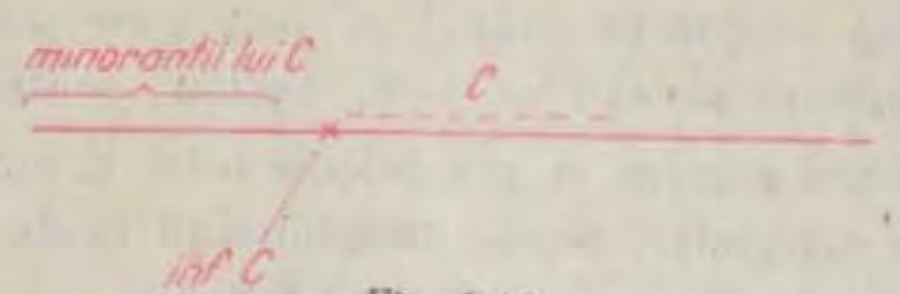


Fig. 1.10

Aşadar, dacă o submulţime nevidă $C \subset \mathbf{R}$ este mărginită, atunci ea admite marginile $\lambda = \inf C$ şi $\mu = \sup C$ şi intervalul $[\lambda\ \mu]$ este cel mai mic interval compact care conţine C (cel mai mic în sensul ordinii date de incluziune). Remarcăm, de asemenea, că dacă pentru o mulţime $A \subset \mathbf{R}$ există $\min A$ (respectiv $\max A$), atunci A este minorată (respectiv majorată) şi $\inf A = \min A$ (respectiv $\sup A = \max A$).

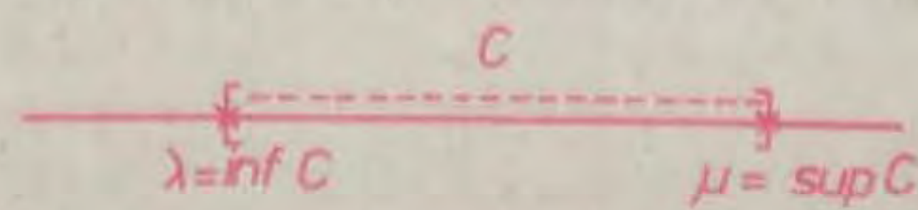


Fig. 1.11

Exemple

1) Avem $\inf \mathbf{N} = \min \mathbf{N} = 0$, dar mulțimea $\mathbf{N}$ nu are margine superioară în $\mathbf{R}$ deoarece nu are majoranți.

2) Considerăm mulțimea $C = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \geqslant 1 \text{ întreg} \right\}$; în acest caz $\sup C = \max C = 1$. Arătăm apoi că $\inf C = 0$. Avem $0 \leqslant x$ pentru orice $x \in C$ și 0 este cel mai mare minorant; într-adevăr un număr $a > 0$ nu poate fi un minorant al lui C, deoarece există $n \geqslant 1$ întreg astfel încât $\frac{1}{n} < a$.

Pentru $C = \left\{ \frac{2n+1}{n} \mid n \geqslant 1 \text{ întreg} \right\} = \left\{ 3,\ 2 + \frac{1}{2},\ 2 + \frac{1}{3},\ 2 + \frac{1}{4},\ \ldots \right\}$, $\inf C = 2$, $\sup C = 3$.

3) Dacă $(a_n)_{n \geqslant k}$ este un șir mărginit de numere reale vom nota cu $\inf\limits_{n \geqslant k} a_n$ și respectiv $\sup\limits_{n \geqslant k} a_n$ marginea inferioară (respectiv superioară) a mulțimii termenilor șirului. Astfel $\inf\limits_{n \geqslant 1} \frac{1}{n} = 0$, $\sup\limits_{n \geqslant 1} \frac{1}{n} = 1$.

Adjuncționăm mulțimii $\mathbf{R}$ două noi elemente numite *minus infinit* (notat $-\infty$) și *plus infinit* (notat $+\infty$ sau ∞) și considerăm mulțimea

$$\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty,\ \infty\},$$

numită *dreaptă reală încheiată*. Așadar, $\mathbf{R}$ este o submulțime a lui $\overline{\mathbf{R}}$ și uneori elementele lui $\mathbf{R}$ se mai numesc numere *finite*. Pe mulțimea $\overline{\mathbf{R}}$ se poate introduce o relație de ordine, prelungind ordinea din $\mathbf{R}$, punând

$$-\infty < \infty \text{ și } -\infty < x,\ x < \infty \text{ pentru orice } x \in \mathbf{R}.$$

Pentru $a \in \mathbf{R}$ vom considera mulțimile: $[-\infty, a) = \{x \in \overline{\mathbf{R}} \mid -\infty \leqslant x < a\}$ și $(a, \infty] = \{x \in \overline{\mathbf{R}} \mid a < x \leqslant \infty\}$, numite tot intervale. Dacă o submulțime nevidă $C \subset \mathbf{R}$ nu este majorată, atunci se mai scrie simbolic $\sup C = \infty$, iar dacă C nu este minorată, $\inf C = -\infty$. Așadar, pentru orice submulțime nevidă $C \subset \mathbf{R}$, mărginită sau nu, se pot calcula $\inf C$ și $\sup C$ în mulțimea $\overline{\mathbf{R}}$; în cazul când C este mărginită, aceste margini sunt finite.

Exemple: $\sup \mathbf{N} = \infty$, $\inf \mathbf{Z} = -\infty$, $\sup \mathbf{Z} = \infty$.

4.2. Noțiunea de vecinătate a unui punct

Fixăm un punct $a \in \mathbf{R}$.

DEFINIȚIA 1.3. Se numește **vecinătate** a punctului a orice mulțime $V \subset \mathbf{R}$ care conține un interval deschis centrat în a.

În acest caz există $r > 0$ astfel încât $(a - r,\ a + r) \subset V$.

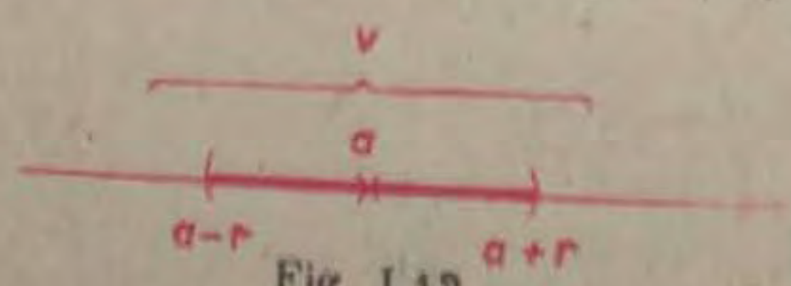


Fig. 1.12

Exemple

1) Intervalele $(-4, 4)$, $[-2, 3)$, $\left(-\infty, \frac{7}{2}\right)$, $\mathbf{R}$ sunt vecinătăţi ale originii, deoarece conţin intervalul deschis $(-1, 1)$ centrat în origine. Mulţimea $\mathbf{Z}$ nu este vecinătate a originii pentru că nu conţine nici un interval $(-r, r)$, cu $r > 0$.

2) Este evident că un interval deschis (a, b), $a < b$, este vecinătate a oricărui punct al său; intervalul închis $[a, b]$ este vecinătate a oricărui punct c, astfel încât $a < c < b$, dar nu este vecinătate a capetelor a, b.

3) Dacă $a, b \in \mathbf{R}$ şi $a \neq b$, atunci există vecinătăţi disjuncte ale lor; într-adevăr, presupunem $a < b$ şi fie $r = \frac{b-a}{3}$. Atunci intervalele $(a - r, a + r)$, $(b - r, b + r)$ sunt vecinătăţi ale punctelor a, respectiv b şi sunt disjuncte (figura I.13).

Fig. I.13

De asemenea, se pot defini vecinătăţile lui $-\infty$ sau ∞. Se numeşte *vecinătate* a lui ∞ (respectiv $-\infty$) orice mulţime $V \subset \overline{\mathbf{R}}$ care conţine un interval de forma (b, ∞) (respectiv de forma $[-\infty, b)$), unde b este un număr real. De exemplu orice interval (b, ∞) la care se adaugă punctul ∞ însuşi este vecinătate a lui ∞, iar intervalul $(-\infty, b)$ reunit cu $\{-\infty\}$ este vecinătate a lui $-\infty$.

Cu ajutorul noţiunii de vecinătate se poate defini noţiunea de punct de acumulare al unei submulţimi a lui $\mathbf{R}$, care va fi utilizată în elaborarea conceptului de limită a unei funcţii.

DEFINIŢIA I.4. Fie $D \subset \mathbf{R}$ o submulţime. Un punct $\alpha \in \overline{\mathbf{R}}$ se numeşte **punct de acumulare** pentru D dacă în orice vecinătate a lui α există cel puţin un punct $D \setminus \{\alpha\}$.

Exemple

1) Pentru $D = (a, b)$, $a < b$, orice punct $\alpha \in [a, b]$ este un punct de acumulare.

2) Pentru $D = N$, ∞ este unicul punct de acumulare, iar mulţimea $\mathbf{Z}$ are pe $-\infty$, şi ∞ ca puncte de acumulare.

3) Pentru $D = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$, orice număr real α este punct de acumulare, inclusiv 1, deoarece este satisfăcută condiţia din definiţia I.4. De asemenea, $-\infty$, ∞ sunt puncte de acumulare pentru D.

4) Mulţimea $D = (-1, 2] \cup \{3\}$ are ca puncte de acumulare punctele intervalului închis $[-1, 2]$, iar punctul 3 nu este punct de acumulare pentru D.

5) Submulţimile finite ale lui $\mathbf{R}$ nu au puncte de acumulare.

Un punct $x \in D$ care nu este punct de acumulare pentru $D \subset \mathbf{R}$ se numeşte *punct izolat*. În exemplul 4, de mai sus, $x = 3$ este punct izolat pentru D.

EXERCIŢII (capitolul I, § 4)

1. Să se scrie primii 6 termeni pentru fiecare din şirurile:

a) $\left(\frac{1}{2n+1}\right)_{n \geq 0}$; b) $\left(\frac{n^2}{n-2}\right)_{n \geq 3}$; c) $\left(\frac{2n}{n!}\right)_{n \geq 1}$; d) $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})_{n \geq 0}$.

2. Folosind inegalitatea lui Bernoulli [$x^n \geq 1 + n(x-1)$, pentru orice $x > 0$, $n \in \mathbf{N}$] să se arate că

a) $1{,}02^{100} \geq 3$; $1{,}01^{100} \geq 11$.

b) dacă $0 < a < 1$ este fixat, atunci există N natural astfel încât $a^n < \frac{1}{10}$ pentru orice $n \geq N$.

c) dacă $a > 1$ este fixat, atunci există N natural astfel încât $a^n > 10$ pentru orice $n \geq N$ și nu există N natural astfel încât $a^n < \frac{1}{10}$ pentru orice $n \geq N$.

3. a) Fie $A \subset \mathbf{R}$ o mulțime mărginită. Să se arate că orice submulțime a lui A este mărginită.

b) Dacă A_1, A_2 sunt submulțimi mărginite ale lui $\mathbf{R}$ să se arate că $A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2$, $A_1 \setminus A_2$ au aceeași proprietate.

4. Fie $a, b \in \mathbf{R}$. Să se arate că

1°. $\max(a, b) = \frac{a + b + |a - b|}{2}$, $\min(a, b) = \frac{a + b - |a - b|}{2}$.

2°. dacă $\max(a, b) = \min(a, b)$, atunci $a = b$.

5. Să se determine minoranții și majoranții $\min A$, $\max A$ (dacă există) pentru următoarele submulțimi A ale dreptei reale:

a) $A = [-1, 1]$;

b) $A = (0, 100)$;

c) $A = \{\sin 1, \sin 2, \sin 3\}$;

d) $A = [-2, 2) \cup (3, 4]$;

e) $A = \left\{1 - \frac{1}{n} \mid n \geq 1 \text{ întreg}\right\}$;

f) $A = \left\{\frac{2^n - 1}{2^n + 1} \mid n \geq 1 \text{ întreg}\right\}$.

6. Pentru orice submulțime nevidă $C \subset \mathbf{R}$ notăm $-C = \{-x \mid x \in C\}$ Să se arate că dacă C este mărginită, atunci $\sup(-C) = -\inf C$ și $\inf(-C) = -\sup C$.

7. Să se arate că mulțimile următoare sunt mărginite și să se indice în fiecare caz marginea inferioară și marginea superioară.

$M_1 = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 \leq 2\}$, $M_2 = \{x \in \mathbf{Q} \mid x^2 < 2\}$, $M_3 = \{x \in \mathbf{R} \mid x^4 \leq 16\}$.

8. Să se arate că șirurile următoare sunt mărginite și să se determine $\inf\limits_n a_n$, $\sup\limits_n a_n$:

a) $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2}$, $n \geq 1$; b) $a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$, $n \geq 0$; c) $a_n = \frac{1}{n^2}$, $n \geq 1$;

d) $a_n = \frac{2n+1}{n+2}$, $n \geq 0$; e) $a_n = \min(10, n)$, $n \geq 0$; f) $a_n = \cos\frac{1}{n}$, $n \geq 1$.

9. Să se arate că următoarele submulțimi A ale lui $\mathbf{R}$ sunt nemărginite și să se determine $\inf A$, $\sup A$ (calculate în $\overline{\mathbf{R}}$):

a) $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 0,\ x^2 > 3\}$;

b) $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - x \leq 0\}$;

c) $A = \left\{\frac{x^2}{x+1} \mid x > 0\right\}$;

d) $A = \{x - \sin x \mid x \in \mathbf{R}\}$.

10. Care din submulțimile $V \subset \mathbf{R}$ următoare sunt vecinătăți ale originii:

a) $V = (-1, 2)$;

b) $V = [0, \infty)$;

c) $V = (-3, 1) \cup (3, \infty)$;

d) $V = \mathbf{Q}$?

11. Fie $a = \frac{1}{2}$. Este $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$ o vecinătate a punctului a? Dar intervalul $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$? Dar intervalul $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + r\right]$, $r > 0$?

12. Care din submulțimile următoare $V \subset \overline{\mathbf{R}}$ sunt vecinătăți pentru $-\infty$ sau $+\infty$:
a) $V = (0, \infty]$; b) $V = [-\infty, 5)$; c) $V = [-\infty, -1) \cup (2, \infty)$; d) $V = \mathbf{Z}$?

13. Să se arate că originea este punct de acumulare pentru mulțimea $D = \left\{\frac{1}{n^2} \mid n \geq 1 \text{ întreg}\right\}$ și că ∞ este punct de acumulare pentru $D = \{n^2 \mid n \geq 1 \text{ întreg}\}$.

14. Să se arate că punctul $\alpha = 8$ este punct de acumulare pentru submulțimile $D \subset \mathbf{R}$ următoare:

a) $D = (0, 8)$; b) $D = \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$; c) $D = \mathbf{Q}$;
d) $D = (8, \infty)$; e) $D = \mathbf{R} \setminus \{8, 12\}$; f) $D = \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.

15. Să se determine punctele de acumulare și punctele izolate ale submulțimilor $D \subset \mathbf{R}$ următoare:

a) $D = (-1, 1]$;

b) $D = (-\infty, 1) \cup (5, \infty)$;

c) $D = \mathbf{Z}$;

d) $D = \left\{ \frac{1}{x} \mid x \in \mathbf{R},\ x \neq 0 \right\}$;

e) $D = \left\{ (-1)^n \cdot \frac{1}{n} \mid n \geqslant 1 \text{ întreg} \right\}$;

f) $D =$ domeniul maxim de definiție pentru $f(x) = \arcsin\left(x - \sqrt{1 - x^2}\right)$.

16*. Fie $I_n = [a_n, b_n]$, $n \geqslant 0$ un șir de intervale compacte, astfel încât $\forall\, n \geqslant 0$, $I_n \supset I_{n+1}$. Să se arate că intersecția $\bigcap_{n \geqslant 0} I_n$ este nevidă.

§ 5. Câteva clase de funcții reale

În cele ce urmează, vom trece în revistă câteva tipuri de funcții reale, de fapt o sinteză a unor noțiuni pe care le-ați întâlnit și în clasele anterioare. Se va subînțelege aici existența unui sistem ortogonal de axe xOy fixat în plan.

5.1. Funcții pare, funcții impare

Fie $D \subset \mathbf{R}$ o submulțime simetrică față de origine ($x \in D \Rightarrow -x \in D$) și o funcție $f : D \to \mathbf{R}$. Reamintim că f se numește *pară* dacă $f(-x) = f(x)$, $\forall\, x \in D$. *Graficul unei funcții pare este simetric față de axa Oy.* Într-adevăr, un punct (a, b) din $\mathbf{R}^2$ aparține lui G_f dacă și numai dacă simetricul $(-a, b)$ al lui față de axa Oy aparține lui G_f.

Funcția f se numește *impară* dacă $f(-x) = -f(x)$, $\forall\, x \in D$; în acest caz, dacă $0 \in D$, atunci $f(0) = 0$. *Graficul unei funcții impare este simetric față de origine* deoarece un punct (a, b) din $\mathbf{R}^2$ aparține lui G_f dacă și numai dacă simetricul lui față de origine $(-a, -b)$ aparține lui G_f.

Exemple

1) Funcția $f(x) = x^n$ (n natural) este pară dacă n este par și impară dacă n este impar.

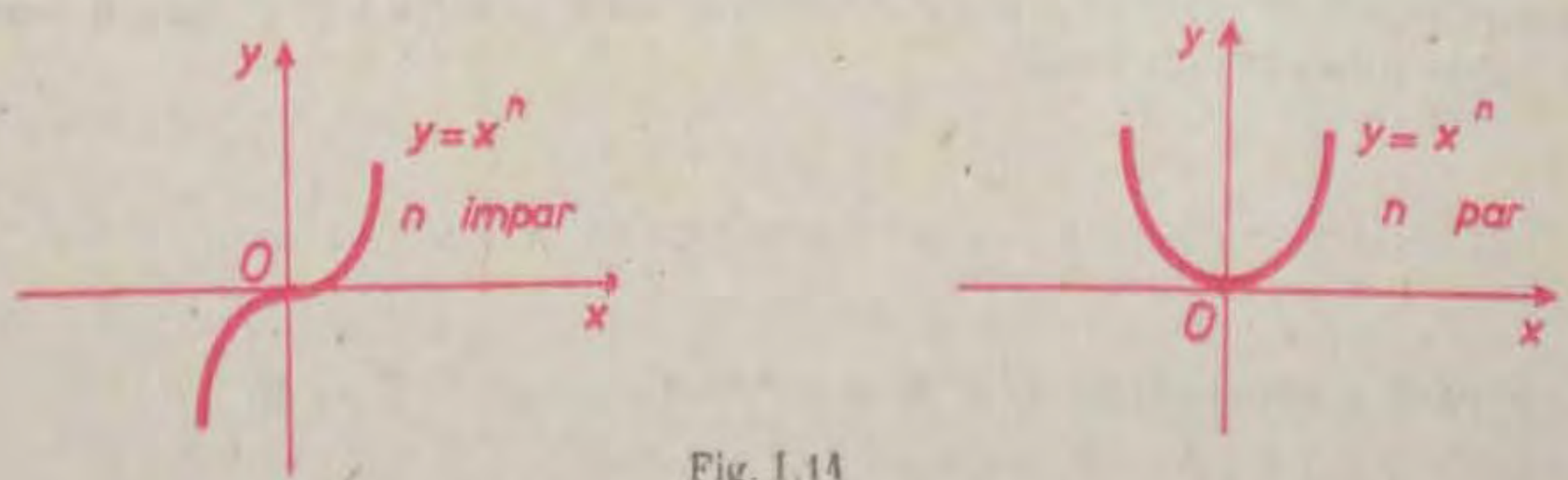


Fig. 1.14

* Exercițiile și problemele notate cu asterisc prezintă un grad sporit de interes sau de dificultate.

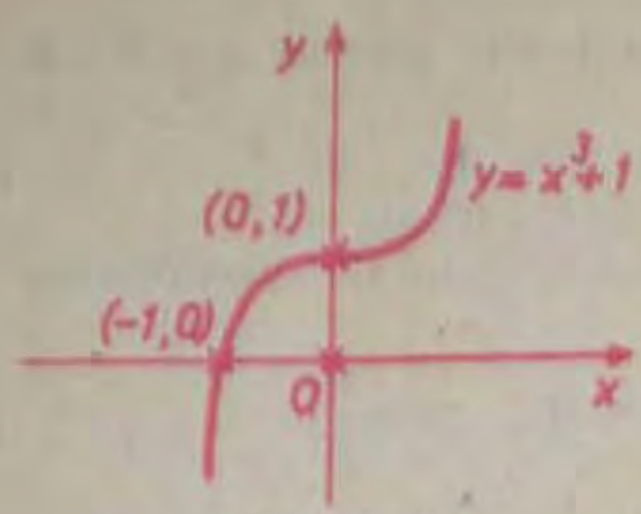


Fig. I.15

2) Suma şi produsul a două funcţii pare sunt funcţii pare. Suma a două funcţii impare este o funcţie impară, iar produsul a două funcţii impare este o funcţie pară. Produsul unei funcţii pare cu o funcţie impară este o funcţie impară.

Verificările necesare sunt imediate.

3) Funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 + 1$, nu este nici pară, nici impară (fig. I.15).

5.2. Funcţii periodice

Se întâlnesc multe fenomene fizice care se repetă periodic: mişcarea Pământului în jurul axei sale (într-o primă aproximare), oscilaţii periodice, mişcări circulare periodice etc. Modelul matematic al lor este descris prin funcţii reale periodice. Fie $T \neq 0$ fixat. Reamintim că o funcţie reală $f : D \to \mathbf{R}$ ($D \subset \mathbf{R}$) se numeşte *periodică* de perioadă T, dacă pentru orice $x \in D$ avem $x + T \in D$, $x - T \in D$ şi $f(x + T) = f(x)$.

În acest caz, pentru orice n întreg nenul, nT este de asemenea o perioadă pentru f, iar mulţimea D este nemărginită. Dacă există o cea mai mică perioadă strict pozitivă, aceasta se numeşte *perioada principală* a lui f. Este atunci suficient ca studiul lui f să fie făcut pe un interval de lungime cât perioada principală.

Exemple

1) Funcţiile sin, cos sunt periodice având perioada principală 2π; mai general, funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$, $\omega \neq 0$ care se numeşte uneori semnal sinusoidal de amplitudine A, pulsaţie ω şi fază φ, este funcţie periodică având perioada principală $\frac{2\pi}{|\omega|}$.

2) Funcţia lui Dirichlet $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } x \text{ este raţional} \\ 0, \text{ dacă } x \text{ este iraţional} \end{cases}$$

este periodică având ca perioadă orice număr raţional $T \neq 0$, deoarece dacă x este raţional (respectiv iraţional), atunci $x + T$ şi $x - T$ sunt la fel, deci $f(x + T) = f(x)$. În acest caz nu există perioadă principală.

5.3. Funcţii monotone ; şiruri monotone de numere reale

Fixăm o submulţime $D \subset \mathbf{R}$ şi o funcţie reală $f : D \to \mathbf{R}$.

DEFINIŢIA I.5. Funcţia f se numeşte:

a) **monoton crescătoare pe** D, dacă

$$\forall x_1, x_2 \in D,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2);$$

a') **strict crescătoare** pe D, dacă

$$\forall x_1, x_2 \in D,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2);$$

b) **monoton descrescătoare** pe D, dacă

$$\forall x_1, x_2 \in D,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2);$$

b') **strict descrescătoare** pe D, dacă

$$\forall x_1, x_2 \in D,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2);$$

c) **monotonă** pe D dacă f este sau monoton crescătoare sau monoton descrescătoare pe D;

c') **strict monotonă** pe D, dacă f este sau strict crescătoare sau strict descrescătoare pe D.

Exemple

1) Funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x$ este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$. Funcția $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $g(x) = x^3$ este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ și strict crescătoare pe $[0, \infty)$ (considerând de fapt restricțiile lui g) fără a fi monotonă pe $\mathbf{R}$. Funcția g nu este monotonă pe nici un interval deschis care conține originea.

2) Funcția „sin" este strict crescătoare pe $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, dar nu este monotonă pe $[0, \pi]$.

În cazul când $D = \mathbf{N}$ se obțin definiții corespunzătoare pentru șiruri de numere reale. Astfel, un șir $(a_n)_{n\geqslant 0}$ este **monoton crescător** dacă $a_n \leqslant a_{n+1}$ pentru orice $n \geqslant 0$ (adică $a_0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots$), **monoton descrescător** dacă $a_n \geqslant a_{n+1}$, $\forall n \geqslant 0$ (adică $a_0 \geqslant a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots$), **strict crescător** dacă $a_n < a_{n+1}$, $\forall n \geqslant 0$ etc. Un șir se numește **monoton** dacă el este monoton crescător sau monoton descrescător.

Exemple

1) Orice șir constant este monoton (atât crescător cât și descrescător), dar nu este strict monoton.

2) Șirul $(n)_{n\geqslant 0}$ este strict crescător, iar șirul $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ este strict descrescător.

3) Șirurile: $((-2)^n)_{n\geqslant 0}$, $\left(\frac{1+(-1)^n}{2}\right)_{n\geqslant 0}$, $\left(\sin\frac{n\pi}{3}\right)_{n\geqslant 0}$ nu sunt monotone.

5.4. Funcții mărginite, margini ale funcțiilor

DEFINIȚIA I.6. O funcție reală $f : D \to \mathbf{R}$ se numește:

a) **mărginită superior** dacă mulțimea valorilor ei (D) este majorată, adică dacă există un număr real B, astfel încât $f(x) \leqslant B$ pentru orice $x \in D$;

b) **mărginită inferior** dacă mulțimea valorilor ei este minorată, adică dacă există un număr real A, astfel încât $f(x) \geq A$ pentru orice $x \in D$;

c) **mărginită** dacă este mărginită inferior și superior, adică dacă există A, B reale, astfel încât $A \leq f(x) \leq B$, $\forall\, x \in D$ [sau, echivalent, dacă există $M > 0$ astfel încât $|f(x)| \leq M$, pentru orice $x \in D$].

Evident, dacă $D \subset \mathbf{R}$, atunci funcția f este mărginită dacă și numai dacă graficul lui f este cuprins între două paralele la axa Ox.

Exemple

1) Funcțiile polinomiale reale de gradul I și de gradul II sunt mărginite pe orice interval închis $D = [a, b]$, dar nu sunt mărginite pe întreg $\mathbf{R}$.

2) Este evident că un șir $(a_n)_{n \geq 0}$ de numere reale este mărginit (definiția I.2) dacă și numai dacă funcția respectivă $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, $n \mapsto a_n$ este mărginită.

3) Funcțiile sin, cos definite pe $\mathbf{R}$ sunt mărginite. Funcția tg: $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbf{R}$ este nemărginită, dar restricția ei la intervalul $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ este mărginită.

4) Funcția $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ este nemărginită $\left(\text{deoarece pentru orice } M > 0, \text{ luând } x_0 = \frac{1}{2M}, \text{ rezultă } f(x_0) = 2M > M\right)$. Restricția lui f la orice interval $[a, \infty)$, $a > 0$ este funcție mărginită, deoarece $|f(x)| \leq \frac{1}{a}$ pentru orice $x \in [a, \infty)$ (fig. I.16).

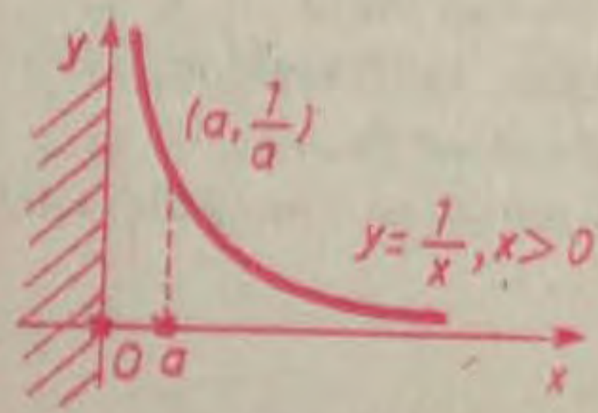


Fig. I.16

5) Este evident că suma, diferența și produsul a două funcții $f, g : D \to \mathbf{R}$ mărginite sunt funcții mărginite (nu același lucru este valabil pentru cât, așa cum arată exemplul funcțiilor sin și cos pe $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$).

Încheiem acest punct cu o ultimă noțiune referitoare la funcțiile mărginite, care apelează la proprietatea lui Cantor.

Dacă $f : D \to \mathbf{R}$ este o funcție mărginită superior (respectiv inferior), atunci mulțimea tuturor valorilor sale, $f(D) = \{f(x) \mid x \in D\}$ este mărginită superior (respectiv inferior) și, ca atare, are margine superioară notată $\sup\limits_{x \in D} f(x)$, respectiv inferioară, notată $\inf\limits_{x \in D} f(x)$. Dacă f este mărginită, atunci, evident, $\inf\limits_{x \in D} f(x) \leq \sup\limits_{x \in D} f(x)$ și dacă are loc egalitatea, atunci f este constantă pe D.

Dacă f nu este mărginită superior se pune $\sup\limits_{x \in D} f(x) = +\infty$, iar dacă nu, f este mărginită inferior se pune $\inf\limits_{x \in D} f(x) = -\infty$.

Exemple

1) Fie funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$. Restricţiile lui f la intervalul $D = [-1, 2]$ şi la intervalul $D' = [-2, -1]$ sunt funcţii mărginite. Avem

$$\inf_{x \in D} x^2 = 0, \quad \sup_{x \in D} x^2 = 4, \quad \inf_{x \in D'} x^2 = 1, \quad \sup_{x \in D'} x^2 = 4.$$

2) $\inf\limits_{x \in [0, 2]} x^2 = 0$, $\sup\limits_{x \in [0, 2]} x^2 = 0$; $\inf\limits_{x \in \mathbf{R}} \sin x = -1$, $\sup\limits_{x \in \mathbf{R}} \sin x = 1$; $\inf\limits_{x \in (0, 1)} (2x + 3) = 3$, $\sup\limits_{x \in (0, 1)} (2x + 3) = 5$.

3) Funcţia $f : (0, 1) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ nu este mărginită; avem $\inf\limits_{x \in (0, 1)} \dfrac{1}{x} = 1$, $\sup\limits_{x \in (0, 1)} \dfrac{1}{x} = +\infty$.

5.5. Câteva funcţii importante

Vom trece acum în revistă unele funcţii importante, în legătură cu proprietăţile de monotonie, mărginire, periodicitate.

a) Orice funcţie polinomială P este definită pe întreg $\mathbf{R}$ şi nu este mărginită şi nici periodică (în cazul când gr $P \geqslant 1$). Monotonia lui P trebuie studiată de la caz la caz. Dacă gr $P \leqslant 1$, atunci funcţia P este monotonă pe întreg $\mathbf{R}$, iar graficul lui P este o dreaptă. Funcţia $P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin $P(x) = x^2$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$ nu este monotonă pe $\mathbf{R}$ şi are numai valori pozitive. Funcţia $P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $P(x) = x^3$ este strict crescătoare şi este nemărginită pe $\mathbf{R}$.

b) Orice funcţie raţională $f = \dfrac{P}{Q}$ (P, Q fiind polinomiale) are ca domeniu maxim de definiţie $D = \{x \in \mathbf{R} \mid Q(x) \neq 0\}$. Dacă Q nu are rădăcini reale, atunci $D = \mathbf{R}$. Nu se poate afirma, în general, nimic despre mărginirea sau monotonia funcţiilor raţionale. De exemplu, funcţia $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0)$ şi pe $(0, \infty)$ (figura I.17, *a*), dar funcţia $g : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ nu este monotonă pe $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ (figura I.17, *b*).

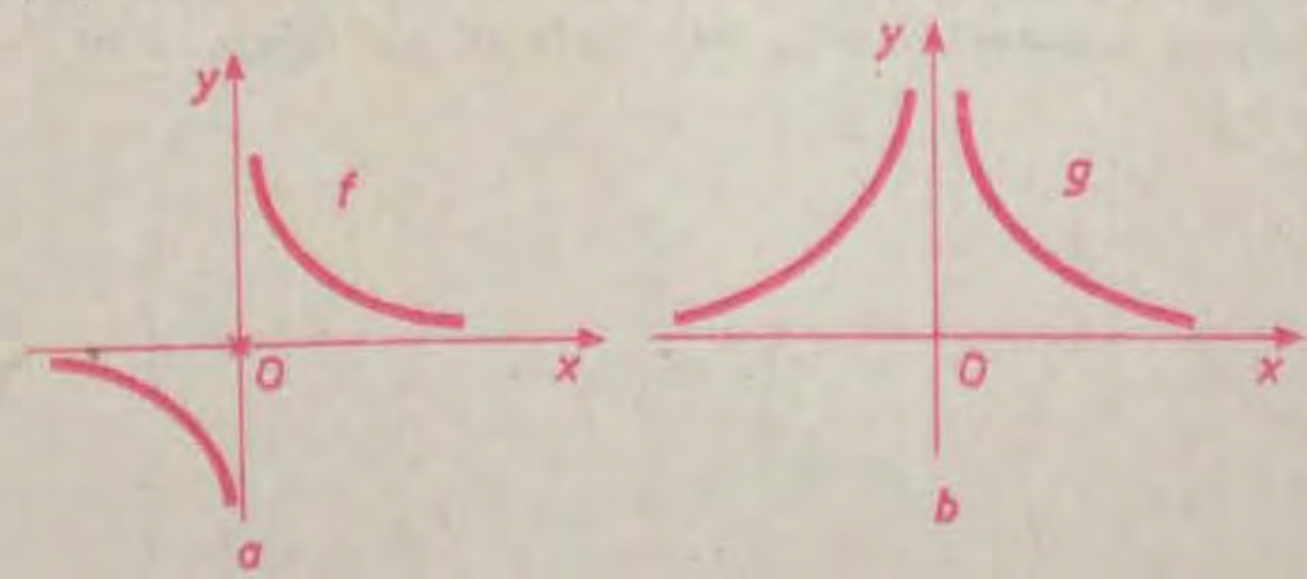


Fig. 1.17

c) *Funcția exponențială* este definită pe întreg $\mathbf{R}$, $f : \mathbf{R} \to (0, \infty)$, $f(x) = 10^x$, având valori strict pozitive. Ea este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$, bijectivă și nu este mărginită (figura I.18, *a*). Inversa ei este funcția logaritmică $\lg : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \lg x$ (figura I.18, *b*) care este, de asemenea, strict crescătoare pe intervalul $(0, \infty)$.

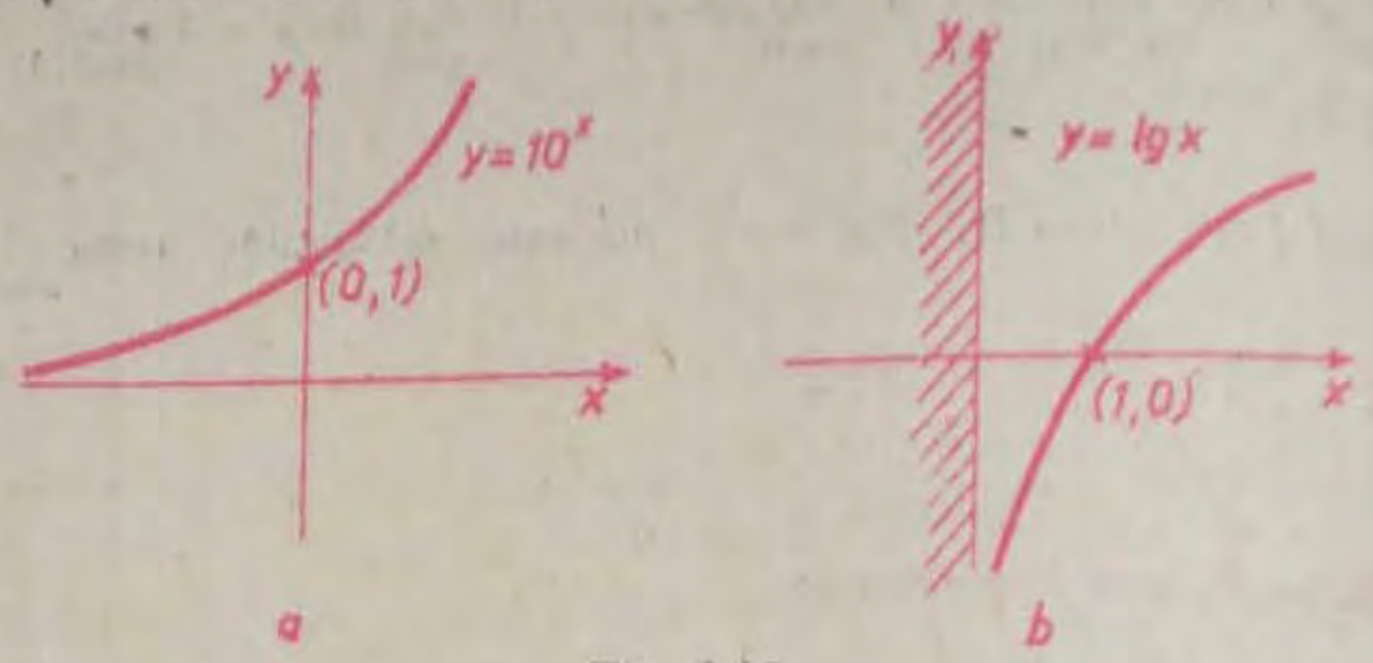


Fig. I.18

Dacă $a > 0$, $a \neq 1$, atunci pentru orice x se poate defini $a^x = 10^{x \cdot \lg a}$ și, cu aceasta, *funcția exponențială în baza a*, anume $f : \mathbf{R} \to (0, \infty)$, $f(x) = a^x$. Această funcție este bijectivă și inversa ei este *funcția logaritmică* $\log_a$ (în baza a). Dacă $a > 1$, atunci ambele funcții sunt strict crescătoare, iar dacă $0 < a < 1$, ele sunt strict descrescătoare.

Dacă $\alpha \in \mathbf{R}$ este fixat se poate, de asemenea, defini *funcția putere de exponent* α, $h : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $h(x) = x^\alpha = 10^{\alpha \cdot \lg x}$. Pentru valori particulare ale lui α, domeniul maxim de definiție D al funcției putere se modifică. De exemplu, pentru $\alpha = 3$ avem $D = \mathbf{R}$, pentru $\alpha = \frac{1}{2}$, $D = (0, \infty)$, iar pentru $\alpha = -\frac{1}{2}$, $D = (0, \infty)$.

d) *Funcția-sinus* $\sin : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este mărginită și periodică de perioadă principală 2π; ea nu este monotonă pe $\mathbf{R}$ și nu este bijectivă. Restrângând convenabil domeniul de definiție și domeniul de valori, anume considerând funcția $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ se obține o funcție bijectivă, strict crescătoare (notată pentru comoditate la fel ca la început, fiind de fapt altă funcție). Graficul acestei funcții este indicat în figura I.19, *a*. Inversa

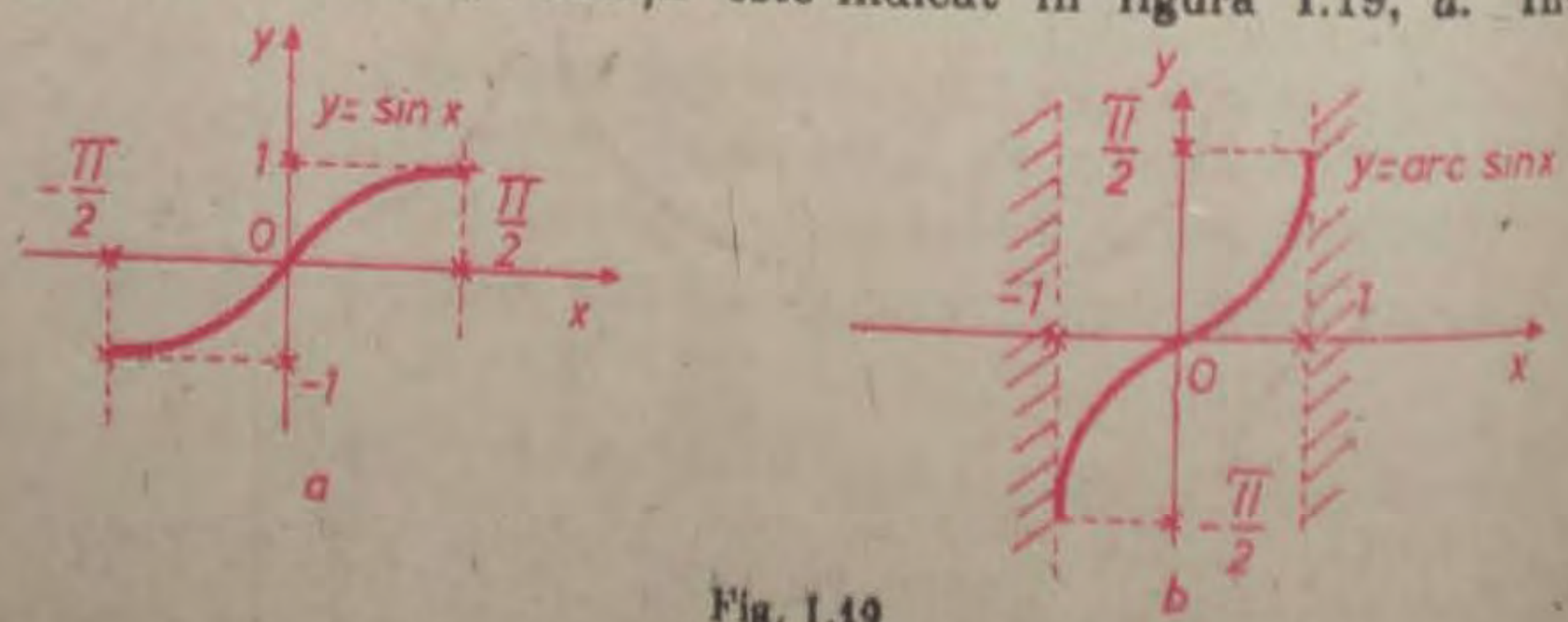


Fig. I.19

ei $\sin^{-1} = \arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ este, de asemenea, strict crescătoare și are graficul indicat în figura 1.19, *b*.

Funcția $\cos : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ nu necesită un studiu aparte, deoarece $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$. De asemenea, funcția $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ nu necesită un studiu special, deoarece $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$, $\forall\, x \in [-1, 1]$.

e) *Funcția-tangentă* este definită pe mulțimea $D = \mathbf{R} \setminus \{\cos x = 0\} = \mathbf{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$. Această funcție este periodică, de perioadă principală π și este nemărginită. Funcția $\mathrm{tg} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbf{R}$ este strict crescătoare, nemărginită și bijectivă, iar inversa ei, $\mathrm{arctg} : \mathbf{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ este strict crescătoare și mărginită (figura 1.20).

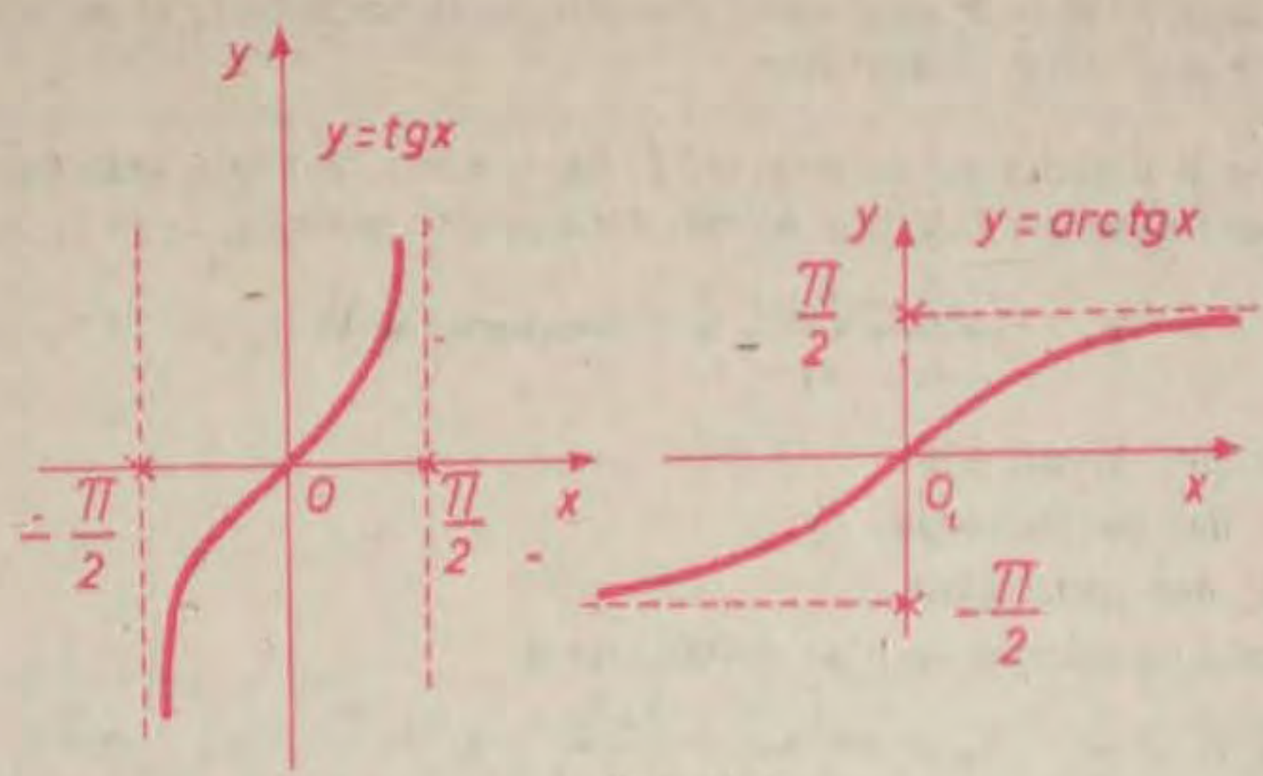


Fig. 1.20

Funcțiile ctg, arcctg nu necesită un studiu special deoarece $\mathrm{ctg}\, x = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$, $x \neq k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$ și $\mathrm{arcctg}\, x = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\, x$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$.

Toate funcțiile considerate mai sus se mai numesc, cu un termen generic, *funcții elementare*.

EXERCIȚII (capitolul 1, § 5)

1. Să se studieze paritatea și imparitatea funcțiilor $f : D \to \mathbf{R}$ următoare (D fiind domeniul maxim de definiție):

a) $f(x) = x^2 + 10$;

b) $f(x) = x^2 + x$;

c) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$;

d) $f(x) = \frac{x^3 + x}{x^4 + 1}$;

e) $f(x) = \frac{1}{x}$;

f) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$;

g) $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$;

h) $f(x) = \sqrt{\sin^2 x}$;

i) $f(x) = x^3 \mid x \mid$;

j) $f(x) = -\sin^3 x$;

k) $f(x) = \frac{x}{1 + \mid x \mid}$;

l) $f(x) = \max(x, x^3)$.

2. Să se arate că funcțiile $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ următoare: $f(x) = |\sin x|$, $f(x) = \cos^2 x$, $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$, $\omega \neq 0$ sunt periodice și să li se determine perioada principală.

3. a) Cum se poate exprima faptul că graficul unei funcții $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este simetric față de dreapta $x = a$? Dar față de punctul $(a, 0)$?

b) Să se arate că dacă graficul unei funcții $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este simetric față de două drepte distincte $x = a$, $x = b$, atunci f este periodică.

4. Să se arate că funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 + 1$ este strict crescătoare pe orice interval; idem $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = x^3 + 3x + 5$.

5. Să se studieze monotonia funcțiilor următoare pe intervalele pe care sunt definite:

a) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 1 + x^2$;

b) $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$;

c) $f : [0, \pi] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \cos x$;

d) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2}{1 + x^2}$.

6. Dacă funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este strict crescătoare și surjectivă, să se arate că f este bijectivă și că f^{-1} este strict crescătoare.

7. Fie $f : I \to \mathbf{R}$ definită pe un interval I. Să se arate că f este monoton crescătoare (respectiv descrescătoare) pe I dacă și numai dacă pentru orice $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$, avem

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0 \text{ (respectiv } \leq 0).$$

8. Dați exemplu de un șir:

a) mărginit, dar nu monoton;

b) monoton, dar nemărginit.

9. Să se arate că șirurile $(a_n)_{n \geq 1}$ definite prin

$$a_n = n^2 + 1,\ a_n = 2^n,\ a_n = \frac{n!}{n+1},\ a_n = \frac{2^n}{n},\ a_n = 3^{\sqrt{n}}$$

sunt monoton crescătoare.

10. Să se arate că următoarele funcții $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sunt mărginite:

a) $f(x) = 3\sin 2x$;

b) $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$;

c) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 4}$;

d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{3 + x^2}$;

e) $f(x) = 2\cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$;

$f(x) = 2^{-|x|}$.

11. Să se studieze mărginirea următoarelor funcții:

a) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = |x|$;

b) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{|x|}{|x| + 1}$;

c) $f : \mathbf{R} \setminus \{1\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{x - 1}$;

d) $f : \mathbf{R} \setminus \{1\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{|x - 1|}$;

e) $f : \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{\sin \pi x}$;

f) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 + 1}{x^2 + 2}}$.

12. Să se determine $\inf\limits_{x \in D} f(x)$, $\sup\limits_{x \in D} f(x)$ pentru următoarele funcții $f : D \to \mathbf{R}$:

a) $f(x) = 2x - 1$, $D = [0, 1]$;

b) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, $D = \mathbf{R}_+^*$;

c) $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $D = [0, 1]$;

d) $f(x) = \cos 2x$, $D = \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME REZOLVATE LA CAPITOLUL I

1. *Să se determine toate valorile lui $n \in \mathbf{N}$ astfel încât*

a) $\dfrac{n}{n^2+1} < \dfrac{1}{10}$; b) $\left|\dfrac{4n}{n+3} - 4\right| > \dfrac{1}{10}$; c) $\left|\dfrac{2^n}{2^n+3} - 1\right| > \dfrac{1}{10}$.

Soluție. a) Inegalitatea se scrie $n^2 - 10n + 1 > 0$ și rezultă $n \in (-\infty, 5 - \sqrt{24}) \cup (5 + \sqrt{24}, \infty)$. Deoarece n este natural, se rețin doar valorile întregi și pozitive, deci $n \geq 10$ și $n = 0$; b) Deci, $\left|-\dfrac{12}{n+3}\right| > \dfrac{1}{10}$, adică $\dfrac{12}{n+3} > \dfrac{1}{10}$, de unde $n + 3 < 120$, $n \in \{0, 1, 2, \ldots, 116\}$; c) Rezultă $\dfrac{3}{2^n+3} > \dfrac{1}{10}$, deci $2^n < 27$, adică $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

2. *Să se arate că există N natural astfel încât $3^n > 100\,n$ pentru orice $n \geq N$. Deduceți că există N natural astfel încât $0 \leq \dfrac{n}{3^n} < \dfrac{1}{100}$ pentru orice $n \geq N$.*

Soluție. Încercăm valorile $n = 0, 1, 2, \ldots$ și observăm că pentru $n = 6$ avem $3^6 = 729 > 600$, iar $3^7 > 700$, $3^8 > 800$ etc. Luând $N = 6$, se verifică imediat prin inducție că $3^n > 100n$ pentru $n \geq 6$. Partea secundă a exercițiului este o consecință directă a primei părți.

3. *Să se calculeze primii 4 termeni, diferența $a_{n+1} - a_n$ și câtul $\dfrac{a_n}{a_{n+2}}$ pentru fiecare din șirurile următoare:*

1°. $a_n = \dfrac{n^2+1}{n}$, $n \geq 1$;

2°. $a_n = 2^n$, $n \geq 0$.

Soluție. 1°. $a_1 = \dfrac{1^2+1}{1} = 2$, $a_2 = \dfrac{2^2+1}{2} = \dfrac{5}{2}$, $a_3 = \dfrac{10}{3}$, $a_4 = \dfrac{17}{4}$;

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(n+1)^2+1}{n+1} - \frac{n^2+1}{n} = \frac{n^2+n-1}{x^2+n} \text{ și}$$

$$\frac{a_n}{a_{n+2}} = \frac{\dfrac{n^2+1}{n}}{\dfrac{(n+2)^2+1}{n+2}} = \frac{(n^2+1)(n+2)}{n(n^2+4n+5)};$$

2°. $a_0 = 2^0 = 1$; $a_1 = 2^1 = 2$; $a_2 = 4$; $a_3 = 8$; $a_{n+1} - a_n = 2^{n+1} - 2^n = 2^n$ și $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{4}$.

4. *Să se arate că submulțimile următoare ale dreptei reale sunt mărginite și să se indice marginile lor inferioară și superioară:*

$M_1 = [1, 2)$, $M_2 = [1, 2] \cup \{5\}$, $M_3 = [1, 2] \cup \{-2, 5)$, $M_4 = [1, 2] \cup (4, 7)$,

$M_5 = \{3x + 2 \mid x \in [-1, 1]\}$, $M_6 = \{x^2 \mid x \in [0, 2]\}$, $M_7 = \{x^2 \mid x \in (-2, 2)\}$,

$M_8 = \{7 \sin 2x \mid x \in \mathbf{R}\}$, $M_9 = \left\{5 + \sin 2x \mid x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)\right\}$.

Soluție. Faptul că aceste mulțimi sunt mărginite este evident; de exemplu, toate sunt conținute în intervalul $[-10, 10]$. Avem $\sup M_1 = 2$ (pentru că majoranții lui M_1 sunt toate numerele $\geqslant 2$, iar 2 este cel mai mic); similar, $\sup M_2 = 5$, $\sup M_3 = 5$, $\sup M_4 = 7$, considerând cel mai mic dintre majoranții mulțimilor respective. Apoi $M_5 = [-1, 5]$, $M_6 = [0, 4]$, $M_7 = [0, 4)$, $M_8 = [-7, 7]$, deci $\sup M_5 = 5$, $\sup M_6 = 4$, $\sup M_7 = 4$, $\sup M_8 = 7$.

Folosind faptul că marginea inferioară a unei mulțimi mărginite inferior este cel mai mare dintre minoranții acelei mulțimi, rezultă $\inf M_1 = 1$, $\inf M_2 = 1$, $\inf M_3 = -2$, $\inf M_4 = 1$, $\inf M_5 = -1$, $\inf M_6 = 0$, $\inf M_7 = 0$, $\inf M_8 = -7$. Studiem în detaliu cazul mulțimii M_9. Dacă $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, rezultă $2x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\sin 2x \in (0, 1)$, deci M_9 coincide cu intervalul $(5, 6)$. Majoranții mulțimii M_9 sunt toate numerele $\geqslant 6$ și cel mai mic dintre ei va fi $\sup M_9 = 6$; similar, minoranții mulțimii M_9 sunt numerele $\leqslant 5$ și, ca atare, cel mai mare minorant va fi $\inf M_9 = 5$.

5. *Să se reprezinte grafic funcțiile $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.*

a) $f(x) = x \operatorname{sgn} x$; b) $f(x) = (2x + 1) \cdot \sigma(x)$; c) $f(x) = 3\sigma(x + 2)$;

d) $f(x) = \sigma(x) \cdot |\sin x|$; e) $f(x) = \max(4, x^2)$; f) $f(x) = 1 - ||x| - 1|$.

Care din aceste funcții sunt mărginite? Dar monotone? Dar pare?

Soluție. a) Așadar $f(x) = \begin{cases} x, \text{ dacă } x > 0 \\ 0, \text{ dacă } x = 0, \\ -x, \text{ dacă } x < 0 \end{cases}$ adică $f(x) = |x|$;

b) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x < 0 \\ 2x + 1, & \text{dacă } x \geqslant 0 \end{cases}$, c) $f(x) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } x < -2 \\ 3, \text{ dacă } x \geqslant -2 \end{cases}$;

d) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x < 0 \\ |\sin x|, & \text{dacă } x \geqslant 0 \end{cases}$; e) $f(x) = \begin{cases} 4, \text{ dacă } x \in (-2, 2) \\ x^2, \text{ dacă } x \notin (-2, 2) \end{cases}$;

f) $f(x) = \begin{cases} x + 2, \text{ dacă } x < -1 \\ -x, \text{ dacă } -1 < x \leqslant 0 \\ x, \text{ dacă } 0 < x \leqslant 1 \\ 2 - x, \text{ dacă } x > 1 \end{cases}$

Graficele respective sunt indicate în figura I.21.

Funcțiile de la punctele c, d sunt mărginite; funcțiile b, c sunt monoton crescătoare; funcțiile a, e, f sunt pare.

6. *Să se arate că șirurile $a_n = \frac{2^n}{n!}$, $b_n = \frac{3^n + 2^n}{5^n}$ $(n \geqslant 1)$ sunt mărginite și monotone.*

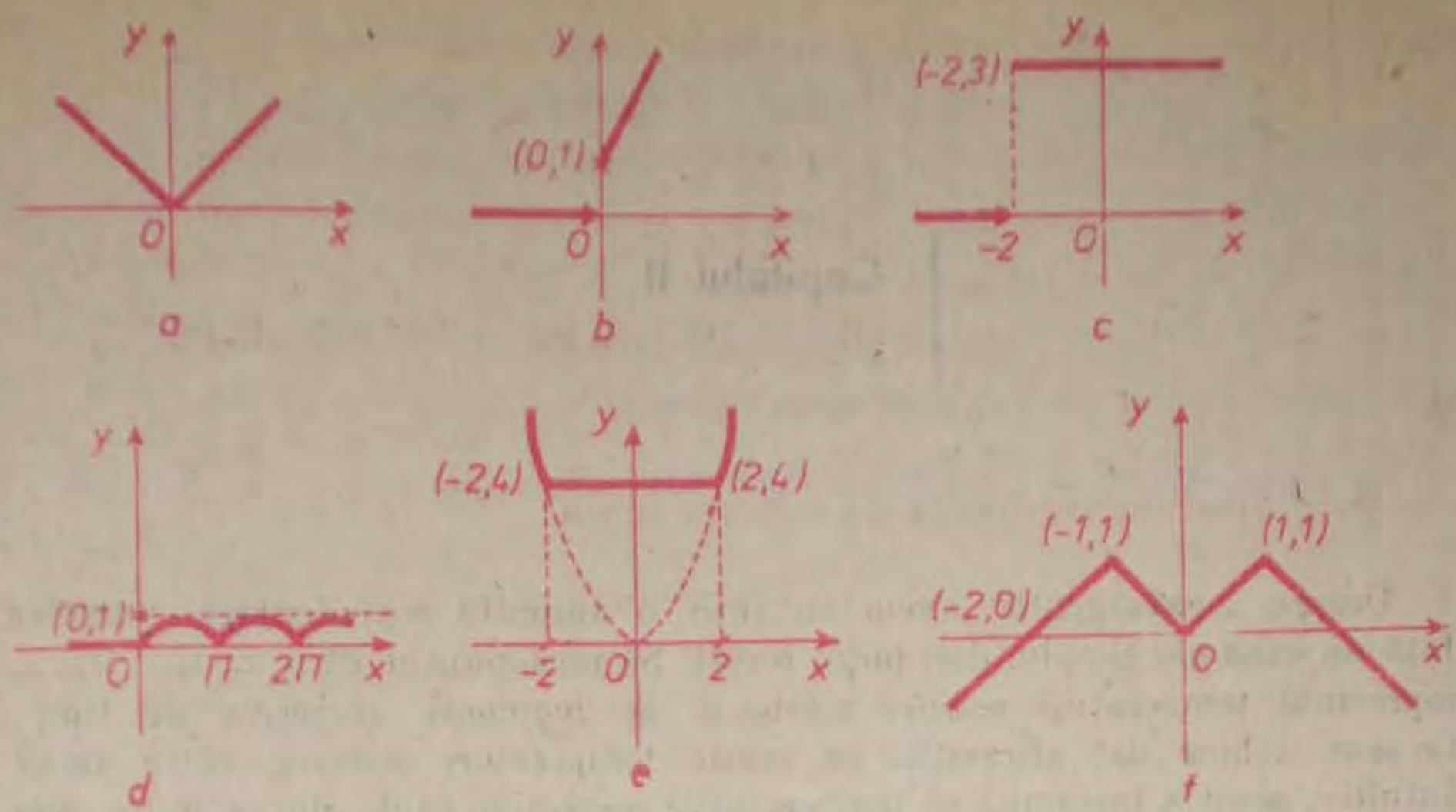


Fig. I.21

Soluție. $a_{n+1} - a_n = \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!} - \dfrac{2^n}{n!} = \dfrac{2^n \cdot 2}{n!(n+1)} - \dfrac{2^n}{n!} = \dfrac{2^n}{n!}\left(\dfrac{2}{n+1} - 1\right) =$

$= \dfrac{-2^n(n-1)}{(n+1)!} \leqslant 0$, deci $a_{n+1} \leqslant a_n$ și șirul este monoton descrescător. Apoi $0 \leqslant a_n =$

$= \dfrac{\overbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}^{n \text{ ori}}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n} = \dfrac{2 \cdot 2}{1 \cdot 2}\left(\dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2}{4} \cdot \ldots \cdot \dfrac{2}{n}\right) \leqslant 2$, adică $a_n \in [0, 2]$ pentru orice $n \geqslant 1$.

Pe de altă parte, $b_n = \left(\dfrac{3}{5}\right)^n + \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$, deci $b_{n+1} < b_n$ și este evident că $0 \leqslant b_n \leqslant 2$, pentru orice $n \geqslant 1$. Ca atare, șirul $(b_n)_{n \geqslant 1}$ este de asemenea mărginit și monoton descrescător.

7. *Să se determine marginile funcțiilor $f : D \to \mathbf{R}$ pe mulțimile D indicate:*

a) $f(x) = 3x + 2$, $D = [-1, 1]$;

b) $f(x) = -(x-1)^2$, $D = [0, 3]$;

c) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4} - x$, $D = [0, 4]$;

d) $f(x) = a \sin x + b \cos x$ (a, b constante), $D = [0, 2\pi]$.

Soluție. a) Dacă $x \in [-1, 1]$, atunci $3x \in [-3, 3]$ și $f(x) \in [-1, 5]$; avem $\inf\limits_{x \in D} f(x) = -1$, $\sup\limits_{x \in D} f(x) = 5$.

b) $\inf\limits_{x \in D} f(x) = -4$, $\sup\limits_{x \in D} f(x) = 0$; c) Funcția f este monoton descrescătoare pe D și $\sup\limits_{x \in D} f(x) = f(0) = 2$, $\inf\limits_{x \in D} f(x) = f(4) = 2\sqrt{5} - 4$; d) Dacă $a = 0$, atunci $f(x) = b \cos x$ și $\inf\limits_{x \in D} f(x) = -|b|$, $\sup\limits_{x \in D} f(x) = |b|$. Dacă $a \neq 0$, atunci $f(x) = a\left(\sin x + \dfrac{b}{a} \cos x\right)$.

Alegem $\varphi \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $\dfrac{b}{a} = \operatorname{tg} \varphi$ și rezultă $f(x) = a(\sin x + \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos x) =$

$= \dfrac{a}{\cos \varphi} \sin(x + \varphi)$. Deoarece $\cos \varphi = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \dfrac{|a|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, rezultă $f(x) =$

$= \dfrac{a}{|a|}\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin(x + \varphi)$. Ca atare, $\inf\limits_{x \in D} f(x) = -\sqrt{a^2 + b^2}$, $\sup\limits_{x \in D} f(x) = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Reținem totodată că $|a \sin x + b \cos x| \leqslant \sqrt{a^2 + b^2}$, $\forall\, x \in [0, 2\pi]$.

Capitolul II
LIMITE DE ŞIRURI. LIMITE DE FUNCŢII

§ 1. Şiruri convergente de numere reale

Despre „convergenţă" avem cu toţii o anumită reprezentare intuitivă. Iată un exemplu simplu, deşi puţin forţat. Să presupunem că $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n, \ldots$ reprezintă temperaturi *pozitive* măsurate la momente succesive de timp. Ce sens trebuie dat afirmaţiei că aceste temperaturi converg către zero? Intuitiv, aceasta înseamnă că temperaturile respective sunt „din ce în ce mai mici", adică pentru orice prag de temperatură $\varepsilon > 0$, avem $t_n < \varepsilon$ de la un rang N încolo, adică pentru orice $n \geqslant N$ (N depinzând de ε) (fig. II.1). Dacă t_n, $n \geqslant 0$ *nu* sunt neapărat pozitive, faptul că ele converg către zero se exprimă prin aceea că $\forall\, x > 0$, avem $-\varepsilon < t_n < \varepsilon$, adică $|t_n| < \varepsilon$, de la un rang încolo. Dăm un alt exemplu. Să considerăm o cantitate de substanţă radioactivă A, care se înjumătăţeşte la fiecare 12 ore. Măsurând-o la fiecare 12 ore, cantităţile vor fi succesiv A, $\frac{A}{2}$, $\frac{A}{4}$ ..., $\frac{A}{2^n}$, ... (omitem structura atomică şi presupunem materia indefinit divizibilă). Intuitiv, aceste cantităţi converg către zero (fig. II.2); de altfel, pentru orice prag $\varepsilon > 0$ avem $\frac{A}{2^n} < \varepsilon$ de la un rang încolo anume, alegem N astfel încât $2^N > \frac{A}{\varepsilon}$ şi atunci pentru orice $n \geqslant N$ avem $\frac{A}{2^n} \leqslant \frac{A}{2^N} < \varepsilon$. Aşadar, în orice vecinătate a originii se află toţi termenii şirului $\frac{A}{2^n}$, începând de la un rang încolo.

Astfel de exemple sunt numeroase şi au impus următoarea definiţie a cărei înţelegere este esenţială.

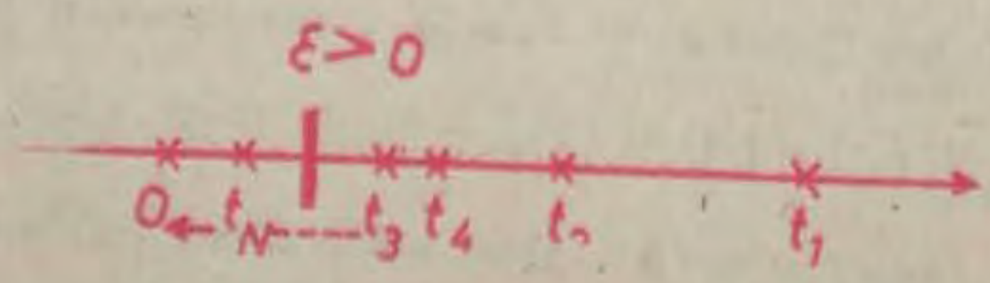


Fig. II.1

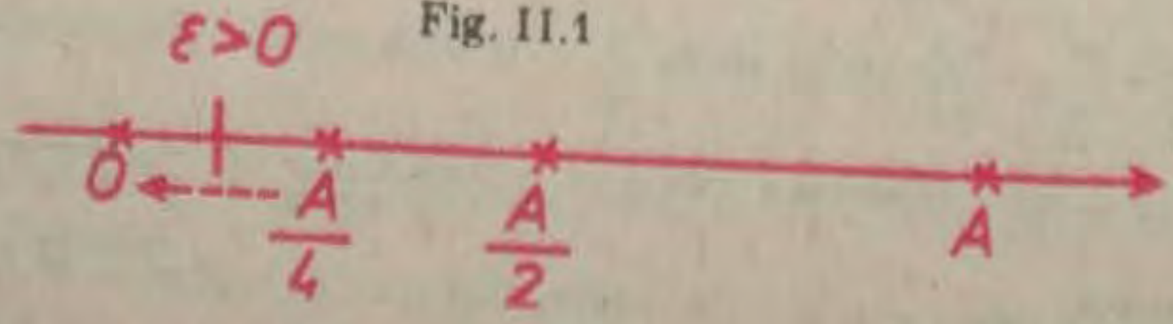


Fig. II.2

1.1. Şiruri având limită, şiruri convergente

DEFINIŢIA II. 1. Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale şi $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Se spune că şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ **are limita** a dacă în orice vecinătate a punctului a se află toţi termenii şirului începând de la un anumit rang. Se scrie atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ sau $a_n \to a$ pentru $n \to \infty$.

De exemplu, faptul că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ revine la aceea că, pentru orice vecinătate V a originii, există un rang N astfel încât $a_n \in V$, pentru orice $n \geq N$.

DEFINIŢIA II. 2. Orice şir de numere reale având o limită finită se numeşte **convergent**. Dacă $a \in \mathbb{R}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, atunci se mai spune că şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ este **convergent către** a. Şirurile care nu au limită şi cele care au limita $+\infty$ (sau $-\infty$) se numesc **divergente**.

Exemple

1) Fie $a_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$. Arătăm că $(a_n)_{n\geq 1}$ este un şir convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Într-adevăr, fie V o vecinătate oarecare a punctului $a = 0$. Atunci există $\varepsilon > 0$, astfel încât $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset V$ şi se observă că dacă $n > \frac{1}{\varepsilon}$, atunci $\frac{1}{n} \in (0, \varepsilon) \subset V$, adică toţi termenii şirului $a_n = \frac{1}{n}$ se află în V, începând cu rangul $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ (căci dacă $n \geq N$, atunci $n > \frac{1}{\varepsilon}$).

2) Arătăm că $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = +\infty$. Într-adevăr, fie V o vecinătate oarecare a lui $+\infty$, deci există $\varepsilon > 0$, astfel încât $(\varepsilon, \infty) \subset V$. Punând condiţia $n^2 > \varepsilon$, rezultă că $n^2 \in V$. Cu alte cuvinte, luând $N = [\sqrt{\varepsilon}] + 1$, rezultă că $\forall\, n \geq N$, avem $n > \sqrt{\varepsilon}$, deci $n^2 > \varepsilon$, adică $n^2 \in V$, deci toţi termenii şirului $a_n = n^2$ aparţin lui V de la un rang încolo şi, ca atare, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

3) Arătăm că, în general, **dacă $(a_n)_{n\geq k}$ este un şir monoton crescător şi nemărginit, atunci** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$. Într-adevăr, fie V o vecinătate oarecare a originii. Alegem $\varepsilon > 0$, astfel încât $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset V$. Deoarece şirul (a_n) este nemărginit, există N natural, astfel încât $a_N > \frac{1}{\varepsilon}$. Şirul fiind monoton crescător, avem $a_n \geq a_N$ pentru orice $n \geq N$. Aşadar, $0 < \frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{a_N} < \varepsilon$, deci $\frac{1}{a_n} \in (0, \varepsilon) \subset V$, pentru orice $n \geq N$. În concluzie, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

În particular, deoarece şirurile $(n^\alpha)_{n\geq 1}$, $\alpha > 0$; $(10^n)_{n\geq 0}$; $(\sqrt{2n+1} - \sqrt{n})_{n\geq 1}$; $(n!)_{n\geq 0}$ sunt monoton crescătoare şi nemărginite, rezultă relaţiile:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0,\ \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha}{10^n} = 0,\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1} - \sqrt{n}} = 0 \text{ şi } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0. \tag{1}$$

TEOREMA II. 1. *(unicitatea limitei).* **Dacă un şir de numere reale are limită, atunci aceasta este unică.**

Demonstraţie. Presupunem că $a_n \to a$ şi $a_n \to b$ (pentru $n \to \infty$) şi avem de arătat că $a = b$. Dacă, prin reducere la absurd, avem $a \neq b$, atunci alegem vecinătăţi V_1 şi V_2 ale punctelor a şi respectiv b, care să fie disjuncte (fig. II.3). Deoarece $a_n \to a$, atunci în V_1 se vor afla toţi termenii şirurile de la un rang N încolo; în particular, în afara lui V_1, deci în V_2 se vor afla doar un număr finit (cel mult $N + 1$) de termeni ai şirului $(a_n)_{n \geq 0}$, deci b nu poate fi limita şirului $(a_n)_{n \geq 0}$.

TEOREMA II. 2. *(de caracterizare a limitelor de şiruri).* **Fie $(a_n)_{n \geq 0}$ un şir de numere reale.**

1°. Şirul $(a_n)_{n \geq 0}$ este convergent către un număr $a \in \mathbf{R}$ dacă şi numai dacă este îndeplinită condiţia următoare:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pentru orice } \varepsilon > 0 \text{ există un număr natural } N = N(\varepsilon), \text{ depinzând} \\ \text{de } \varepsilon, \text{ astfel încât } |a_n - a| < \varepsilon \text{ pentru orice } n \geq N \end{array} \right.$$

(cu ajutorul cuantificatorilor logici, această condiţie se scrie astfel:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon); \forall n \geq N, |a_n - a| < \varepsilon).$$

2°. Şirul $(a_n)_{n \geq 0}$ are limita $+\infty$ dacă şi numai dacă:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pentru orice } \varepsilon > 0 \text{ există un număr natural } N = N(\varepsilon), \text{ astfel} \\ \text{încât } a_n > \varepsilon \text{ pentru orice } n \geq N. \end{array} \right.$$

3°. Şirul $(a_n)_{n \geq 0}$ are limita $-\infty$ dacă şi numai dacă

$$(3') \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pentru orice } \varepsilon > 0 \text{ există un număr natural } N = N(\varepsilon), \text{ astfel încât} \\ a_n < -\varepsilon \text{ pentru orice } n > N. \end{array} \right.$$

Demonstraţie. 1°. Presupunem că a este un număr real şi că $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$. Atunci, conform definiţiei II.1, pentru orice $\varepsilon > 0$, în intervalul $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ se află toţi termenii şirului $(a_n)_{n \geq 0}$ de la un rang încolo, adică există N natural depinzând de ε, astfel ca pentru $n \geq N$ să avem $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, sau echivalent, $|a_n - a| < \varepsilon$. Aşadar, este îndeplinită condiţia (2). Reciproc, dacă condiţia (2) este îndeplinită, arătăm că $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$. Pentru aceasta, aplicăm definiţia II.1 şi fie V o vecinătate oarecare a punctului a, deci există $\varepsilon > 0$ astfel încât $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset V$. Conform (2), există $N = N(\varepsilon)$ natural

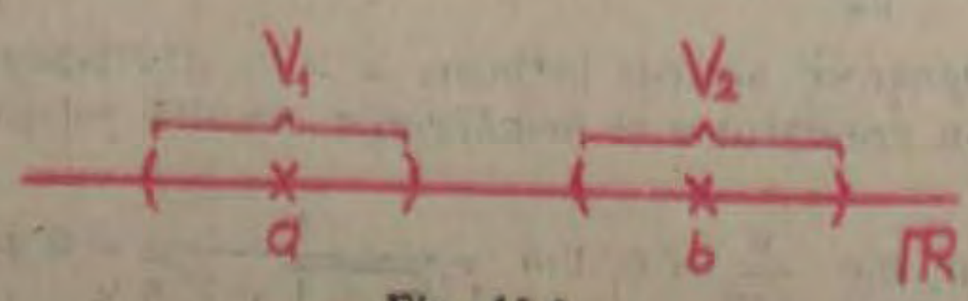


Fig. II.3

astfel încât $|a_n - a| < \varepsilon$ pentru orice $n \geqslant N$. Aceasta înseamnă că $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, adică $a_n \in V$ pentru orice $n \geqslant N$. Deci toţi termenii şirului aparţin lui V de la un rang încolo, adică $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

2°. Presupunem că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$. Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$, în intervalul $(\varepsilon, \infty]$ care este o vecinătate a punctului $+\infty$, se vor afla toţi termenii şirului $(a_n)_{n\geqslant 0}$ de la un rang $N = N(\varepsilon)$ încolo, adică $a_n > \varepsilon$ pentru orice $n \geqslant N$. Reciproc, dacă este îndeplinită condiţia (3), atunci pentru orice vecinătate V a lui ∞ alegem $\varepsilon > 0$, astfel încât $(\varepsilon, \infty] \subset V$. Conform ipotezei, există $N = N(\varepsilon)$ natural, astfel încât pentru orice $n \geqslant N$ să avem $a_n > \varepsilon$, adică $a_n \in V$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Punctul 3° se demonstrează similar, folosind faptul că vecinătăţile lui $-\infty$ sunt intervale de forma $[-\infty, -\varepsilon)$ etc. De altfel, $a_n \to -\infty \Leftrightarrow -a_n \to \infty$.

Observaţie. Dacă a este un număr real, faptul că un şir $(a_n)_{n\geqslant 0}$ este convergent către a revine la aceea că şirul de numere reale pozitive $(|a_n - a|)_{n\geqslant 0}$ are limita zero, adică şirul distanţelor $(d(a_n, a))_{n\geqslant 0}$ are limita zero, ceea ce exprimă faptul că termenii a_n devin „din ce în ce mai apropiaţi de a, pe măsură ce n creşte". Reţinem totodată că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} d(a_n, a) = 0$.

Faptul că $a_n \to a$ (pentru $n \to \infty$) se mai interpretează spunând că termenii $a_0, a_1, a_2, \ldots$ constituie aproximaţii succesive ale numărului real a; în acest caz, se poate considera formula aproximativă $a_n \simeq a$, cu eroarea absolută $|a - a_n|$ convergentă către zero.

Exemple

1) Arătăm că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{n+1} = 2$, folosind condiţia (2) din teorema II.2. Notând $a_n = \dfrac{2n+1}{n+1}$, avem $|a_n - 2| = \left|\dfrac{2n+1}{n+1} - 2\right| = \dfrac{1}{n+1}$. Pentru orice $\varepsilon > 0$, condiţia $\dfrac{1}{n+1} < \varepsilon$, adică $n + 1 > \dfrac{1}{\varepsilon}$ sau $n > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$, are loc pentru orice $n \geqslant N$ unde $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon} - 1\right] + 1$.

2) Arătăm că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{10^n}{10^n + 1} = 1$; notând $c_n = \dfrac{10^n}{10^n + 1}$, avem $|c_n - 1| = \dfrac{1}{10^n + 1}$. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{10^n + 1} = 0$, avem $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 1$.

3) Orice şir constant $(a_n)_{n\geqslant 0}$, $a_n = a$ pentru orice $n \geqslant 0$ este convergent către a. Aceasta se verifică direct din definiţia II.1.

4) Şirurile convergente nu sunt neapărat monotone; astfel, şirul $a_n = (-1)^n = \dfrac{1}{n}$, $n \geqslant 1$ este convergent către zero deoarece $|a_n - 0| = \dfrac{1}{n}$, $\forall\, n \geqslant 1$ şi nu este monoton.

h) Avem $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)=\infty$; într-adevăr, să aplicăm definiția II.1. Orice vecinătate V a punctului ∞ conține un interval de forma $(a, \infty]$. Alegem N natural astfel încât $N+1>a$. Atunci pentru orice $n \geqslant N$ avem $n+1 \geqslant N+1>a$, adică $n+1 \in V$.

În mod similar, se arată că $\lim\limits_{n\to\infty}(2n-1)=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}(-n)=-\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}(-2n+1)=-\infty$.

1.2. Convergență și mărginire

Demonstrăm acum câteva rezultate importante care arată legătura dintre noțiunile de convergență și mărginire a șirurilor. Mai întâi dăm noțiunea de subșir.

DEFINIȚIA II. 3. *Fie $s=(a_n)_{n\geqslant 1}$ un șir de numere reale. Dacă $k_0<k_1<k_2<\ldots k_n<\ldots$ este un șir strict crescător de numere reale* (deci $k_n \geqslant n$ pentru orice $n \geqslant 0$), *atunci sirul $(a_{k_n})_{n\geqslant 0}$ se numeste* **subșir** *al lui s.*

Exemplu

Luând $k_n=2n$ se obține subșirul $(a_{2n})_{n\geqslant 0}$ al lui s al termenilor de rang par și pentru $k_n=2n+1$, subșirul $(a_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ al termenilor de rang impar.

Dacă șirul $(a_n)_{n\geqslant 0}$ are limita l (în $\overline{\mathbf{R}}$), *atunci orice subșir $(a_{k_n})_{n\geqslant 0}$ al său are, de asemenea, limita l*; într-adevăr, în orice vecinătate V a lui l se află toți termenii a_n de la un rang N încolo (pentru $n \geqslant N$), deci în V se află și toți termenii a_{k_n} cu $n \geqslant N$, deoarece $k_n \geqslant n \geqslant N$.

Din acest fapt se deduce direct că *dacă un șir are un subșir divergent sau are două subșiruri convergente către limite distincte, atunci acel șir este divergent.* De exemplu, pentru șirul $a_n=-(1)^n$, $n \geqslant 1$, subșirul $(a_{2n})_{n\geqslant 1}$ converge către 1, iar subșirul $(a_{2n+1})_{n\geqslant 1}$ converge către -1, deci șirul $(a_n)_{n\geqslant 1}$ este divergent.

Teorema următoare arată că mărginirea unui șir este o condiție necesară de convergență.

TEOREMA II.3. Orice șir convergent de numere reale este mărginit.

Demonstrație. Fie $a \in \mathbf{R}$ și un șir $(a_n)_{n\geqslant 0}$ convergent către a. Considerăm vecinătatea $V=(a-1, a+1)$ a punctului a. Toți termenii șirului $(a_n)_{n\geqslant 0}$, începând de la un rang N, sunt situați în V, deci *toți* termenii șirului, inclusiv $a_0, a_1, \ldots, a_{N-1}$ vor fi situați într-un interval mărginit I, care conține V (figura II.4). Putem lua $I=[c, d]$, unde $c=\min(a-1, a_0, a_1, \ldots, a_{N-1})$ și $d=\max(a+1, a_0, a_1, \ldots, a_{N-1})$.

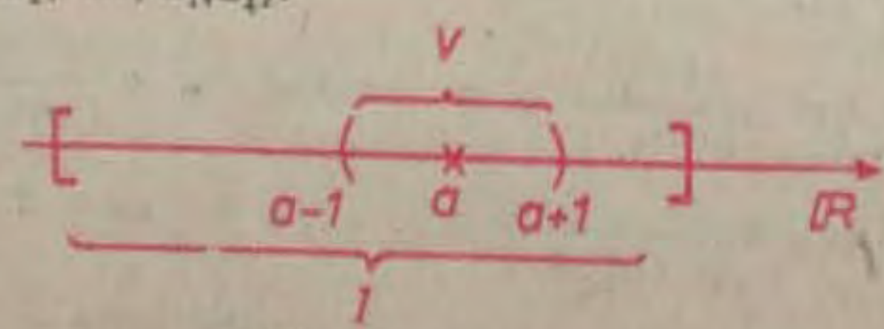


Fig. II.4

Remarcăm că dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$, atunci șirul $(a_n)_{n\geqslant 0}$ este în mod necesar nemărginit. Reciproca este în general falsă; de exemplu, șirul $a_n=(-2)^n$, $n \geqslant 0$ este nemărginit, dar nu are limită în $\overline{\mathbf{R}}$, deoarece $a_{2n}\to\infty$ și $a_{2n+1}\to-\infty$.

Observaţie. Am văzut că orice şir convergent în $\mathbf{R}$ este mărginit. Reciproca este în general falsă; de exemplu, şirul $a_n = (-1)^n$, $n \geq 1$ este mărginit, dar am văzut că nu este convergent. Vom demonstra totuşi că şirurile *monotone* şi mărginite de numere reale sunt convergente (teorema lui Weierstrass). De asemenea, vom arăta că orice şir mărginit are cel puţin un subşir convergent (lema lui Cesaró).

1.3. Criterii suficiente de convergenţă a şirurilor

Dăm mai întâi un criteriu care asigură convergenţa unui şir prin utilizarea unor şiruri-tip care converg către zero sau către $+\infty$, $-\infty$.

TEOREMA II.4. Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale.

1°. Presupunem că l este un număr real şi că există un şir $(b_n)_{n\geq 0}$ de numere reale pozitive convergent către zero astfel încât $|a_n - l| \leq b_n$ pentru orice $n \geq k$ (k fiind un rang fixat).

Atunci şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$.

2°. Dacă $(u_n)_{n\geq 0}$ este un şir astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \infty$ şi dacă $a_n \geq u_n$ pentru orice $n \geq k$ (k fixat), atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

3°. Dacă $(v_n)_{n\geq 0}$ este un şir astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = -\infty$ şi $a_n \leq v_n$ pentru orice $n \geq k$ (k fixat), atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Demonstraţie. 1°. Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar fixat. Deoarece $b_n \to 0$, există un rang N depinzând de ε astfel încât $b_n < \varepsilon$ pentru orice $n \geq N$. Dacă $n \geq \max(N, k)$, atunci $|a_n - l| \leq b_n < \varepsilon$ şi astfel este îndeplinită condiţia (2); ca atare, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$.

2°. Verificăm condiţia (3). Deoarece $u_n \to \infty$ pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N = N(\varepsilon)$ astfel încât $u_n > \varepsilon$ pentru orice $n \geq N$. Aşadar, $a_n > \varepsilon$ pentru orice $n \geq \operatorname{man}(N, k)$, deci $a_n \to \infty$.

3°. Se procedează similar verificând condiţia (3').

Luând cazul particular $b_n = \frac{1}{n}$, rezultă direct

COROLARUL 1. Dacă $|a_n - l| < \frac{1}{n}$, $\forall n \geq 1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$.

În cazul particular când $l = 0$ şi toate numerele a_n sunt pozitive, se obţine

COROLARUL 2. Dacă $0 \leq a_n \leq o_n$ pentru orice $n \geq k$ (k fiind un rang fixat) şi dacă $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Exemple

1) Pentru orice număr real x şirul $(x^{(n)})_{n\geq 0}$ al trunchierilor sale succesive este convergent şi are limita x. Într-adevăr, ştim că $|x^{(n)} - x| < \frac{1}{10^n}$ pentru orice $n \geq 0$ şi aplicăm teorema II.4, observând că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{10^n} = 0$.

2) Fie $a_n = \frac{\sin^2 n}{n}$, $n \geq 1$. Avem $|a_n - 0| \leq \frac{1}{n}$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. În mod similar, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n} = 0$.

3) Notăm $a_n = \sqrt[n]{n} - 1$, $n \geq 1$. Evident, $a_n \geq 0$ și $1 + a_n = \sqrt[n]{n}$, deci $n = (1+a_n)^n$ și, ca atare, $n = 1 + C_n^1 a_n + C_n^2 a_n^2 + \ldots + a_n^n$, deci $n \geq C_n^2 a_n^2$. Atunci $n \geq \frac{n(n-1)}{2} \cdot a_n^2$ și cum $a_n \geq 0$, se deduce inegalitatea $a_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$ pentru orice $n \geq 2$. Aplicând corolarul 2 pentru șirul $b_n = \sqrt{\frac{2}{n-1}}$, $n \geq 2$ care converge către zero, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, adică $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

4) Orice număr real x este limita unui șir de numere raționale (respectiv iraționale). Într-adevăr, pentru orice întreg $n \geq 1$, în intervalul $\left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right)$ alegem un număr rațional r_n (respectiv un număr irațional z_n). Atunci $|r_n - x| < \frac{1}{n}$, $|z_n - x| < \frac{1}{n}$ și, conform corolarului 1, rezultă $r_n \to x$, $z_n \to x$.

5) Fie $C \subset \mathbf{R}$ o submulțime, infinită, majorată și $\mu = \sup C$. Arătăm că *există un șir de puncte din C convergent către μ*. Într-adevăr, pentru orice întreg $n \geq 1$, în intervalul $\left(\mu - \frac{1}{n}, \mu\right)$ există cel puțin un punct $x_n \in C$. Așadar, $\mu - \frac{1}{n} < x_n \leq \mu$, deci $|x_n - \mu| < \frac{1}{n}$, deci $x_n \to \mu$. În mod similar, pentru orice mulțime infinită minorată $D \subset \mathbf{R}$ există șiruri de puncte din D care converg către $\inf D$.

6) Dacă $a_n \to a$, $a \in \mathbf{R}$, atunci $|a_n| \to |a|$; într-adevăr, conform teoremei I.1, M_5 avem $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|$ pentru orice $n \geq 0$ și aplicăm teorema II.4.1°.

Un alt criteriu suficient de convergență, extrem de util, este cuprins în următoarea teoremă atribuită lui K. Weierstrass.

TEOREMA II.5. **a) Orice șir monoton crescător și mărginit superior de numere reale (în R) este convergent.**

b) Orice șir monoton descrescător și mărginit inferior în R este convergent.

Demonstrație a) Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ un șir monoton crescător și mărginit superior. Conform proprietății lui Cantor, există numărul real $c = \sup\limits_n a_n$. Pentru

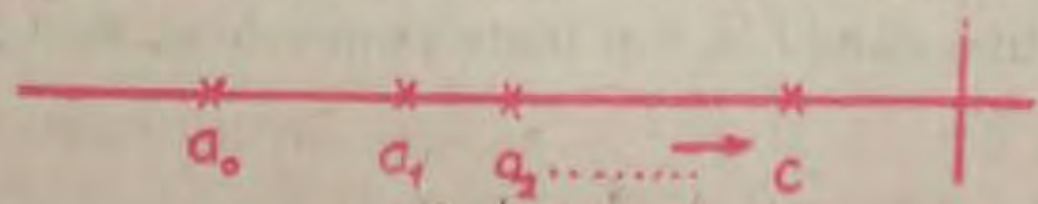


Fig. II.5

orice $\varepsilon > 0$ finat, există un termen a_N al șirului astfel încât $a_N > c - \varepsilon$. Deoarece șirul este monoton crescător, pentru orice $n \geq N$ avem $a_n \geq a_N$, deci $c - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq c < c + \varepsilon$, de unde $-\varepsilon < a_n - c < \varepsilon$, adică $|a_n - c| < \varepsilon$ pentru orice $n \geq N$. Se verifică astfel condiția (2) și, ca atare, $a_n \to c$.

b) Se demonstrează similar, arătând că $(a_n)_{n\geq 0}$ converge către $d = \inf\limits_n a_n$.

Reţinem că un şir mărginit şi monoton crescător (respectiv descrescător) converge către marginea lui superioară (respectiv inferioară). Teorema II.5 se mai enunţă pe scurt astfel: *orice şir monoton şi mărginit de numere reale este convergent.*

Exemple

1) Şirul $a_n = \frac{2n-1}{n}$, $n \geq 1$ este mărginit deoarece $0 \leq a_n \leq 2$, $\forall n \geq 1$ şi monoton crescător, deci el este şir convergent. Se verifică imediat că $a_n \to 2$.

2) Şirul $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$, $n \geq 1$ este crescător $\left[\text{deoarece } a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0, \text{ deci } a_{n+1} > a_n\right]$ şi mărginit superior $\left[\text{căci } \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \text{ pentru orice } k \geq 2, \text{ deci } a_n \leq 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} \leq 2\right]$. Aşadar, el este convergent. Este dificil de calculat $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ cu metodele anterioare.

LEMĂ (*E. Cesaró*, 1859—1906). **Orice şir mărginit de numere reale are cel puţin un subşir convergent.**

Demonstraţie. Fie $s = (a_n)_{n\geq 0}$ un şir mărginit şi notăm cu A mulţimea termenilor săi. Deoarece A este mulţime mărginită, ea este conţinută într-un interval închis $I_0 = [a, b]$. Considerăm intervalele $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$, $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$. În cel puţin unul din ele, notat I_1, există o infinitate de termeni ai şirului s. Evident, $l(I_1) = \frac{b-a}{2}$ şi fie $a_{i_1} \in I_1$ un termen al lui s. Împărţim I_1 în două subintervale închise de lungime egală $\left(\text{anume } \frac{b-a}{2^2}\right)$ şi cel puţin unul, notat I_2, conţine o infinitate de termeni din s şi, ca atare, putem alege $a_{i_2} \in I_2$ cu $i_1 < i_2$. Repetând procedeul, la pasul k alegem $a_{i_k} \in I_k$, astfel încât $i_{k-1} < i_k$. Notăm $I_k = [\alpha_k, \beta_k]$, $k \geq 0$. Atunci $a = \alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \ldots \leq \beta_1 \leq \beta_0 = b$ şi $\beta_k - \alpha_k = \frac{b-a}{2^k}$. Aşadar, şirurile $(\alpha_n)_{n\geq 0}$, $(\beta)_{n\geq 0}$ sunt monotone şi mărginite, deci convergente, având aceeaşi limită c. Deoarece $\alpha_n \leq c \leq \beta_n$ şi $\alpha_n \leq a_{i_n} \leq \beta_n$, rezultă $|a_{i_n} - c| \leq \beta_n - \alpha_n = \frac{b-a}{2^n}$, $\forall n \geq 0$. Atunci, cf. teoremei II.4, 1°, avem $\lim\limits_{n\to\infty} a_{i_n} = c$. Lema lui Cesaró este demonstrată. Desigur, un şir mărginit poate să aibă mai multe subşiruri convergente.

Pentru fixarea noţiunilor anterioare este utilă o sinteză.

a) După proprietăţile de mărginire, monotonie şi convergenţă, şirurile se clasifică în:

- şiruri mărginite $\left[\text{exemple: } \left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}, \left(\frac{2^n}{2^n+1}\right)_{n\geq 0}, (\sin n)_{n\geq 0}\right]$;
- şiruri nemărginite $\left[\text{exemple: } (2^n)_{n\geq 0}, \left(\frac{3^n}{2^n}\right)_{n\geq 0}\right]$;
- şiruri monotone $\left[\text{exemple: } \left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}, (n^2)_{n\geq 0}, (-3^{-n})_{n\geq 0}\right]$;
- şiruri care nu sunt monotone [exemple: $((-2)^n)_{n\geq 0}$, $(\sin n)_{n\geq 0}$];

şiruri convergente sau echivalent, cu limita finită

$\left[\text{exemple: } \left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}, \left(\frac{1}{10^n}\right)_{n\geq 0}\right]$;

şiruri divergente.

Şirurile divergente se împart în şiruri care nu au limită $\left[\text{exemple: } (1 + (-1)^n)_{n\geq 1}, \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)_{n\geq 1}\right]$ şi şiruri având limita infinită [exemple: $(2^n)_{n\geq 0}$, $(-2^n)_{n\geq 0}$].

b) Reţinem, de asemenea, următoarele rezultate:

şir convergent $\Rightarrow$ şir mărginit (teorema II.3);

şir monoton şi mărginit $\Rightarrow$ şir convergent (teorema II.5).

EXERCIŢII (capitolul II, § 1)

1. Să se arate că şirurile următoare sunt convergente către zero:

a) $a_n = \frac{1}{n^2}$, $n \geq 1$;

b) $a_n = \frac{n}{n^2+1}$, $n \geq 0$;

c) $a_n = \frac{3}{2^n+1}$, $n \geq 0$;

d) $a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$, $n \geq 0$;

e) $a_n = \frac{1}{n^2+n+1}$, $n \geq 0$;

f) $a_n = \frac{1}{n!}$, $n \geq 0$.

2. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right) = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right) = 0$,

$$\lim_{n\to\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}\right)}_{p \text{ ori } (p\geq 1 \text{ fixat})} = 0, \text{ dar } \lim_{n\to\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}\right)}_{n \text{ ori}} = 1$$

Ce se poate spune despre $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}\right)$?

3. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n-1}{n} = 4$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{n^2} = 2$, folosind definiţia II 1

4. Care din şirurile următoare sunt convergente:

a) $1, 0, \frac{1}{2}, 1, 0, \frac{1}{2}, 1, 0, \frac{1}{2}, \ldots, 1, 0, \frac{1}{2}, \ldots$;

b) $a_n = \frac{1}{n+2}$, $n \geq 3$;

c) $a_n = 2$, $n \geq 0$;

d) $a_n = 1 + (-1)^n$, $n \geq 0$;

e) $a_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$, $n \geq 1$;

f) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \frac{1}{n+2}, \ldots$;

g) $a_n = \frac{2^n + (-2)^n}{3^n}$, $n \geq 0$;

h) $a_n = \frac{10^n+1}{10^n+2}$, $n \geq 0$?

5*. Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale şi $a \in \mathbf{R}$; să se exprime cu ajutorul cuantificatorilor logici faptul că şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ nu converge către a.

6. Să se arate că şirul $a_n = \dfrac{n^2}{n^2+4}$, $n \geq 0$ este monoton şi mărginit; care este limita lui?

7. a) Fie $a_n = \dfrac{1}{n^2} + 0{,}002$, $n \geq 1$. Calculaţi a_1, a_2, a_3, a_4, a_5; este adevărat că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$?

b) Este convergent şirul $a_n = (-1)^n + \dfrac{n+1}{n}$, $n \geq 1$?

8. Ce se poate spune despre un şir $(a_n)_{n\geq 0}$, în fiecare din cazurile următoare:

a) există $\varepsilon > 0$ real astfel încât $|a_n| < \varepsilon$ pentru orice $n \geq 0$?

b) pentru orice $\varepsilon > 0$ şi pentru orice $n \geq 0$ avem $|a_n| < \varepsilon$?

c) pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N(\varepsilon)$ natural astfel încât $|a_n| < \varepsilon$ pentru orice $n \geq N(\varepsilon)$?

9. Folosind teorema II.4 să se arate că

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos^2 n}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n - 1}{2^n + 1} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n+1}{n+1} = 4$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \sin \dfrac{n\pi}{3} = 0$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$ $\left(\text{observând că } 0 \leq \dfrac{n!}{n^n} \leq \dfrac{1}{n}, \forall\, n \geq 1\right)$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} (n^2 + 1) = \infty$.

10. Folosind teorema II.5, să se studieze convergenţa şirurilor:

$$a_n = \frac{2n+1}{n+1},\ a_n = \frac{2^n}{n!},\ a_n = 1 - 3^{-n},\ a_n = \frac{1+2+\ldots+n}{n^2},\ n \geq 1.$$

11. Să se arate că dacă $a_n \to a$ în $\mathbf{R}$, atunci

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+2} - a_n) = 0$;

b) $\lim a_{p(n)} = a$, pentru orice aplicaţie bijectivă $p : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$.

12. Să se figureze graficele şirurilor $a_n = \dfrac{3n+1}{n}$, $b_n = \dfrac{3n-2}{n}$, $c_n = \dfrac{3n + (-1)^n}{n}$, $(n \geq 1)$ şi să se demonstreze că aceste şiruri converg către 3. Care dintre ele este monoton?

13. Să se arate că pentru orice număr real a există:

1°. un şir neconstant care converge către a;

2°. şiruri $b_n \to 0$, $c_n \to 0$ astfel încât $\dfrac{b_n}{c_n} \to a$.

14. Să se arate că următoarele şiruri au limita ∞: $(\sqrt{n})_{n\geq 1}$, $(2^{n-1})_{n\geq 1}$, $\left(\dfrac{n^2+4}{n}\right)_{n\geq 1}$.

15. Să se dea un exemplu de şir având limita $-\infty$, fără a fi monoton descrescător.

16. Să se arate că orice şir nemărginit de numere reale este divergent. Folosind acest fapt, arătaţi că şirurile $a_n = 2^n$, $b_n = (-2)^n$, $n \geq 0$ sunt divergente.

§ 2. Limita unei funcții într-un punct

2.1. Punerea problemei

În studiul unor funcții reale, inclusiv al celor care modelează procese fizice, este importantă cunoașterea comportării acelor funcții în vecinătatea anumitor puncte fixate. Mai precis, dacă $f: D \to \mathbf{R}$ $(D \subset \mathbf{R})$ este o funcție reală de variabilă reală și dacă $x \in D$ este „apropiat" de o valoare α, ce se poate spune despre $f(x)$? de exemplu, dacă un șir $(x_n)_{n \geq 0}$ de puncte din D converge către α, ce se poate spune despre convergența șirului $(f(x_n))_{n \geq 0}$? La astfel de întrebări se va răspunde în continuare, căutând să precizăm sensul afirmației: dacă x se apropie de α, atunci $f(x)$ se apropie de l.

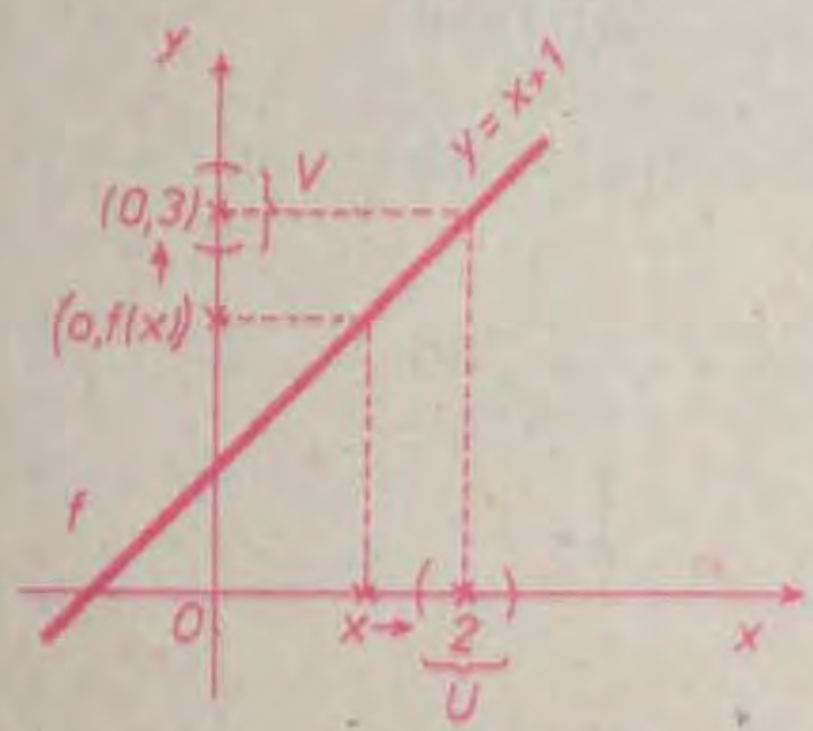


Fig. II.6

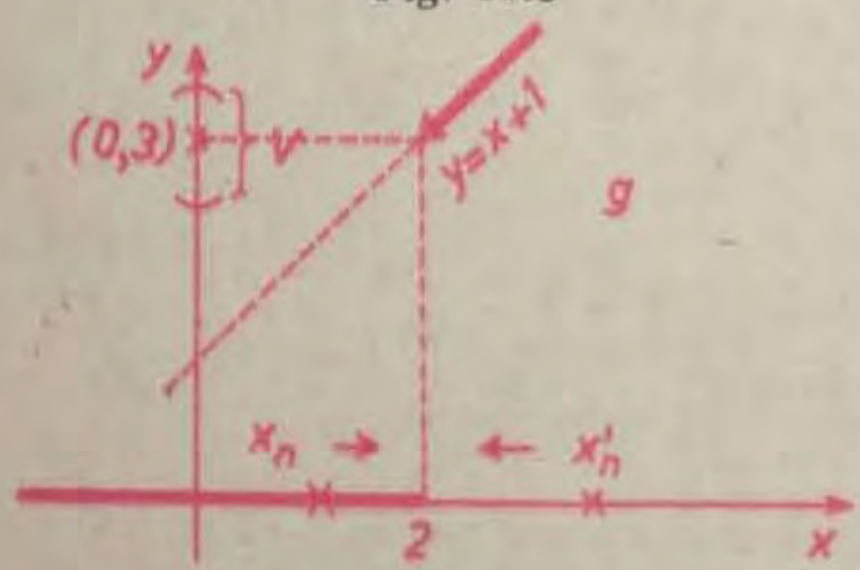


Fig. II.7

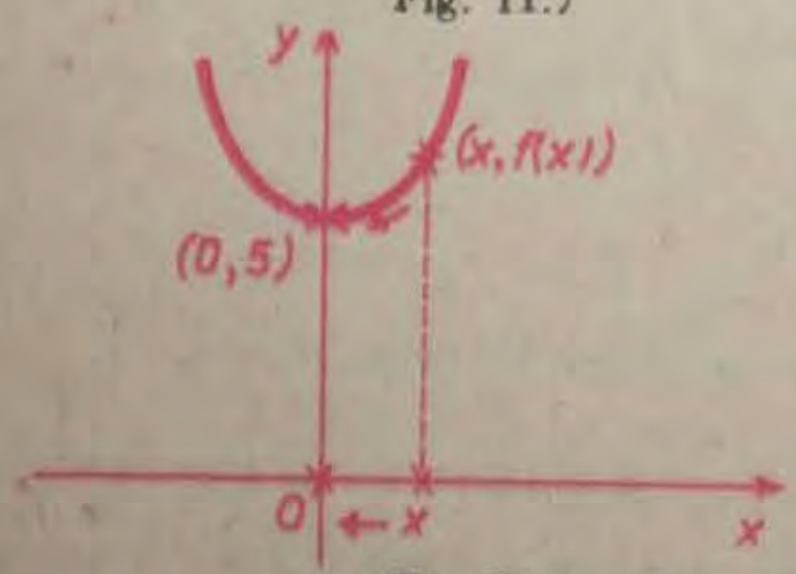


Fig. II.8

Exemple

1) Fie funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x + 1$ și punctul $\alpha = 2$. Într-un sens intuitiv, încă neprecizat, se observă că dacă x este „apropiat" de 2, atunci $f(x) = x + 1$ este „apropiat" de 3; în sens mai precis, se observă că dacă x_n este un șir convergent către $\alpha = 2$, atunci șirul $f(x_n) = x_n + 1$ este convergent către 3. De asemenea, pentru orice interval $V = (3 - \varepsilon, 3 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, centrat în $y = 3$, există o vecinătate U a punctului $\alpha = 2$ astfel încât $\forall x \in U$ să rezulte $f(x) \in V$; anume, se poate lua $U = (2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon)$ (fig. II.6).

2) Considerând funcția $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \leq 2 \\ x + 1, & \text{dacă } x > 2 \end{cases} \quad \text{(fig. II.7)}$$

și luând șirul $x_n = 2 - \frac{1}{n}$, $n \geq 1$, care converge către 2, șirul $g(x_n) = 0$ converge către 0; pe de altă parte, luând șirul $x_n = 2 + \frac{1}{n}$, convergent către 2, șirul $g(x_n) = 3 + \frac{1}{n}$ converge către 3. Alegând vecinătatea $V = (2, 4)$ a punctului 3, pentru orice vecinătate U a lui $\alpha = 2$, există puncte $x \in U$, $x < 2$, pentru care $f(x) \notin V$.

3) Considerăm funcția $f: \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x^3 + 5x}{x}$ care nu este definită în punctul $x = 0$. Pentru orice șir $x_n \to 0$ $x_n \neq 0$, avem $f(x_n) = \frac{x_n^3 + 5x_n}{x_n} = x_n^2 + 5$, deci $f(x_n) \to 5$ (fig. II.8).

4) Pentru funcția $f_1 : \mathbf{R}\setminus\{-2\} \to \mathbf{R}$, $f_1(x) = \dfrac{1}{x+2}$, o idee asupra comportării și în vecinătatea punctului $x = -2$ se obține observând tabloul de valori

x	-3	...	$-2{,}01$	$-2{,}001$	$-2{,}0001$	...	-2	...	$-1{,}999$	$-1{,}99$	$-1{,}98$
$f_1(x)$	-1		-10^2	-10^3	-10^4	$\searrow$ $\searrow$	$\vdots$	$\nwarrow$ $\nwarrow$	10^3	10^2	50

Dacă x „se apropie" de -2 prin valori strict mai mici (respectiv mai mari) decât -2, atunci valorile lui $f_1(x)$ descresc (respectiv cresc). În mod similar, pentru funcția $g_1 : \mathbf{R}\setminus\{-2\} \to \mathbf{R}$, $g_1(x) = \dfrac{1}{(x+2)^2}$, se poate alcătui un tablou de valori de forma:

x	-3	...	$-2{,}01$	$-2{,}001$	$-2{,}0001$	...	-2	...	$-1{,}999$	$-1{,}99$	$-1{,}98$
$g_1(x)$	1		10^4	10^6	10^8	$\nearrow$ $\nearrow$	$\vdots$	$\nwarrow$ $\nwarrow$	10^6	10^4	2500

care dă o idee asupra comportării lui g_1 în vecinătatea punctului -2.

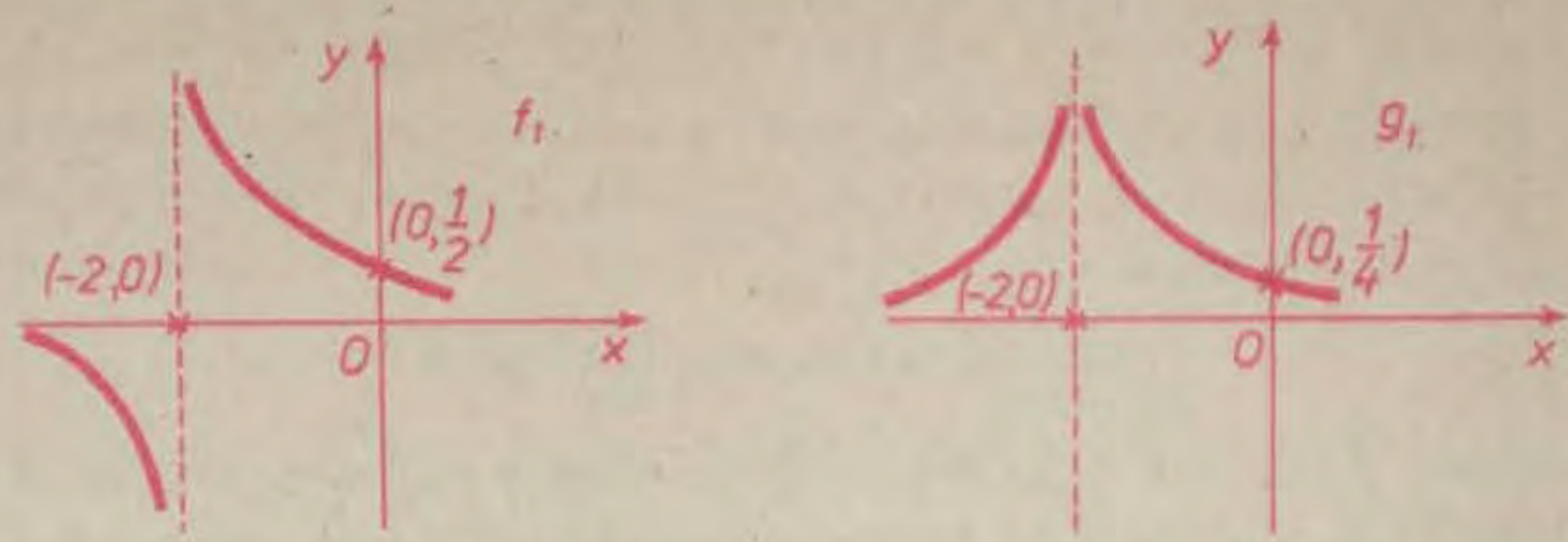


Fig. II.9

5) Considerăm punctul $x = 0$ și funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } x < 0 \\ 3, \text{ dacă } x = 0 \\ -x^2, \text{ dacă } x > 0 \end{cases}$$

al cărei grafic este indicat în figura II.10. În acest caz, pentru orice șir $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$, rezultă că $f(x_n) \to 0$. Apoi pentru orice șir $x_n \to \infty$, avem $f(x\ ) \to -\infty$.

6) Funcția $f : \mathbf{R}\setminus\{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$ are proprietatea că pentru orice șir $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$, avem $f(x_n) \to 0$; într-adevăr, $|f(x_n)| \leq |x_n|$ pentru orice n și aplicăm teorema II.4, 1°, pentru $l = 0$, $a_n = f(x_n)$, $b_n = |x_n|$.

Se observă că în exemplele 1, 2 funcțiile au fost definite în punctul $x = 2$; în exemplul 3 funcția f nu a fost definită în $x = 0$, iar în exemplul 4 funcțiile f_1, g_1 nu au fost definite în punctul $x = -2$, în vecinătatea căruia ne-am situat. Se mai observă că în exemplele 1, 3, 5, 6, dacă x „este apropiat" de punctul α respectiv, atunci $f(x)$ „se apropie" de un punct l bine determinat.

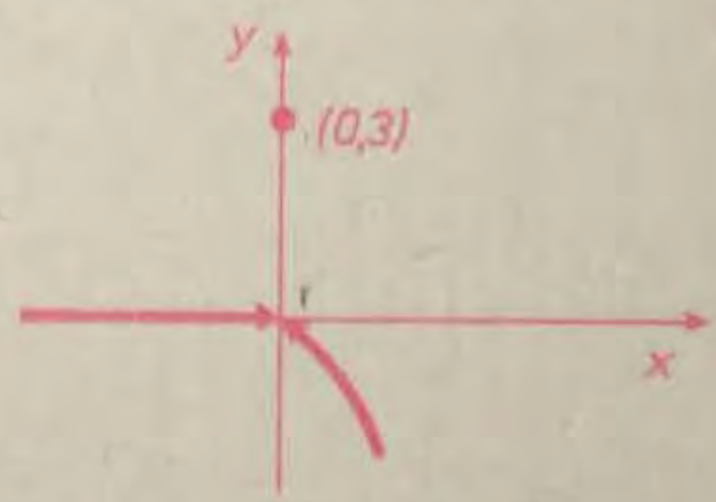


Fig. II.10

În fiecare din aceste exemple s-au considerat o funcție $f : D \to \mathbf{R}$ $(D \subset \mathbf{R})$ și un

punct α care poate să nu aparţină lui D dar este punct de acumulare pentru D. Remarcăm că în acest caz *există siruri de puncte din* $D \setminus \{\alpha\}$ *care converg către* α; într-adevăr, dacă $\alpha \in \mathbf{R}$, atunci pentru orice $n \geq 1$ natural, în vecinătatea $\left(\alpha - \frac{1}{n}, \alpha + \frac{1}{n}\right)$ a punctului α se află cel puţin un punct $x_n \in D$, $x_n \neq \alpha$, deci $|x_n - \alpha| < \frac{1}{n}$ şi, ca atare, $x_n \to \alpha$. Dacă $\alpha = \infty$, alegem $x_n \in D$, $x_n > n$ şi $x_n \to \infty$ etc.

Trecem acum la definiţia noţiunii de limită a unei funcţii într-un punct.

2.2. Limita unei funcţii într-un punct

Fixăm o funcţie $f : D \to \mathbf{R} (D \subset \mathbf{R})$, $\alpha \in \overline{\mathbf{R}}$ un punct de acumulare pentru D şi un punct $l \in \overline{\mathbf{R}}$.

DEFINIŢIA II.4. Se spune că funcţia f are limită în punctul α, egală cu l, dacă este îndeplinită următoarea condiţie:

(4) **pentru orice vecinătate V a lui l există o vecinătate U a punctului α astfel încât pentru orice $x \in D \cap U$, $x \neq \alpha$ să rezulte $f(x) \in V$ (fig. II.11).**

În acest caz se scrie

$$\lim_{x \to \alpha,\ x \in D} f(x) = l \quad \text{sau} \quad \lim_{x \to \alpha} f(x) = l$$

şi se citeşte: limita lui $f(x)$, când x tinde către α există şi este egală cu l.

Atenţie! Nu am dat sens pentru $x \to \alpha$ sau $f(x) \to l$, luate separat, ci numai pentru sintagma $\{x \to \alpha \Rightarrow f(x) \to l\}$, echivalentă cu $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = l$.

Condiţia (4) exprimă faptul că pentru orice x „suficient de apropiat" de α, $f(x)$ este „oricât de apropiat" de l. Dacă există, limita unei funcţii într-un punct este unică: dacă $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = l$ şi $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = l'$ şi dacă prin absurd $l \neq l'$, atunci alegem vecinătăţi disjuncte V şi V' ale punctelor l, l' respectiv şi există vecinătăţi U şi U' ale lui α satisfăcând condiţii de tipul (4). Atunci, pentru $x \in D \cap U \cap U'$, $x \neq \alpha$, rezultă $f(x) \in V \cap V'$, ceea ce este absurd.

Stabilim acum un rezultat important care este şi un criteriu practic de studiu al existenţei limitei unei funcţii, după care vom analiza câteva exemple.

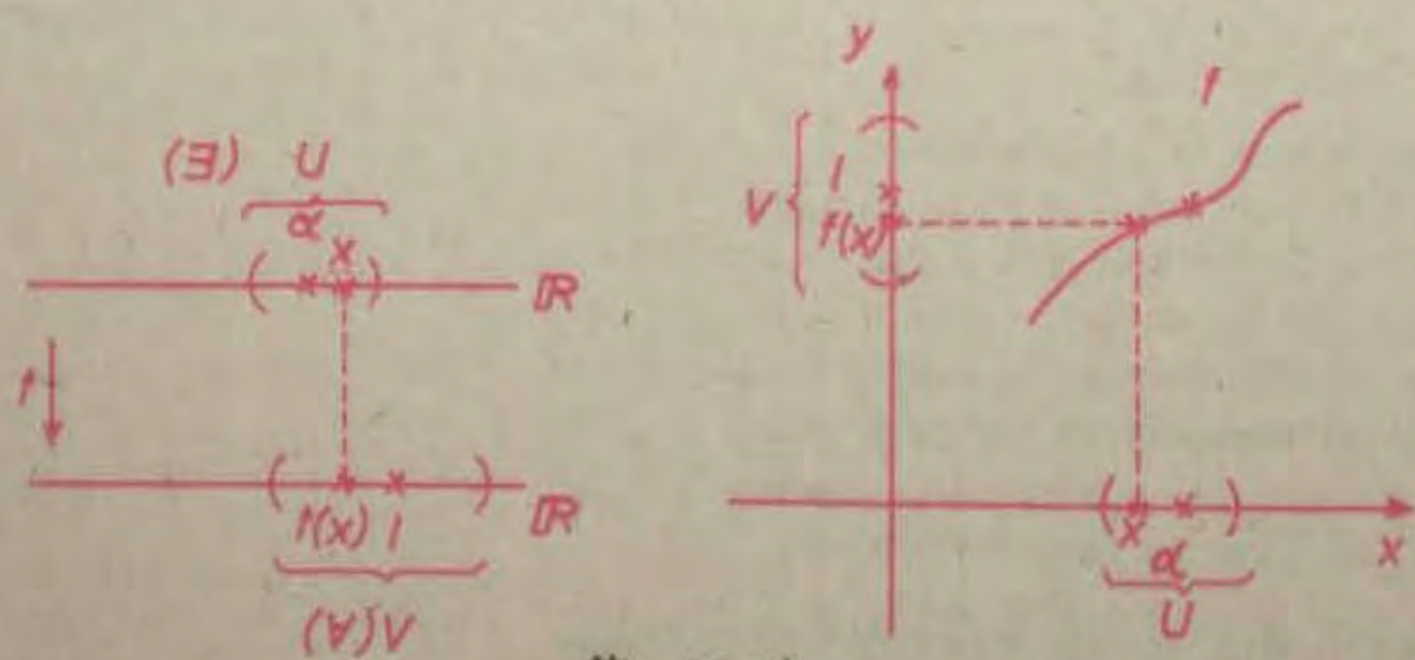


Fig. II.11

TEOREMA II. 6. Fie $f : D \to \mathbf{R}$ $(D \subset \mathbf{R})$ o funcţie, $\alpha \in \overline{\mathbf{R}}$ un punct de acumulare pentru D şi $l \in \overline{\mathbf{R}}$. Sunt echivalente afirmaţiile:

(a) limita $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x)$ există şi este egală cu l („criteriul cu vecinătăţi");

(b) pentru orice şir $(x_n)_{n \geq 0}$ de puncte din $D \setminus \{\alpha\}$ având limita α avem $f(x_n) \to l$ („criteriul cu şiruri").

Demonstraţie. (a) $\Rightarrow$ (b). Presupunem că există $l = \lim\limits_{x \to \alpha} f(x)$ şi fie $x_n \to \alpha$, $x_n \in D \setminus \{\alpha\}$, $\forall n \geq 0$. Avem de demonstrat că $f(x_n) \to l$. Pentru aceasta folosim definiţia II.2 şi fie V o vecinătate *oarecare* a punctului l. Conform ipotezei, există o vecinătate U a lui α astfel încât din faptul că $x \in D \cap U$, $x \neq \alpha$ să rezulte $f(x) \in V$. Deoarece $x_n \to \alpha$, rezultă că $x_n \in U$ de la un rang N încolo; atunci $x_n \in D \cap U$, $x_n \neq \alpha$, deci $f(x_n) \in V$ pentru orice $n \geq N$, deci $f(x_n) \to l$.

(b) $\Rightarrow$ (a). Facem ipoteza că este îndeplinită condiţia (b) şi avem de verificat condiţia (4). Presupunem, prin reducere la absurd, că această condiţie nu este îndeplinită, deci că ar *exista* o vecinătate V a punctului l astfel încât pentru orice vecinătate U a punctului α să existe un punct $x \in D \cap U$, $x \neq \alpha$ cu proprietatea că $f(x) \notin V$.

Presupunem mai întâi $\alpha \in \mathbf{R}$ şi luăm $U = \left(\alpha - \frac{1}{n}, \alpha + \frac{1}{n}\right)$, $n \geq 1$ fiind întreg arbitrar. Atunci pentru fiecare $n \geq 1$ există $x_n \in D \cap U$, $x_n \neq \alpha$ astfel încât $f(x_n) \notin V$. Deoarece $x_n \in U$, avem $|x_n - \alpha| < \frac{1}{n}$, deci $x_n \to \alpha$ şi conform ipotezei (b), rezultă $f(x_n) \to l$, ceea ce contrazice faptul că $f(x_n) \notin V$ pentru orice n. Am ajuns astfel la o contradicţie.

Dacă $\alpha = \infty$, atunci luăm $U = (n, \infty]$, $n \geq 1$ fiind întreg arbitrar şi există $x_n \in D \cap U$ astfel încât $f(x_n) \notin V$. Cum $x_n \in U$, rezultă $x_n > n$, $\forall n \geq 1$, deci $x_n \to \infty$ şi conform ipotezei (b) rezultă $f(x_n) \to l$, ceea ce contravine faptului că $f(x_n) \notin V$ pentru orice n. Dacă $\alpha = -\infty$ se raţionează similar considerând $U = [-\infty, -n)$ etc.

Observaţie importantă. Pentru studiul existenţei limitei unei funcţii într-un punct se foloseşte adeseori condiţia (b), care ar putea fi luată ca definiţie. Negaţia logică a condiţiei (b) dă un criteriu ca o funcţie f să *nu* aibă limita l în punctul α, anume: să existe un şir $x_n \to \alpha$, $x_n \in D \setminus \{\alpha\}$, $n \geq 0$ astfel încât şirul $f(x_n))_{n \geq 0}$ să nu aibă limita l. Astfel, dacă se pot construi două şiruri $x'_n \to \alpha$, $x''_n \to \alpha$ de puncte din $D \setminus \{\alpha\}$ şi dacă unul din şirurile $(f(x_n))_{n \geq 0}$, $(f(x'_n))_{n \geq 0}$ nu are limită sau dacă ambele au limite, dar acestea sunt distincte, atunci funcţia f nu are limită în punctul α.

Noţiunea introdusă mai sus generalizează noţiunea de limită a unui şir. Fie $l \in \overline{\mathbf{R}}$; direct din definiţie rezultă că un şir $(a_n)_{n \geq 0}$ are limita l dacă şi numai dacă funcţia $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, $f(n) = a_n$ are limita l (în punctul $\alpha = \infty$, care este punct de acumulare pentru $\mathbf{N}$).

Alături de utilitatea şirurilor în procese algoritmice recurente, în legătură cu raţionamentele prin inducţie etc., subliniată în § 1, teorema II.6 arată că studiul limitelor de funcţii se poate reduce la studiul şirurilor, acestea din urmă fiind — după cum ştim — funcţii definite pe o mulţime cu un singur punct de acumulare.

Exemple

1) Reluăm toate cele 6 exemple de la punctul 2.1. Este evident că $\lim\limits_{x\to 2}(x+1)=3$, deoarece pentru orice şir $x_n\to 2$, $x_n\neq 2$ avem $x_n+1\to 3$ şi aplicăm teorema II.6. Apoi funcţia g din exemplul 2 nu are limită în punctul $x=2$, deoarece alegând şirurile $x_n=2-\frac{1}{n}$, $x'_n=2+\frac{1}{n}$, $n\geq 1$, ambele convergente către 2, avem $g(x_n)\to 0$ şi $g(x'_n)=3+\frac{1}{n}\to 3$. Pentru exemplul 3 avem evident $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3+5x}{x}=5$ (aplicând criteriul cu şiruri).

Apoi $\lim\limits_{x\to -2}f_1(x)$ nu există $\left(\text{deoarece pentru şirurile } x'_n=-2-\frac{1}{n},\ x''_n=-2+\frac{1}{n},\ n\geq 1 \text{ avem } f_1(x'_n)=-n\to-\infty \text{ şi } f_1(x''_n)=n\to\infty\right)$. Dar $\lim\limits_{x\to -2}g_1(x)=\lim\limits_{x\to -2}\frac{1}{(x+2)^2}=$ $=\infty$ $\Big[$deoarece pentru orice vecinătate V a punctului ∞ există $b>0$ astfel încât $(b,\ \infty]\subset V$ şi considerăm $U=\left(-2-\frac{1}{\sqrt{b}},\ -2+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)$; se observă că U este vecinătate a punctului $x=-2$ şi, în plus, $\forall\, x\in U$, $x\neq -2$ avem $|x+2|<\frac{1}{\sqrt{b}}\Rightarrow$ $\Rightarrow (x+2)^2<\frac{1}{b}$, deci $\frac{1}{(x+2)^2}>b$, adică $\frac{1}{(x+2)^2}\in V\Big]$.

În exemplul 5 avem $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$; într-adevăr, aplicăm definiţia II.4 şi fie V o vecinătate oarecare a originii. Alegem $\varepsilon>0$ astfel încât $(-\varepsilon,\ \varepsilon)\subset V$ şi fie $U=(-\sqrt{\varepsilon},\ \sqrt{\varepsilon})$. Dacă $x\in U$, $x\neq 0$, atunci $f(x)=0$, dacă $x<0$ şi $f(x)=-x^2$, dacă $x>0$, deci în orice caz $f(x)\in(-\varepsilon,\ \varepsilon)$, adică $f(x)\in V$. Se poate remarca aici că $f(0)=3$, deci limita $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ există şi diferă de $f(0)$. În fine, în exemplul 6 am probat deja că $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$.

La aceste exemple adăugăm alte trei exemple simple.

2) Orice funcţie constantă $f:D\to\mathbf{R}$ cu valoarea c are limită în orice punct α de acumulare pentru D şi $\lim\limits_{x\to\alpha}f(x)=c$.

3) Este evident că $\lim\limits_{x\to\alpha}x=\alpha$ (adică $\lim\limits_{x\to\alpha}1_{\mathbf{R}}(x)=\alpha$). Apoi, $\lim\limits_{x\to\alpha}x^2=\alpha^2$ (deoarece dacă $x_n\to\alpha$, atunci $x_n^2\to\alpha^2$).

4) Funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\sin x$ nu are limită în punctul ∞ deoarece şirurile $x'_n=n\pi$, $x''_n=\frac{\pi}{2}+2n\pi$, $n\geq 1$ au limita ∞ ($x'_n>n$ şi $x''_n>n$ pentru orice întreg $n\geq 1$), dar $f(x'_n)=\sin x'_n=\sin n\pi=0$, $f(x''_n)=\sin x''_n=\sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)=1$, deci $f(x'_n)\to 0$, $f(x''_n)\to 1$.

În mod similar, arătăm că funcţia $g:\mathbf{R}\setminus\{0\}\to\mathbf{R}$, $g(x)=\sin\frac{1}{x}$ nu are limită în punctul $x=0$; anume alegem şirurile $x'_n=\frac{1}{n\pi}$ şi $x''_n=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$, $n\geq 1$ care converg către zero şi totuşi $f(x'_n)=\sin\frac{1}{x'_n}=\sin n\pi\to 0$, $f(x''_n)=\sin\frac{1}{x''_n}\to 1$.

Subliniem un fapt important. Se poate arăta că în cazul când $x \in \mathbf{R}$, $l \in \mathbf{R}$, afirmațiile (a), (b) din teorema II.6 sunt echivalente cu următoarea:

(c) *pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ depinzând de ε astfel încât din faptul că $x \in D \setminus \{\alpha\}$ și $|x - \alpha| < \delta$ să rezulte $|f(x) - l| < \varepsilon$ („criteriul $\varepsilon - \delta$").*

2.3. Limite laterale

Indicăm acum un nou criteriu care asigură existența limitei unei funcții într-un punct, adeseori utilizat.

Fie $f : D \to \mathbf{R}$ $(D \subset \mathbf{R})$, α un punct de acumulare pentru mulțimea $D_1 = D \cap (-\infty, \alpha) = \{x \in D \mid x < \alpha\}$ și $l_s \in \mathbf{R}$. Se spune că funcția f *are limită (sau există limita lui f) la stânga* la punctul $x = \alpha$, egală cu l_s, dacă restricția lui f la D_1 are limită în punctul $x = \alpha$, conform definiției II.4. Se scrie atunci

$$\lim_{x \to \alpha,\ x < \alpha} f(x) = l_s \text{ sau simbolic } f(\alpha - 0) = l_s.$$

Aceasta revine la faptul că pentru orice vecinătate V a punctului l_s există o vecinătate U a lui α, astfel încât $x \in D \cap U$, $x < \alpha \Rightarrow f(x) \in V$.

În mod similar se definește *limita la dreapta* a lui f în punctul α, $l_d = \lim\limits_{x \to \alpha,\ x > \alpha} f(x)$, $(l_d \in \overline{\mathbf{R}})$, notată simbolic $f(\alpha + 0)$. Uneori se notează $l_s = \lim\limits_{x \uparrow \alpha} f(x)$ și $l_d = \lim\limits_{x \downarrow \alpha} f(x)$. Se extinde direct teorema II.6 pentru limitele laterale (adică la stânga, respectiv la dreapta), folosind șiruri $x_n \to \alpha$, $x_n < \alpha$ (respectiv $x_n \to \alpha$, $x_n > \alpha$).

TEOREMA II.7. Fie $f : D \to \mathbf{R}$ o funcție și $\alpha \in \mathbf{R}$ un punct de acumulare pentru D cu proprietatea că funcția f are limite laterale în punctul $x = \alpha$ (adică există $f(\alpha - 0)$ și $f(\alpha + 0)$). Atunci afirmațiile următoare sunt echivalente:

1°. funcția f are limită în punctul $x = \alpha$;

2°. $f(\alpha - 0) = f(\alpha + 0)$.

În aceste condiții este adevărată următoarea dublă egalitate

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = f(\alpha - 0) = f(\alpha + 0).$$

Demonstrație. 1° $\Rightarrow$ 2°. Dacă există $l = \lim\limits_{x \to \alpha} f(x)$, atunci este evident că $f(\alpha - 0) = l$ și $f(\alpha + 0) = l$, deci $f(\alpha - 0) = f(\alpha + 0) = l$.

2° $\Rightarrow$ 1°. Presupunem că $f(\alpha - 0) = f(\alpha + 0)$ și notăm cu l valoarea comună. Arătăm că limita $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x)$ există și este egală cu l. Fie V o vecinătate oarecare a lui l. Atunci există vecinătăți U_1, U_2 ale lui α, astfel încât pentru orice $u \in U_1 \cap D$, $u < \alpha$ să avem $f(u) \in V$ și pentru orice $v \in U_2 \cap D$, $v > \alpha$ să avem $f(v) \in V$. Considerăm vecinătatea $U = U_1 \cap U_2$ a punctului α. Pentru orice $x \in U \cap D$, $x \neq \alpha$ avem fie $x < \alpha$, $x \in U_1$, deci $f(x) \in V$, fie $x > \alpha$, $x \in U_2$ și din nou $f(x) \in V$. Așadar, am probat îndeplinirea condiției (4) și, ca atare, $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = l$.

Exemple

1) Treapta unitate are în origine limită la stânga, egală cu 0 și limită la dreapta, egală cu 1.

2) Considerăm funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = [x]$. Ea are limită în orice punct $\alpha \notin \mathbf{Z}$, egală cu $[\alpha]$, iar în punctele $\alpha \in \mathbf{Z}$ are limite laterale neegale (fig. II.12); anume $f(\alpha - 0) = \alpha - 1$ și $f(\alpha + 0) = \alpha$.

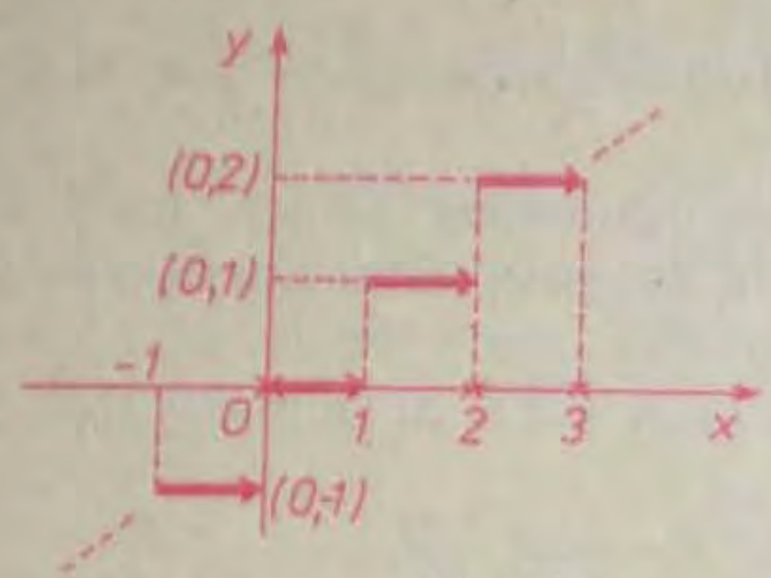


Fig. II.12

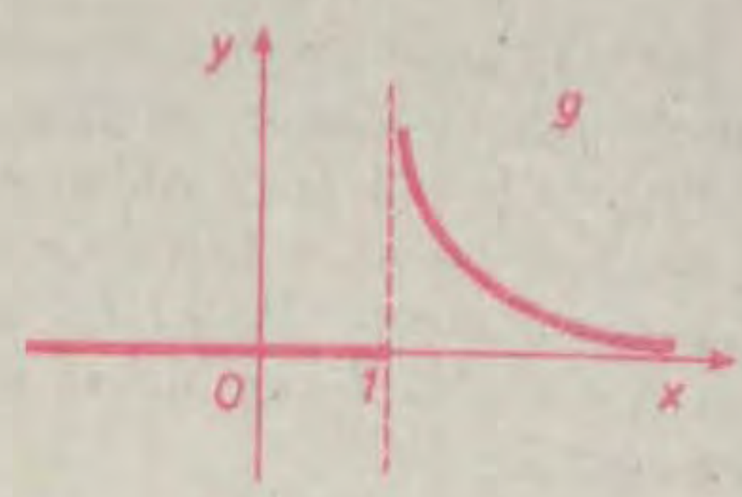


Fig. II.13

3) Funcția $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ are limită la dreapta, egală cu 0 în punctul $x = 0$ (și nu are sens problema existenței limitei la stânga în acel punct).

4) Funcția $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin

$$g(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ dacă } x \leqslant 1 \\ \dfrac{1}{x-1} & , \text{ dacă } x > 1 \end{cases} \quad \text{(fig. II.13)}$$

are limită la stânga în punctul $x = 1$ și anume $g(1 - 0) = 0$, dar nu are limită finită la dreapta în acest punct; anume avem $g(1 + 0) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} g(x) = \lim\limits_{\substack{\alpha \to 1 \\ x > 1}} \dfrac{1}{x-1} = \infty$.

5) Iată un exemplu din fizică. Se consideră o cantitate de apă și se notează cu $V(t)$ volumul ei la temperatura t. Atunci limita la stânga $V(0 - 0)$ este volumul aceleiași cantități de gheață la 0°, iar limita la dreapta $V(0 + 0)$ este volumul cantității de apă lichidă la 0°. Din considerente fizice, se știe că

$$V(0 + 0) < V(0 - 0) \text{ (fig. II.14)}$$

(acesta este un motiv pentru care se întâmplă accidente la înghețarea apei în conducte!).

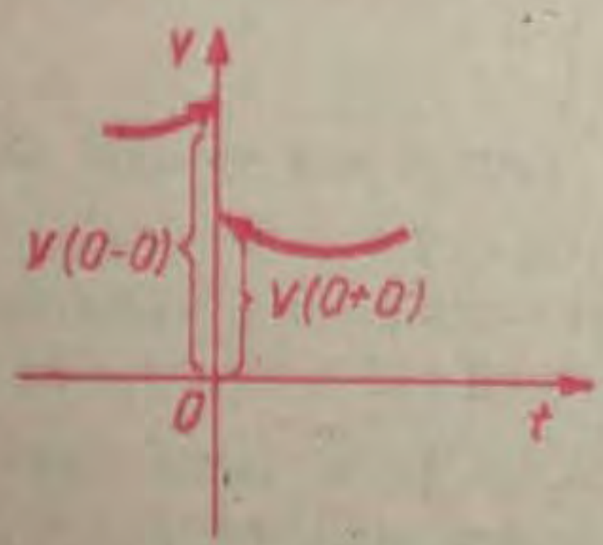


Fig. II.14

În general, dacă o funcție $f : D \to \mathbf{R}$ ($D \subset \mathbf{R}$) admite limite laterale într-un punct α (care este punct de acumulare pentru D), atunci se poate defini *saltul funcției f în punctul α*. Acesta este numărul real

$$S_{f,\,\alpha} = f(\alpha + 0) - f(\alpha - 0),$$

adică diferența între limita la dreapta și limita la stânga ale lui f în punctul α.

De exemplu, în cazul funcției $f(x) = x$ saltul este nul în orice punct din $\mathbf{R}$; saltul funcției $f(x) = [x]$ este egal cu zero în orice punct $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$ și este egal cu 1 în orice punct $\alpha \in \mathbf{Z}$. Se observă că în exemplul din fizică, dat anterior, saltul lui V în origine este negativ.

EXERCIŢII (capitolul II, § 2)

1. Să se arate că funcţiile $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ următoare au limită în orice punct $\alpha \in \mathbf{R}$:
a) $f(x) = x + 5$; b) $f(x) = x^2$; c) $f(x) = x^2 + 5$.

2. Să se determine punctele unde funcţia $f : \mathbf{R} \setminus \{1\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{2x - 2}$ nu are limită. Aceeaşi problemă pentru $f : \mathbf{R} \setminus \{0, 2\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x}$.

3. Să se arate că limitele următoare există şi au valorile indicate:
a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x+1}{x+2} = \dfrac{2}{3}$; b) $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x+5}{x+3} = -1$,
aplicând definiţia II.4.

4. Să se arate că funcţiile $f, g : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{5x^2 + 1}{x}$, $g(x) = \dfrac{2x^2 + 1}{x}$ nu au limită în punctul $x = 0$, dar $f - g$, $\dfrac{f}{g}$, $\dfrac{g}{f}$ au limită în acest punct,

5. Să se arate, folosind definiţia II.4, că
a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{(x-1)^2} = \infty$;
b) funcţia $f : \mathbf{R} \setminus \{1\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$ nu are limită în punctul $x = 1$.

6. Să se schiţeze graficele funcţiilor $f, g, h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definite prin
$$f(x) = 2x + 1,\ g(x) = 3x - 1,\ h(x) = \begin{cases} 2x + 1, \text{ dacă } x \leqslant 1 \\ 3x - 1, \text{ dacă } x > 1 \end{cases}$$
şi să se determine punctele unde aceste funcţii nu au limită.

7. Să se traseze graficele funcţiilor $f : \mathbf{R} \setminus \{1\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$, $g : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $g(x) = \dfrac{|x|}{x}$ şi $h : \mathbf{R} \setminus \{0, 1\} \to \mathbf{R}$, $h(x) = f(x) \cdot g(x)$. Care din aceste funcţii nu au limită în punctele $\alpha = 0$ şi $\alpha = 1$?

8. Să se calculeze limitele laterale ale funcţiilor $f : \mathbf{D} \to \mathbf{R}$ următoare în punctele indicate (D fiind domeniul maxim de definiţie):
a) $f(x) = x + |x|$, $\alpha = 0$, b) $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $\alpha = 0$;
c) $f(x) = \dfrac{x + |x|}{x}$, $\alpha = 0$; d) $f(x) = \begin{cases} x, \text{ dacă } x < 1 \\ 2x, \text{ dacă } x \geqslant 1 \end{cases}$, $\alpha = 1$;
e) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 40, \text{ dacă } x \leqslant 7 \\ x + 2, \text{ dacă } x > 7 \end{cases}$, $\alpha = 7$; f) $f(x) = \left\{ \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} \right.$, $\alpha = 2$

9. Pentru ce k real funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + kx, \text{ dacă } x < 1 \\ x - 2, \text{ dacă } x \geqslant 1 \end{cases}$$
are limită în punctul $x = 1$? Aceeaşi problemă pentru funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + kx, \text{ dacă } x < 0 \\ x - 2, \text{ dacă } x \geqslant 0 \end{cases}, \text{ în } \alpha = 0.$$

10. Să se calculeze saltul funcţiilor: $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ următoare în punctele indicate:
a) $f(x) = x^2$, în $\alpha = 1$;
b) $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, \text{ dacă } x < 2 \\ 4x, \text{ dacă } x \geqslant 2 \end{cases}$, în $\alpha = 2$;
c) $f(x) = \begin{cases} -x, \text{ dacă } x < 1 \\ kx + 2, \text{ dacă } x \geqslant 1 \end{cases}$, ($k$ parametru real), în $\alpha = 1$.

§ 3. Operații cu șiruri convergente

Pentru studiul operațiilor cu limite de funcții începem cu cazul particular al șirurilor. Fie $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$, două șiruri de numere reale. Se pot atunci considera alte șiruri definite cu ajutorul lor; de exemplu, $(a_n + b_n)_{n\geq 0}$, $(2a_n)_{n\geq 0}$, $(3a_n + 5b_n)_{n\geq 0}$, $(a_n b_n)_{n\geq 0}$ etc. Ce se poate spune despre convergența acestora dacă șirurile inițiale sunt convergente? Răspunsul la o astfel de întrebare este util, de exemplu, în reducerea studiului șirurilor la anumite șiruri-tip; astfel, pentru șirul $c_n = \frac{2n+1}{n^2}$, $n \geq 1$, avem $c_n = 2 \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$, iar pentru șirul $d_n = \frac{\sqrt{n^2+4}}{n}$, $n \geq 1$, avem $d_n = \sqrt{1 + 4 \cdot \frac{1}{n^2}}$ pentru orice $n \geq 1$.

Vom folosi următoarea propoziție pregătitoare.

LEMĂ. Dacă $(u_n)_{n\geq 0}$, $(v_n)_{n\geq 0}$ sunt două șiruri convergente către zero, atunci pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ avem $\alpha u_n + \beta v_n \to 0$.

Demonstrație. Putem presupune $\alpha \neq 0$ și $\beta \neq 0$, celelalte cazuri fiind imediate. Verificăm condiția (2) și fie $\varepsilon > 0$ arbitrar fixat. Conform ipotezei, există N_1, N_2 astfel încât $|u_n| < \frac{\varepsilon}{2|\alpha|}$ pentru orice $n \geq N_1$ și $|v_n| < \frac{\varepsilon}{2|\beta|}$ pentru orice $n \geq N_2$. Fie $N = \max(N_1, N_2)$. Atunci pentru orice $n \geq N$, avem $|\alpha u_n + \beta v_n| \leq |\alpha u_n| + |\beta v_n| = |\alpha| \cdot |u_n| + |\beta| \cdot |v_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha u_n + \beta v_n) = 0$.

TEOREMA II.8. Presupunem că șirurile $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ sunt convergente. Atunci șirurile $(a_n + b_n)_{n\geq 0}$, $(a_n b_n)_{n\geq 0}$ sunt convergente și, în plus,

(5) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$,

(6) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n)(\lim\limits_{n\to\infty} b_n)$.

Demonstrație. Fie $a_n \to a$, $b_n \to b$, deci șirurile $u_n = |a_n - a|$, $v_n = |b_n - b|$, $n \geq 0$ converg către zero. Avem, pentru orice $n \geq 0$, $|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| = u_n + v_n$. Conform lemei, avem $u_n + v_n \to 0$. Aplicând teorema II.4, 1°, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$, adică relația (5).

Șirul $(b_n)_{n\geq 0}$ este mărginit (fiind convergent), deci există $M > 0$ astfel încât $|b_n| \leq M$, $\forall n \geq 0$. Din relația $a_n b_n - ab = (a_n - a)b_n + a(b_n - b)$, rezultă $|a_n b_n - ab| \leq c_n$, unde $c_n = M \cdot |a_n - a| + |a| \cdot |b_n - b| = M u_n + |a| v_n$, pentru orice $n \geq 0$. Conform lemei, avem $c_n \to 0$, și, aplicând teorema II.4, 1°, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = ab$.

COROLAR 1°. Dacă $\lambda \in \mathbf{R}$ şi $a_n \to a$, $a \in \mathbf{R}$, atunci $\lambda a_n \to \lambda a$, în particular, $\lim\limits_{n\to\infty}(-a_n) = -a$.

2°. Dacă şirurile $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ sunt convergente, atunci şirul $(a_n - b_n)_{n\geq 0}$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Demonstraţie. 1°. Şirul constant $b_n = \lambda$, $n \geq 0$ este convergent către λ şi, aplicând relaţia (6), avem $\lambda a_n \to \lambda a$. Pentru $\lambda = -1$ rezultă $-a_n \to -a$.

2°. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}[a_n + (-b_n)] = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty}(-b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Pe scurt, dar mai puţin riguros, teorema II.8 şi corolarul precedent se exprimă spunând că limita sumei (diferenţei, produsului) de şiruri convergente este egală cu suma (respectiv diferenţa, produsul) limitelor, iar constantele pot fi „scoase" în afara limitei.

Trebuie observat că lema şi relaţiile (5), (6) din teorema II.8 au loc pentru orice număr fixat k ($k \geq 2$) de şiruri convergente, considerând în lema corespunzătoare rangul $N = \max(N_1, \ldots, N_k)$. Aceasta nu este posibilă dacă numărul şirurilor creşte indefinit; de exemplu, deşi $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, totuşi limita $\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}}_{n \text{ ori}}\Big)$ nu este nulă, ci este evident egală cu 1.

TEOREMA II.9. Fie $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ două şiruri de numere reale.

1°. Presupunem că $a_n \to \infty$ şi $b_n \to b$, $b \in \mathbf{R}$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \infty$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \begin{cases} \infty, & \text{dacă } b > 0 \\ -\infty, & \text{dacă } b < 0 \end{cases}$.

2°. Presupunem că $a_n \to -\infty$ şi $b_n \to b$, $b \in \mathbf{R}$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = -\infty$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \begin{cases} -\infty, & \text{dacă } b > 0 \\ \infty, & \text{dacă } b < 0 \end{cases}$.

3°. Dacă $a_n \to \infty$, $b_n \to \infty$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \infty$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \infty$.

4°. Dacă $a_n \to -\infty$, $b_n \to -\infty$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = -\infty$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \infty$.

5°. Dacă $a_n \to \infty$, $b_n \to -\infty$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = -\infty$.

Demonstraţie 1°. Presupunem $a_n \to \infty$, $b_n \to b$ şi fie $\varepsilon > 0$ arbitrar fixat. Aplicăm teorema II.2. Există un rang N_1, astfel încât $a_n > 2\varepsilon - b$ pentru orice $n \geq N_1$ şi un rang N_2, astfel încât $b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon$ pentru orice $n \geq N_2$. Atunci pentru orice $n \geq \max(N_1, N_2)$, avem $a_n + b_n > (2\varepsilon - b) + (b - \varepsilon) = \varepsilon$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \infty$.

Presupunem acum că $b > 0$. Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ avem $a_n > \frac{2\varepsilon}{b}$ şi $b_n \in \left(\frac{b}{2}, \frac{3b}{2}\right)$ de la un rang încolo, deci $a_n b_n > \frac{2\varepsilon}{b} \cdot \frac{b}{2} = \varepsilon$, adică $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$; dacă $b < 0$, atunci $-b > 0$ şi $-b_n \to -b$, deci, conform cazului precedent, $\lim\limits_{n\to\infty} (-a_n b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n(-b_n) = \infty$, de unde, $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = -\infty$.

Afirmaţia 2 se probează similar. Demonstrăm 3°: fie $\varepsilon > 0$ arbitrar fixat. Atunci $a_n > \frac{\varepsilon}{2}$, $b_n > \frac{\varepsilon}{2}$ de la un rang încolo, deci $a_n + b_n > \varepsilon$ de la un rang încolo, deci $a_n + b_n \to \infty$. În mod analog, $a_n > \sqrt{\varepsilon}$, $b_n > \sqrt{\varepsilon}$ de la un rang încolo, deci $a_n b_n > \varepsilon$ adică $a_n b_n \to \infty$.

Celelalte afirmaţii se demonstrează în mod similar.

Observaţie. Afirmaţiile din teorema II.9 se scriu simbolic respectiv astfel:

1°. $\infty + b = \infty$, $\infty \cdot b = \begin{cases} \infty, & \text{dacă } b > 0 \\ -\infty, & \text{dacă } b < 0 \end{cases}$

2°. $-\infty + b = -\infty$, $(-\infty) \cdot b = \begin{cases} -\infty, & \text{dacă } b > 0 \\ \infty, & \text{dacă } b < 0 \end{cases}$

3°. $\infty + \infty = \infty$, $\infty \cdot \infty = \infty$

4°. $-\infty - \infty = -\infty$, $(-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$

5°. $\infty \cdot (-\infty) = -\infty$.

Nu se atribuie nici un sens pentru $\infty + (-\infty)$, $\infty \cdot 0$, considerate cazuri exceptate. Remarcăm, de asemenea, că $-(-\infty) = \infty$, în sensul că un şir $(a_n)_{n\geq 0}$ are limita $-\infty$ dacă şi numai dacă şirul $(-a_n)_{n\geq 0}$ are limita ∞.

TEOREMA II.10. Fie $(b_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale.

1°. Dacă $(b_n)_{n\geq 0}$ este un şir convergent către numărul real b şi $b \neq 0$, atunci numerele b_n sunt nenule începând de la un anumit rang k şi şirul $\left(\frac{1}{b_n}\right)_{n\geq k}$ converge către $\frac{1}{b}$, adică $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$.

2°. Dacă $b_n \to \infty$ (sau dacă $b_n \to -\infty$), atunci $\frac{1}{b_n} \to 0$.

3°. Presupunem că $b_n \to 0$. Dacă $b_n > 0$ (respectiv $b_n < 0$) de la un anumit rang, atunci $\frac{1}{b_n} \to \infty$ $\left(\text{respectiv } \frac{1}{b_n} \to -\infty\right)$.

Demonstraţie. 1°. Presupunem $b > 0$ (cazul $b < 0$ se tratează similar) şi alegem o vecinătate $V = (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ a lui b, care nu conţine originea. Deoarece $b_n \to b$, toţi termenii b_n vor fi situaţi în V de la un rang k încolo şi, în particular, $b_n > b - \varepsilon > 0$ pentru orice $n \geq k$. Atunci pentru orice $n \geq k$,

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - b_n}{b_n b}\right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n| \cdot |b|} \leq \frac{1}{(b - \varepsilon) \cdot b} \cdot |b_n - b|$$

şi, cum $b_n \to b$, va rezulta $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$, aplicând teorema II.4.1°.

2°. Presupunem că $b_n \to \infty$ şi fie $\varepsilon > 0$ arbitrar fixat. Atunci există un rang N astfel încât $b_n > \frac{1}{\varepsilon}$ pentru orice $n \geq N$. În particular, $b_n > 0$ şi $0 < \frac{1}{b_n} < \varepsilon$ pentru orice $n \geq N$, deci $\frac{1}{b_n} \to 0$. Apoi, dacă $b_n \to -\infty$, atunci $-b_n \to \infty$ şi $\frac{1}{-b_n} \to 0$, deci $\frac{1}{b_n} \to 0$.

3° Presupunem că $b_n \to 0$ şi $b_n > 0$ pentru orice $n \geq k$. Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există N astfel încât $\forall\, n \geq \max(N, k)$ să avem $0 < b_n < \frac{1}{\varepsilon}$, deci $\frac{1}{b_n} > \varepsilon$ şi, ca atare, $\frac{1}{b_n} \to \infty$. În fine, dacă $b_n \to 0$ şi $b_n < 0$ (pentru $n \geq k$), atunci $-b_n \to 0$ şi $-b_n > 0$ pentru $n \geq k$, deci $\frac{1}{-b_n} \to \infty$, adică $\frac{1}{b_n} \to -\infty$.

COROLAR. Dacă $(a_n)_{n\geq 0}$ şi $(b_n)_{n\geq 0}$ sunt şiruri convergente şi dacă $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, atunci şirul $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq k}$ este convergent şi, în plus,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}. \tag{7}$$

Demonstraţie. Avem $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$ şi aplicăm relaţia (6) din teorema II.8 şi teorema II.10,1°.

Observaţie. Afirmaţiile 2°, 3° din teorema II.10 se scriu simbolic astfel:

$$\frac{1}{\infty} = 0, \qquad \frac{1}{-\infty} = 0,$$

$$\frac{1}{+0} = +\infty, \qquad \frac{1}{-0} = -\infty,$$

dar sensul corect al acestora este cel dat în enunţul teoremei.

Nu se definesc $\frac{0}{0}$, $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, şi $\infty \cdot 0$, numite cazuri exceptate (sau „nedeterminări"). Un motiv pentru care expresiei $\frac{0}{0}$ nu i se poate atribui un sens este următorul: dacă $a_n \to 0$ şi $b_n \to 0$, atunci nu se poate trage nici o concluzie privind limita raportului $\frac{a_n}{b_n}$. Astfel, pentru $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{2}{n}$ $(n \geq 1)$ avem $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{1}{2}$; pentru $a_n = \frac{1}{n} \cdot b_n = \frac{1}{n^2}$ $(n \geq 1)$ avem $\frac{a_n}{b_n} \to \infty$, în fine, pentru $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $b_n = \frac{1}{n}$ $(n \geq 1)$ avem, de asemenea, $a_n \to 0$, $b_n \to 0$ şi raportul $\frac{a_n}{b_n} = (-1)^n$ nu are limită. Aceasta arată că, spre deosebire de cazurile anterioare, nu putem avea nici o concluzie generală.

Expresia $\frac{0}{0}$ simbolizează orice raport $\frac{a_n}{b_n}$ a două şiruri care converg către zero. În mod analog, $\infty - \infty$ simbolizează diferenţa $a_n - b_n$ a două şiruri $a_n \to \infty$, $b_n \to \infty$ şi se consideră caz exceptat, deoarece dacă $a_n \to \infty$ şi $b_n \to \infty$ nu putem trage nici o concluzie referitor la limita diferenţei $a_n - b_n$. De exemplu, $\lim\limits_{n\to\infty} (2n - n) = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} (n - 2n) = -\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} [(n + 2) - n] = 2$ etc. O discuţie similară are loc pentru $\frac{\infty}{\infty}$ şi pentru $\infty \cdot 0$.

Exemple

1) Calculăm limita $l = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$. Notăm $a_n = \frac{2}{n}$, $b_n = \frac{1}{n^2}$, $n \geqslant 1$ și observăm că $a_n \to 0$, $b_n \to 0$. Atunci șirul $(a_n + b_n)_{n\geqslant 1}$ este convergent și $l = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0 + 0 = 0$.

2) Studiem existența limitei șirului $a_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$, $n \geqslant 0$. El este evident mărginit ($0 < a_n < 1$, pentru orice $n \geqslant 0$) și monoton crescător, deci este convergent. Fie $l = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Deoarece $a_n \geqslant 0$ și $l = \sup\limits_n a_n$, rezultă $l \geqslant 0$. Avem $a_n^2 = \frac{n^2}{n^2+1}$ și $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = 1$, deci $(\lim\limits_{n\to\infty} a_n)^2 = 1$, $l^2 = 1$, de unde $l = 1$ (deoarece $l \geqslant 0$).

3) Avem $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2+2n) = \infty$, aplicând teorema II.9, 3°. De asemenea, $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2-2n) = \infty$ dar aici justificarea este diferită: avem $n^2 - 2n = n^2\left(1 - \frac{2}{n}\right) = a_n b_n$, unde $a_n = n^2$, $b_n = 1 - \frac{2}{n}$, $n \geqslant 1$. Deoarece $a_n \to \infty$, $b_n \to 1$, atunci, aplicând teorema II.9, 1°, rezultă $a_n b_n \to \infty$, adică $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2 - 2n) = \infty$.

În mod similar, aplicând teorema II.9, punctele 4° și 2°, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}(-n^2-2n) = -\infty$, și $\lim\limits_{n\to\infty}(-n^2 + 2n) = -\infty$. De asemenea, se poate folosi faptul că dacă un șir $(a_n)_{n\geqslant 0}$ are limită, atunci $(-a_n)_{n\geqslant 0}$ are limită și $\lim\limits_{n\to\infty}(-a_n) = -\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

4) Aplicând teorema II.10, 2°, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+2n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2-2n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{-n^2-2n} = 0$.

Stabilim un alt rezultat important, care se enunță, pe scurt, spunând că „inegalitățile se păstrează prin trecere la limită".

TEOREMA II.11. Dacă $(a_n)_{n\geqslant 0}$ și $(b_n)_{n\geqslant 0}$ sunt șiruri de numere reale având limită și dacă $a_n \leqslant b_n$ pentru orice $n \geqslant N$ (N fiind un număr natural fixat), atunci

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim_{n\to\infty} b_n. \tag{8}$$

Demonstrație. Fie $a_n \to a$, $b_n \to b$ (în $\overline{\mathbf{R}}$). Avem de arătat că $a \leqslant b$. Dacă, prin absurd, am avea $b < a$, atunci este ușor de văzut că există vecinătăți disjuncte V_1, V_2 ale punctelor b și respectiv a, astfel încât $x < y$ pentru orice $x \in V_1$, $y \in V_2$ (fig. II.15). Deoarece $b_n \to b$, termenii șirului $(b_n)_{n\geqslant 0}$ sunt situați în V_1 de la un rang N_1 încolo și, similar, $a_n \in V_2$ pentru orice $n \geqslant N_2$, cu N_2 convenabil. Notăm $M = \max(N, N_1, N_2)$. Dacă $n \geqslant M$, atunci rezultă $n \geqslant N_1$, $n \geqslant N_2$, deci $a_n \in V_2$ și $b_n \in V_1$, deci $b_n < a_n$. Pe de altă parte, deoarece $n \geqslant M$, rezultă $n \geqslant N$, deci $a_n \leqslant b_n$ și se ajunge la o contradicție.

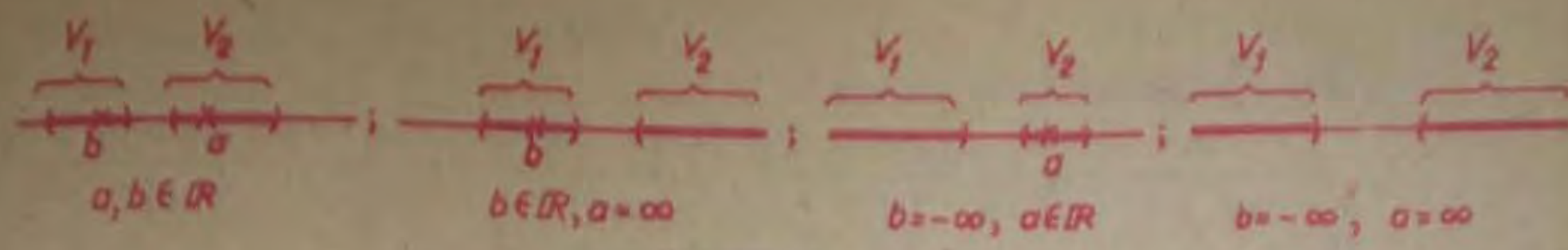


Fig. 11.15

Observaţie. Dacă în enunţul teoremei 11.11 se presupune $a_n < b_n$ pentru orice $n \geqslant N$, atunci la limită se obţine tot inegalitatea (8), nestrictă şi nu o inegalitate strictă $\left(\text{de exemplu, avem } \frac{1}{n} < \frac{2}{n} \text{ pentru orice } n \geqslant 1 \text{ şi totuşi } \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n}\right)$.

TEOREMA II.12. („a cleştelui"). Presupunem că $(a_n)_{n\geqslant 0}$, $(b_n)_{n\geqslant 0}$, $(c_n)_{n\geqslant 0}$ sunt trei şiruri de numere reale astfel încât $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ pentru orice $n \geqslant N$ (N fiind un rang fixat). Dacă $a_n \to l$, $c_n \to l$, atunci şirul $(b_n)_{n\geqslant 0}$ are limită şi aceasta este egală cu l.

Demonstraţie. Presupunem că $l \in \mathbf{R}$. Conform ipotezei $0 \leqslant b_n - a_n \leqslant c_n - a_n$. Dar şirul $(c_n - a_n)_{n\geqslant 0}$ este convergent, conform corolarului teoremei II.8, şi, în plus, $\lim\limits_{n\to\infty} (c_n - a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} c_n - \lim\limits_{n\to\infty} a_n = l - l = 0$. Aplicând corolarul 2 al teoremei II.4, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$, deci şirul $b_n = (b_n - a_n) + a_n$ converge către $0 + l = l$.

Dacă $l = \infty$, atunci din faptul că $a_n \to \infty$, rezultă că $b_n \to \infty$ şi dacă $l = -\infty$, atunci din faptul că $c_n \to -\infty$ şi $b_n \leqslant c_n$, rezultă că $b_n \to -\infty$.

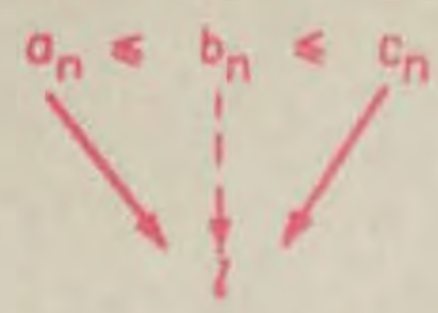


Fig. 11.16

EXERCIŢII (capitolul II, § 3)

1. Să se arate că pentru $a_n \to a$, $b_n \to b$, $(a, b \in \mathbf{R})$, avem

$$\frac{a_n + b_n}{2} \to \frac{a + b}{2} \text{ şi } a_n^2 + b_n^2 \to a^2 + b^2.$$

2. Fie $(a_n)_{n\geqslant 0}$, $(b_n)_{n\geqslant 0}$, două şiruri de numere, primul fiind convergent către zero şi al doilea fiind mărginit. Să se arate că şirul $(a_n b_n)_{n\geqslant 0}$ este convergent către zero.

3. Să se arate că dacă $(a_n)_{n\geqslant 0}$ este un şir convergent către un număr nenul, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$. Să se dea un exemplu de şir $(a_n)_{n\geqslant 0}$ astfel încât limita $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ să existe şi să fie diferită de 1.

4. Se consideră şirul $c_n = \dfrac{2n^2 + 7n - 10}{5n^2 + 1}$, $n \geqslant 1$. Să se determine două şiruri $a_n \to 2$, $b_n \to 5$ astfel încât $c_n = \dfrac{a_n}{b_n}$ pentru orice $n \geqslant 1$ şi apoi să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$.

5. Să se calculeze limitele de șiruri:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{2n^2+7}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^3+100}{2n^3+3}$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3+4}$; d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4-(n-1)^4}{n^3}$.

6. Să se arate că $\forall p \geqslant 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1^p+2^p+\ldots+n^p} = 1$.

7. Să se arate că pentru orice $l \in \overline{\mathbf{R}}$ există șiruri:

1°. $a_n \to 0$, $b_n \to 0$, astfel încât $\frac{a_n}{b_n} \to l$.

2°. $a_n \to \infty$, $b_n \to \infty$, astfel încât $a_n - b_n \to l$.

3°. $a_n \to 0$, $b_n \to \infty$, astfel încât $a_n b_n \to l$.

§ 4. Calculul limitelor de șiruri

În acest paragraf vor fi studiate câteva șiruri mai des întâlnite și va fi dată noțiunea de serie, care este strâns legată de cea de șir. O atenție deosebită va fi acordată introducerii numărului e, precum și sublinierii unor aspecte algoritmice.

4.1. Câteva șiruri-tip

a) *Șirul* $(q^n)_{n\geqslant 0}$. Fie q un număr real fixat și $a_n = q^n$, $\forall n \in \mathbf{N}$. Dacă $q = 1$, atunci $a_n \to 1$, iar dacă $q > 1$, atunci $q = 1 + b\,(b > 0)$ și $q^n = (1 + b)^n \geqslant 1 + nb$, deci $a_n \to \infty$. Dacă $q \leqslant -1$, atunci șirul este divergent. În sfârșit, dacă $-1 < q < 1$, notăm $c_n = |q|^n$, $n \geqslant 0$. Acest șir este atunci mărginit ($0 \leqslant c_n \leqslant 1$) și, fiind monoton descrescător, el este convergent. Notăm $l = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$; din relația $c_{n+1} = |q|\,c_n$ se obține, la limită, $l = |q|\,l$, deci $l = 0$.

În concluzie, am demonstrat următoarea

TEOREMA II.13. Șirul $(q^n)_{n\geqslant 0}$ este convergent dacă și numai dacă $-1 < q < 1$. În plus,

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, \text{ dacă } -1 < q < 1. \\ 1, \text{ dacă } q = 1. \end{cases}} \tag{9}$$

(Această limită este egală cu $+\infty$, dacă $q > 1$ și nu există în cazul $q \leqslant -1$.)

Exemple

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{40}{41}\right)^n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{41}{40}\right)^n = \infty$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(-3)^n$ nu există; apoi $\lim\limits_{n\to\infty} 1{,}00001^n = \infty$ și $\lim\limits_{n\to\infty} 0{,}99999^n = 0$.

b) Șirul $(P(n))_{n\geq 0}$, cu P *funcție reală polinomială*.

Presupunem că $P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este o funcție polinomială de grad $k \geq 1$, cu coeficienți reali, $P(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \ldots + a_{k-1}x + a_k$, $a_0 \neq 0$.

Se poate considera atunci șirul

$$P(n) = a_0n^k + a_1n^{k-1} + \ldots + a_{k-1}n + a_k,\ n \geq 0.$$

Evident, pentru orice $n \geq 1$, avem $P(n) = n^k \cdot c_n$, unde

$$c_n = a_0 + \frac{a_1}{n} + \ldots + \frac{a_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{a_k}{n^k}.$$

Conform teoremelor II.8—II.10, avem $c_n \to a_0$, deci

$$\lim_{n\to\infty} P(n) = \lim_{n\to\infty} n^k \cdot c_n = \begin{cases} \infty, & \text{dacă } a_0 > 0 \\ -\infty, & \text{dacă } a_0 < 0. \end{cases}$$

Pe de altă parte, se observă că

$$\lim_{n\to\infty} a_0n^k = \begin{cases} \infty, & \text{dacă } a_0 > 0 \\ -\infty, & \text{dacă } a_0 < 0. \end{cases}$$

Așadar, *limita* $\lim\limits_{n\to\infty} P(n)$ *este egală cu limita termenului de grad maxim*, a_0n^k, *al lui* $P(n)$ și este $+\infty$ sau $-\infty$, după cum coeficientul a_0 este pozitiv sau negativ. Am presupus P de grad cel puțin 1. Dacă P este de grad 0, adică o constantă k, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} P(n) = k$.

Exemple

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2 - 100\,000n) = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}(-n^3 + 10^4 \cdot n) = \lim\limits_{n\to\infty}(-n^3) = -\infty$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^2 - (n-1)^2] = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^2 - n^2 - 2n] = 1$.

c) *Șirul* $\left.\frac{P(n)}{Q(n)}\right)_{n\geq 0}$ *cu* P, Q *funcții reale polinomiale*. Se consideră două funcții polinomiale $P, Q : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definite prin

$$P(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \ldots + a_{k-1}x + a_k,\ a_0 \neq 0,\ k \geq 1,$$

$$Q(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m,\ b_0 \neq 0,\ m \geq 1.$$

Fie N un număr natural mai mare decât orice rădăcină reală a lui Q. Atunci, pentru orice $n > N$, avem

$$\frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{n^k\left(a_0 + \frac{a_1}{n} + \ldots + \frac{a_k}{n^k}\right)}{n^m\left(b_0 + \frac{b_1}{n} + \ldots + \frac{b_m}{n^m}\right)}.$$

Dacă $k = m$, atunci, deoarece cele două paranteze tind către a_0 şi respectiv b_0, pentru $n \to \infty$ rezultă

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{a_0}{b_0} \text{ (raportul coeficienţilor termenilor de grad maxim).}$$

Dacă $k < m$, atunci

$$\frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{1}{n^{m-k}} \cdot \frac{a_0 + \frac{a_1}{n} + \dots + \frac{a_k}{n^k}}{b_0 + \frac{b_1}{n} + \dots + \frac{b_m}{n^m}} \to 0 \cdot \frac{a_0}{b_0} = 0.$$

Dacă $k > m$, atunci

$$\frac{P(n)}{Q(n)} = n^{k-m} \cdot \frac{a_0 + \frac{a_1}{n} + \dots + \frac{a_k}{n^k}}{b_0 + \frac{b_1}{n} + \dots + \frac{b_m}{n^m}} \to \infty \cdot \frac{a_0}{b_0} = \infty.$$

Aşadar, am demonstrat următoarea

TEOREMA II. 14. Dacă P, Q sunt funcţii polinomiale ca mai sus, atunci

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \begin{cases} 0, \text{ dacă } gr\ P < gr\ Q \\ \infty, \text{ dacă } gr\ P > gr\ Q \text{ şi } a_0 b_0 > 0 \\ -\infty, \text{ dacă } gr\ P > gr\ Q \text{ şi } a_0 b_0 < 0 \\ \frac{a_0}{b_0}, \text{ dacă } gr\ P = gr\ Q. \end{cases}} \tag{10}$$

Exemple

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+1}{2n^2+5} = \dfrac{1}{2}$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^3-100}{2n^3+n^2-72} = \dfrac{5}{2}$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3-n^2}{n^3+n+10} = 1$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n^2+1} = 0$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^3+(n-1)^3}{n^3} = \infty$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^3-(n-1)^3}{n^3} = 6$.

4.2. Şiruri definite prin recurenţă

Până acum am considerat şiruri pentru care termenul general a fost indicat explicit. Există situaţii în care este indicată doar posibilitatea de a calcula, pentru fiecare n, termenul de rang n, în funcţie de termenii anteriori. Mai precis, presupunem că pentru un şir $(a_n)_{n\geq 0}$ se cunosc termenii $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$ ($k \geq 1$ fixat) şi, în plus, a_n este exprimat în funcţie de termenii anteriori $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-k}$, pentru orice $n \geq k$. În acest caz, se spune că şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ *este definit prin recurenţă cu k termeni* (recurrere=a se întoarce, lat.). Cazurile cele mai întâlnite sunt $k = 1$ şi $k = 2$. Pentru unele calcule făcute cu ajutorul calculatorului şirurile definite prin recurenţă prezintă avantaje nete.

Exemple

1) O progresie aritmetică cu primul termen a_1 şi raţia r este un şir $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin recurenţă cu un termen prin relaţia $a_n = a_{n-1} + r$, $\forall n \geq 2$. Se ştie, dar se demonstrează şi direct, că $a_n = a_1 + (n-1)r$, $\forall n \geq 1$.

În mod similar, progresia geometrică cu primul termen a_1 şi raţia q este şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin recurenţă cu un termen prin relaţia $a_n = a_{n-1} \cdot q$, $\forall n \geq 2$ (a_1, q fiind date); în acest caz, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, $n \geq 1$.

2) Dăm un exemplu foarte important de şir definit prin recurenţă cu doi termeni, anume şirul $(f_n)_{n\geq 0}$ al lui L. Fibonacci (1170–1240), dat prin

$$f_0 = 1,\ f_1 = 1,\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ pentru orice } n \geq 2.$$

Aşadar, $f_0 = 1$, $f_1 = 1$, $f_2 = f_1 + f_0 = 2$, $f_3 = f_2 + f_1 = 3$, $f_3 = 5$ etc. Pentru a obţine o altă exprimare a lui f_n se poate proceda astfel: se caută numere reale α, β, u, $v (u \neq v)$ astfel încât

$$f_n = \alpha u^n + \beta v^n, \text{ pentru orice întreg } n \geq 0$$

(adică, scriind f_n ca suma termenilor generali a două progresii geometrice). Condiţia $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ devine $\alpha u^n + \beta v^n = \alpha u^{n-1} + \beta v^{n-1} + \alpha u^{n-2} + \beta v^{n-2}$, adică $\alpha u^{n-2}(u^2 - u - 1) + \beta v^{n-2}(v^2 - v - 1) = 0$, $\forall n \geq 2$. Se observă că această condiţie este îndeplinită dacă u, v sunt rădăcinile ecuaţiei $x^2 - x - 1 = 0$, de exemplu $u = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $v = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Atunci $f_n = \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$, $\forall n \geq 2$ şi rămâne să determinăm α, β ca această relaţie să aibă loc pentru $n = 0$, $n = 1$, folosind condiţiile $f_0 = 1$, $f_1 = 1$. Se obţin $\alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}$, $\beta = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$ şi, în final,

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right],\ \forall n \geq 0.$$

Evident, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = +\infty$.

3) Ideea de recurenţă este legată de cea de algoritm ca procedeu efectiv de calcul pas cu pas şi este utilizată sistematic în programarea pe calculator. Dăm un exemplu de calcul al rădăcinii dintr-un număr, printr-o relaţie de recurenţă neliniară.

Fie $a > 0$ un număr real fixat şi $(x_n)_{n\geq 0}$ şirul definit prin relaţia de recurenţă

$$x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right),\ \forall n \geq 1\ (x_0 > 0 \text{ fiind presupus cunoscut}).$$

Este evident că $x_n > 0$, pentru orice $n \geq 1$. Apoi, $x_n^2 - a \geq 0$, pentru orice $n \geq 1$, deoarece $x_n^2 - a = \frac{1}{4}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right)^2 - a = \frac{1}{4}\left(a_{n-1} - \frac{a}{x_{n-1}}\right)^2 \geq 0$; de aici se deduce că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este monoton descrescător, deoarece $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) - x_n = \frac{1}{2x_n}(a - x_n^2) \leq 0$, pentru orice $n \geq 1$. Aşadar, şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este monoton şi mărginit şi, ca atare, există $l = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Deoarece $x_n > 0$ şi $x_n^2 \geq a$, rezultă $l > 0$. Din relaţia iniţială de recurenţă, se obţine

$$l = \left(\frac{l}{2}\ l + \frac{a}{l}\right),\ \text{adică } l^2 = a,\ l = \sqrt{a},\ \text{deci } x_n \to \sqrt{a}.$$

De exemplu, pentru calculul aproximativ al lui $\sqrt{2}$ se poate considera algoritmul definit prin $x_0 = 1$ şi $x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}\right)$, $n \geqslant 2$. În acest caz, $x_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{1}\right) = \frac{3}{2} = 1{,}5$; $x_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}\right) = \frac{17}{12} \simeq 1{,}4167$; $x_3 \simeq 1{,}4142$ etc. şi deja după trei paşi se obţine valoarea lui $\sqrt{2}$ cu trei zecimale exacte.

4.3. Serii de numere reale

Dacă q este un număr real şi $q \neq 1$, atunci

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, \tag{11}$$

aşa cum se verifică imediat prin inducţie după n.

Dacă $(a_n)_{n \geqslant 1}$ este o progresie geometrică, având primul termen a_1 şi raţia $q \neq 1$ şi dacă se notează cu s_n suma primilor n termeni ai acestei progresii, atunci

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1} =$$

$$= a_1(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}) = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}, \text{ aplicând (11).}$$

În cazul când $q = 1$, avem $s_n = n \cdot a_1$.

Dacă $-1 < q < 1$, atunci $q^n \to 0$ (cf. teoremei II.13) şi, ca atare,

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \frac{a_1}{1 - q}.$$

Această relaţie se mai scrie sugestiv

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \frac{a_1}{1 - q} \text{ (pentru } -1 < q < 1).$$

Situaţia descrisă mai sus se generalizează în modul următor.

Considerăm un şir $(a_n)_{\geqslant 0}$ de numere reale. Atunci se poate defini un nou şir $(s_n)_{n \geqslant 0}$ punând $s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$, numit *şirul sumelor parţiale asociat şirului* $(a_n)_{n \geqslant 0}$.

Aşadar,

$$s_0 = a_0,\ s_1 = a_0 + a_1,\ s_2 = a_0 + a_1 + a_2 \text{ etc.}$$

De exemplu, dacă $a_n = q^n$ $(n \geqslant 0)$, atunci $s_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n$, adică suma (11), iar dacă $a_n = n$ $(n \geqslant 0)$, atunci

$$s_n = 0 + 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

DEFINIȚIA II.5. Se numește serie de termen general a_n perechea de șiruri $(a_n)_{n\geq 0}$, $(s_n)_{n\geq 0}$, unde $s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$.

Această serie se notează $\sum_{n\geq 0} a_n$ sau $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$. Se definește, în mod similar, seria $\sum_{n\geq N} a_n = a_N + a_{N+1} + a_{N+2} + \ldots$.

Exemple

1) Seria de termen general q^n, adică $\sum_{n\geq 0} q^n = 1 + q + q^2 + \ldots$, se numește *seria geometrică* de rație q.

2) Seria de termen general $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$, adică $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$, se numește *seria armonică* (denumirea fiind justificată prin aceea că $a_n = \frac{1}{n}$ este media armonică a numerelor a_{n-1} și a_{n+1}, adică $\frac{2}{a_n} = \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}$, $\forall\, n \geq 2$).

3) Considerăm seria $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+n}$ de termen general $a_n = \frac{1}{n^2+n}$, $n \geq 1$. Se observă că $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ deci $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$, $n \geq 1$. Evident, $s_n \to 1$.

Este incorectă afirmația „seria este o sumă infinită", pentru că nu se pot aduna o infinitate de numere reale, de aceea este necesară noțiunea de limită. Se poate însă spune că studiul seriilor se află la confluența studiului sumelor finite cu cel al limitelor de șiruri.

DEFINIȚIA II.6. O serie $\sum_{n\geq 0} a_n$ se numește convergentă dacă șirul $(s_n)_{n\geq 0}$ al sumelor ei parțiale este convergent; în acest caz, numărul $\lim_{n\to\infty} s_n$ se numește suma acelei serii și se notează cu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Seriile care nu sunt convergente se numesc divergente.

Este evident că dacă la o serie se adaugă sau se scad termeni în număr finit, atunci natura acelei serii nu este modificată. Problema principală a teoriei seriilor este studiul naturii acestora (convergența sau divergența), iar în caz de convergență, calculul exact sau aproximativ al sumelor.

TEOREMA II.15. Fie q, a $(a \neq 0)$ numere reale. Seria geometrică $\sum_{n\geq 0} aq^n = a + aq + aq^2 + \ldots$ este convergentă dacă și numai dacă $-1 < q < 1$ și, în acest caz, suma ei este $\frac{a}{1-q}$.

Demonstrație. Șirul numerelor parțiale este $s_n = a + aq + \ldots + aq^n$, $n \geq 0$. Dacă $q = 1$, atunci $s_n = (n+1)a$ și seria este evident divergentă. Dacă

$q \neq 1$, atunci $s_n = a(1 + q + \ldots + q^n) = a\,\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$, conform (11). Aplicând relaţia (9), şirul $(s_n)_{n \geq 0}$ este convergent dacă şi numai dacă $-1 < q < 1$ şi, în acest caz, $\lim\limits_{n \to \infty} q^{n+1} = 0$, deci $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = \frac{a}{1 - q}$.

Exemple

1) În cazul seriei geometrice $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$ raţia este $q = \frac{1}{2}$ şi suma seriei va fi $\dfrac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$.

2) Fracţia zecimală periodică 2,1919 ... reprezintă numărul

$$2 + \frac{1}{10} + \frac{9}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{9}{10\,000} + \ldots = 2 + \frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{100}} + \frac{\frac{9}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = 2 + \frac{19}{99}.$$

Se arată uşor că orice fracţie zecimală periodică reprezintă un număr raţional (şi reciproc).

4.4. Numărul e

La punctul 1.1 am indicat legea de înjumătăţire a unei substanţe radioactive, în care s-a evidenţiat o progresie geometrică de raţie $\frac{1}{2}$. Există şi alte „legi de creştere" similare. De exemplu, presupunem că populaţia unei colectivităţi este, la un moment dat, P şi că în fiecare an ea creşte cu $c\%$. Peste un an populaţia respectivă va fi $P_1 = P + P \cdot \frac{c}{100} = P\left(1 + \frac{c}{100}\right)$, peste doi ani $P_2 = P_1 + P_1 \cdot \frac{c}{100} = P_1\left(1 + \frac{c}{100}\right) = P\left(1 + \frac{c}{100}\right)^2$, iar peste n ani, $P_n = P \cdot \left(1 + \frac{c}{100}\right)^n$, aşa cum se verifică prin inducţie.

Notând

$$E_c = \left(1 + \frac{c}{100}\right)^{\frac{100}{c}}, \text{ rezultă}$$

$$P_n = P\left(1 + \frac{c}{100}\right)^{\frac{100}{c}\,\frac{cn}{100}} = P \cdot (E_c)^{\frac{cn}{100}}.$$

Dacă $c = 100$, atunci $E_c = (1 + 1)^1 = 2$; $c = 50$, $E_c = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2{,}250$; $c = 10$, $E_c \simeq 2{,}594$; $c = 2$, $E_c \simeq 2{,}692$ etc.

Vom vedea că limita $\lim\limits_{c \to 0} E_c$ există şi are o valoare remarcabilă, anume numărul e. Atunci pentru c „suficient de mic" are loc formula aproximativă $E_c \simeq e$ şi, în consecinţă,

$$P_n \simeq P \cdot e^{\frac{cn}{100}}$$

De exemplu, dacă $c = 2$, atunci peste 50 de ani populaţia va deveni $P_{50} \simeq P \cdot e$. Există multe alte probleme în rezolvarea cărora se foloseşte numărul e.

Trecem la definiția numărului e.

Considerăm șirul de numere raționale

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \ n \geqslant 1. \tag{12}$$

Se pot calcula diverși termeni ai acestui șir: $e_1 = 2$, $e_2 = 2{,}250$, $e_4 \simeq 2{,}441$, $e_8 \simeq 2{,}566$, $e_{16} \simeq 2{,}638$ etc. și aceasta sugerează că șirul $(e_n)_{n \geqslant 1}$ este crescător, cu termenii cuprinși între 2 și 3. Într-adevăr, are loc

TEOREMA II.16. Șirul $(e_n)_{n \geqslant 1}$ este strict crescător și mărginit (deci convergent).

Demonstrație. Considerăm formula binomului lui Newton

$$(1 + x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}x^k + \ldots$$

$$\ldots + \frac{n(n-1)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1}{n!}x^n, \ \forall x \in \mathbf{R}, \ n \geqslant 1.$$

Înlocuind aici $x = \frac{1}{n}$, membrul stâng este egal cu e_n; observând că

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right),$$

pentru $1 \leqslant k \leqslant n$, rezultă că

$$e_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots$$

$$\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \tag{13}$$

Înlocuim n cu $n+1$ și rezultă

$$e_{n+1} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \ldots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\ldots$$

$$\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) + \ldots + \frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1 - \frac{n}{n+1}\right);$$

observând că $\frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) < \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right)$,

se obține că $e_n < e_{n+1}$ $\forall$, $n \geqslant 1$.

Din relația (13) rezultă direct că

$$2 \leqslant e_n \leqslant 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{k!} + \ldots + \frac{1}{n!}, \ \forall n \geqslant 1. \tag{14}$$

Ținând cont că, pentru orice $k \geqslant 2$ natural, avem $k! \geqslant 2^{k-1}$, deci $\frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{2^{k-1}}$, avem

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} \leqslant 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) < 3. \tag{15}$$

Din relațiile (14) și (15) rezultă $2 \leqslant e_n < 3$, $\forall n \geqslant 1$ și teorema este demonstrată.

DEFINIȚIA II. 7. Limita șirului $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ se notează cu e (după inițiala numelui lui L. Eúler, 1707—1783).

Indicăm acum un alt șir convergent către e, anume șirul

$$E_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}, \quad n \geqslant 1.$$

Este evident că $E_n < E_{n+1}$, deoarece $E_{n+1} - E_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$. Apoi, aplicând (15), avem $2 < E_n < 3$, $\forall n \geqslant 1$. Așadar, șirul $(E_n)_{n \geqslant 1}$ este monoton și mărginit, deci convergent. Fie $E = \lim\limits_{n \to \infty} E_n$.

Deoarece $e_n \leqslant E_n$, conform (14), rezultă $e \leqslant E$.

Pe de altă parte, pentru orice $k \geqslant 2$ fixat și pentru orice $n > k$ avem, conform (13):

$$e \geqslant e_n > 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

și în membrul drept se însumează $k + 1$ termeni. Făcând $n \to \infty$ și observând că paranteze le $\left(1 - \frac{1}{n}\right), \dots, \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$ tind către 1, rezultă că $e \geqslant E_k$, $\forall k \geqslant 2$ fixat, deci $e \geqslant \lim\limits_{k \to \infty} E_k = E$. În concluzie $E = e$, adică

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right).$$

Cu alte cuvinte, am demonstrat

TEOREMA II. 17. Seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots$ este convergentă și are suma e.

Aplicație. Calculăm e cu $\frac{1}{10^8}$ – aproximare. Deoarece $e = \lim\limits_{n \to \infty} E_n$ avem formula aproximativă $e \simeq E_n$, cu eroarea absolută: $|e - E_n| = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \dots = \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots\right] \leqslant \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots\right] = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} = \frac{n+2}{(n+1)!(n+1)} < \frac{1}{n \cdot n!}$.

Reținem astfel inegalitatea

$$0 < e - E_n < \frac{1}{n \cdot n!}, \quad \forall n \geqslant 1. \tag{16}$$

Alegem n natural minim astfel încât $\frac{1}{n \cdot n!} > 10^{-8}$, deci $n = 9$. Atunci

$$e \simeq E_9 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{9!} = 2{,}71828.$$

EXERCIȚII (capitolul II; § 4)

1. Să se calculeze limitele următoare:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n}{4^n}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n+1}{3^n+2}$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n+1}{4^n+1}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4^n+1}{4^{n-1}+2}$; e) $\lim\limits_{n\to\infty} n[2+(-1)^n]$; f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n+(-2)^n}{3^n}$;

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin^n \frac{\pi}{10}$; h) $\lim\limits_{n\to\infty} \cos^n \frac{\pi}{10}$; i) $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{tg}^n \frac{\pi}{4}$;

j) $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{tg}^n \frac{\pi}{3}$; k) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2+1}$; l) $\lim\limits_{n\to\infty} (n^2-\sqrt{n})$;

m) $\lim\limits_{n\to\infty} (-n^2+n+100)$; n) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[3]{n^6+1}-n^2)$; o) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{6n^2+5n}{3n^2+2}$;

p) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{3n^2-8}$; q) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4-(n-1)^4}{n^4}$;

r) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(1+2+\ldots+n)}{1^2+2^2+\ldots+n^2}$; s) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}$;

t) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n}{n^2}\right)$; u) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(10+\frac{1}{n}\right)^2$;

v) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(10+\frac{1}{n}\right)^n$; w) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^3+2}}$;

y) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n-1}{a^{2n}+1}$, $a \neq -1$; z) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^{2n}-1}{a^{2n}+1}$, $a \in \mathbf{R}$ dat.

2. Să se arate că pentru orice funcție rațională nenulă **R** cu coeficienți reali, avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R(n)}{R(n+1)} = 1.$$

3. Să se studieze convergența șirului

$$a_n = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right), \quad n \geq 2.$$

4. Să se afle $a, b, c \in \mathbf{R}$, astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} n(an-\sqrt{-2+bn+cn^2}) = 1$.

5. Fie un șir $(x_n)_{n\geq 0}$, astfel încât $x_0 = a$, $x_{n+1} = 1 + bx_n$ $(n \geq 0)$. Să se arate că $x_n = 1 + b + \ldots + b^{n-1} + ab^n$. Pentru ce $a, b \in \mathbf{R}$ șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent?

6. Să se studieze mărginirea și monotonia șirului $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$, $n \geq 1$. În caz de convergență, să se calculeze limita.

7. Fie a_0, a_1 date și $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1}+a_{n-2})$ pentru orice $n \geq 2$. Să se arate că $a_n = \frac{1}{3}(2a_1+a_0) + \frac{(-1)^{n-1}}{3\cdot 2^{n-1}}(a_1-a_0)$, $\forall\, n \geq 0$ și să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

8. Fie șirul $(x_n)_{n\geq 1}$, unde $x_1 = a$ și $x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2$. Să se arate că dacă $a \in [1, 2]$, atunci șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent și să se calculeze limita sa.

9. Să se studieze monotonia şi convergenţa şirului $(c_n)_{n\geq 1}$ definit prin $c_1 = 10$, $c_{n+1} = \frac{2 + c_n^2}{2c_n}$, $\forall n \geq 1$. De asemenea, studiaţi convergenţa şirului $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin $x_0 = 1$ şi $x_{n+1} = \frac{x_n}{\sqrt{x_n^2 + 1}}$, $n \geq 0$.

10. Să se arate că dacă $a_n > 0$, $n \geq 0$, dacă există $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ şi $l < 1$, atunci $a_n \to 0$. Folosind acest fapt, să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2^n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!}$, $\lim\limits_{n\to\infty} nq^n (-1 < q < 1$ dat)

11. Să se arate că seriile următoare sunt convergente şi să se calculeze sumele lor:

a) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{4n^2 - 1}$; b) $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{n^2 + n}$; c) $\sum\limits_{n\geq 1} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$;

d) $\sum\limits_{n\geq 1} \left(\frac{2}{3}\right)^n$; e) $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{2}{7^{n+2}}$; f) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{2n+1}{n!}$.

12. Să se arate că seria $\sum\limits_{n\geq 1} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}} - \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}\right)$ este convergentă, iar seria $\sum\limits_{n\geq 1} (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n})$ este divergentă.

§ 5. Operaţii cu limite de funcţii

Rezultatele anterioare conduc la rezultate similare pentru limite de funcţii.

TEOREMA II. 18. Fie $f : D \to \mathbf{R}$, $g : D \to \mathbf{R}$ $(D \subset \mathbf{R})$ două funcţii şi $\alpha \in \overline{\mathbf{R}}$ un punct de acumulare pentru D. Presupunem că f şi g au limită finită în punctul α şi fie $l_1 = \lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$, $l_2 = \lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$. Atunci funcţiile $f + g$, $\lambda f (\lambda \in \mathbf{R})$ şi fg au limită finită în punctul α şi

$$\lim_{x\to\alpha} [(f+g)(x)] = l_1 + l_2, \quad \lim_{x\to\alpha} (\lambda f)(x) = \lambda l_1, \quad \lim_{x\to\alpha} (fg)(x) = l_1 l_2 \tag{17}$$

(pe scurt, limita sumei este suma limitelor, limita produsului este produsul limitelor).

Dacă, în plus, $l_2 \neq 0$, atunci există o vecinătate U a lui α astfel încât funcţia g să fie nenulă în $U \setminus \{\alpha\}$ şi, în plus, $\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$.

Demonstraţie. Fie $x_n \to \alpha$ un şir oarecare de puncte din $D \setminus \{\alpha\}$. Atunci $f(x_n) \to l_1$, $g(x_n) \to l_2$ şi aplicând relaţiile (5), (6), rezultă că $(f+g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) \to l_1 + l_2$, $(\lambda f)(x_n) = \lambda \cdot f(x_n) \to \lambda l_1$ şi $(fg)(x_n) = f(x_n)g(x_n) \to l_1 \cdot l_2$ şi se deduc relaţiile (17).

Presupunem acum $l_2 \neq 0$, de exemplu $l_2 > 0$. Luând o vecinătate $V = (l_2 - \varepsilon, l_2 + \varepsilon)$ a lui l_2, care nu conține originea, există o vecinătate U a lui α astfel încât din faptul că $x \in U$, $x \neq \alpha$ să rezulte $g(x) \in V$, adică $g(x) > 0$. Fie apoi un șir oarecare $x_n \to \alpha$, $x_n \neq \alpha$. Atunci $f(x_n) \to l_1$, $g(x_n) \to l_2$ și aplicând corolarul teoremei II.10, rezultă $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to \frac{l_1}{l_2}$, adică $\lim\limits_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$.

Exemple

1) Deoarece $\lim\limits_{x \to 1} x^2 = 1$, $\lim\limits_{x \to 1} (2x + 7) = 9$, rezultă $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 + 2x + 7) = \lim\limits_{x \to 1} x^2 + \lim\limits_{x \to 1} (2x + 7) = 1 + 9 = 10$.

2) Teorema II.18 nu se poate aplica direct pentru a calcula limita $l = \lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, deoarece numitorul are limita nulă în punctul $x = 1$. Totuși, pentru orice $x \neq 1$, avem $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$ și, ca atare, $l = \lim\limits_{x \to 1} (x + 1) = 2$.

3) Teorema II.18 se extinde direct la cazul când $l_1, l_2 \in \overline{\mathbf{R}}$, cu condiția evitării cazurilor exceptate, care trebuie analizate separat. De exemplu, $\lim\limits_{x \to \infty} (x^2 + 2x) = \infty$. [Într-adevăr, fie $D = [0, \infty)$ și funcția $f: D \to \mathbf{R}$, definită prin $f(x) = x^2 + 2x$; pentru orice șir $x_n \to \infty$, avem $f(x_n) = x_n^2 + 2x_n \to \infty$].

4) Dacă o funcție $f: D \to \mathbf{R}$ are limita $+\infty$ sau $-\infty$ într-un punct $x = \alpha$ de acumulare pentru D, atunci $\lim\limits_{x \to \alpha} \frac{1}{f(x)} = 0$; într-adevăr, pentru orice șir $x_n \to \alpha$, $x_n \neq \alpha$ avem $f(x_n) \to +\infty$ (sau $-\infty$) și $\frac{1}{f(x_n)} \to 0$, conform teoremei II.10,2°.

În mod similar, dacă limita $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x)$ există și este egală cu zero și dacă $f > 0$ (respectiv $f < 0$) într-o vecinătate a punctului α, din care excludem α, atunci $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{f(x)} = \infty$ (respectiv $-\infty$); într-adevăr, pentru orice șir $x_n \to \alpha$, $x_n \neq \alpha$, avem $f(x_n) \to 0$ și aplicăm teorema II.10,3°.

TEOREMA II.19. Fie $f, g: D \to \mathbf{R}$ ($D \subset \mathbf{R}$) două funcții și $\alpha \in \overline{\mathbf{R}}$ un punct de acumulare pentru D. Dacă există o vecinătate U a lui α astfel încât $f \leq g$ în $U \setminus \{\alpha\}$ și dacă funcțiile f, g au limită în punctul α, atunci

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) \leq \lim_{x \to \alpha} g(x). \tag{18}$$

Demonstrație. Considerăm un șir oarecare $x_n \to \alpha$ din $D \setminus \{\alpha\}$. Avem $x_n \in U \setminus \{\alpha\}$ și $f(x_n) \leq g(x_n)$, începând de la un anumit rang N și cum șirurile $(f(x_n))_{n \geq N}$, $(g(x_n))_{n \geq N}$ au limită, atunci $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) \leq \lim\limits_{n \to \infty} g(x_n)$ conform teoremei II.11. Așadar, relația (18) este probată.

Teorema cleştelui se formulează şi pentru limite de funcţii: *dacă $f, g, h : D \to \mathbf{R}$ sunt funcţii reale astfel încât $f \leqslant g \leqslant h$ într-o vecinătate a lui α (excluzând eventual α) şi dacă f, h au aceeaşi limită l în punctul α, atunci g are, de asemenea, limita l în punctul α.* Remarcăm, de asemenea, faptul că teorema II.4 se formulează şi pentru limite de funcţii: dacă funcţiile $f, g : D \to \mathbf{R}$ $(D \subset \mathbf{R})$, satisfac condiţia $|f(x) - l| \leqslant g(x)$, $\forall x \in D \setminus \{\alpha\}$, unde $l \in \mathbf{R}$ şi dacă $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = 0$, atunci există $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = l$. Apoi dacă $f(x) \geqslant g(x)$, $\forall x \in D \setminus \{\alpha\}$ şi $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = \infty$, atunci $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \infty$, iar dacă $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = -\infty$, atunci $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = -\infty$.

EXERCIŢII (capitolul II, § 5)

1. Să se calculeze limitele laterale ale funcţiilor de mai jos în punctele indicate:

a) $f : \mathbf{R} \setminus \{-5\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{4}{x+5}$, $\alpha = -5$;

b) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x-3}}}, & \text{dacă } x \neq 3 \\ 2, & \text{dacă } x = 3 \end{cases}$, $\alpha = 3$;

c) $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2}$, $\alpha = 0$;

d) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x}{(x+1)^2}, & \text{dacă } x \neq -1 \\ 7, & \text{dacă } x = -1 \end{cases}$, $\alpha = -1$.

2. Să se calculeze (în $\overline{\mathbf{R}}$) următoarele limite de funcţii:

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^3 + 3}{x}$;

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^3 + 3}{x^2}$;

c) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{2x^2 + 3}$;

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{2x^2 + 3}$;

e) $\lim \dfrac{x^3}{2x^2 + 3}$;

f) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(x+1)^3 - x^3}{x^2}$;

g) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2}{|x - 1|}$;

h) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 2}{(x-1)^2}$;

i) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{2^{|x-1|} - 1}$;

j) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x^4 - 1}{x - 1} + \dfrac{x^8 - 1}{x^2 - 1} \right)$.

3. Fie $f : D \to \mathbf{R}$ o funcţie definită pe complementara D a unui interval mărginit. se arate că dacă una din limitele $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(-x)$ există, atunci există şi cealaltă şi sunt egale. Ca aplicaţie să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 - x)$;

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x + \sqrt{x^2 + 1})$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x^2 + 1}{7x^2 + 3}$;

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

§ 6. Asimptotele funcţiilor reale

Vom da acum o primă aplicaţie geometrică semnificativă legată de limitele de funcţii.

În limba greacă „asumptôtos" înseamnă „care nu coincid". Problema asimptotelor, adică a dreptelor care „se apropie oricât de mult" de graficele unor funcţii, are sens pentru funcţii având ramuri spre infinit (adică funcţii al căror grafic nu este conţinut într-un dreptunghi).

Fixăm un sistem ortogonal de áxe xOy relativ la care raportăm graficele funcţiilor considerate, ca şi sensul adjectivelor „orizontal", „oblic", „vertical".

6.1. Asimptote orizontale, asimptote oblice

Considerăm o funcţie $f : D \to \mathbf{R}$ unde D este un interval de forma (a, ∞), $a \in \mathbf{R}$. Graficul lui f are ecuaţia $y = f(x)$ şi evident are ramuri spre infinit. Fie $l \in \mathbf{R}$ fixat şi considerăm dreapta $y = l$ (paralelă cu Ox); pentru orice $x \in D$, notăm cu M (respectiv cu N) punctul de abscisă x situat pe dreaptă (respectiv pe graficul funcţiei f).

Se spune că dreapta $y = l$ este *asimptota orizontală spre* $+\infty$ a lui f dacă limita lungimii segmentului MN când x tinde către ∞ există şi este egală cu zero, adică

(19) $$\lim_{x \to \infty} | f(x) - l | = 0 \text{ (figura 11.17).}$$

Aceasta este echivalentă cu faptul că limita $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ există şi este egală cu l.

O discuţie similară are loc pentru $-\infty$ (fig. II.18).

Considerăm acum o dreaptă de ecuaţie $y = mx + n$, $m \neq 0$ şi fie M (respectiv N) punctul de abscisă $x \in D$ situat pe dreaptă (respectiv pe graficul funcţiei f), ca în figura II.19. Se spune că dreapta $y = mx + n$ este *asimptota oblică spre* $+\infty$ a lui f dacă limita lungimii segmentului MN există şi este egală cu zero pentru $x \to \infty$, adică

(20) $$\lim_{x \to \infty} | f(x) - mx - n | = 0$$

Aceasta revine la $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - mx - n) = 0$, adică

$$\lim_{x \to \infty} x\left(\frac{f(x)}{x} - m - \frac{n}{x}\right) = 0 \text{ şi în mod necesar, } \lim_{x \to \infty}\left(\frac{f(x)}{x} - m - \frac{n}{x}\right) = 0.$$

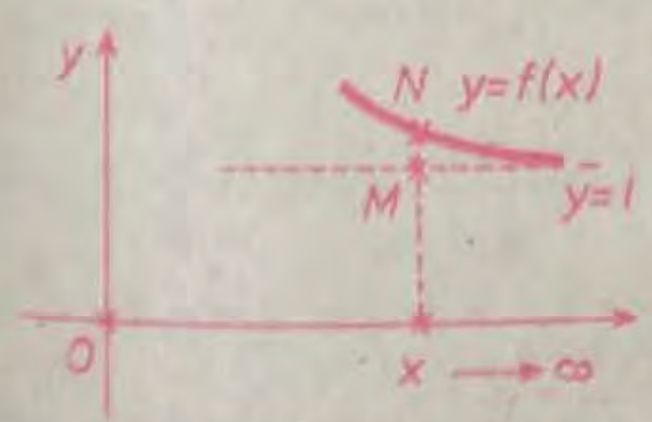


Fig. 11.17

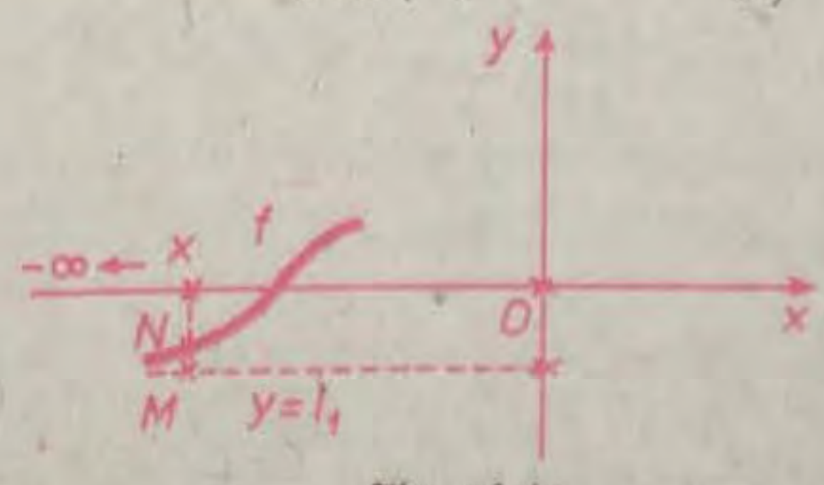


Fig. 11.18

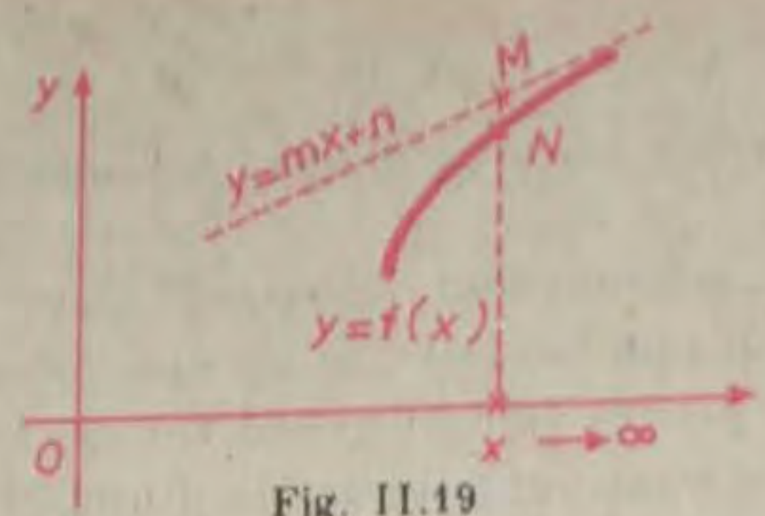


Fig. II.19

Atunci raportul $\frac{f(x)}{x} = \left(\frac{f(x)}{x} - m - \frac{n}{x}\right) + \left(m + \frac{n}{x}\right)$ va avea, conform teoremei II.18, limita egală cu $0 + m = m$ în punctul ∞. Din faptul că $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - mx - n) = 0$, rezultă direct că limita $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - mx)$ există și este egală cu n.

Rezumăm discuția anterioară în următoarea

TEOREMA II.20. a) Dacă limita $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ există și este finită, cu valoarea l, atunci dreapta $y = l$ este asimptota orizontală spre $+\infty$ a funcției f (și reciproc).

b) Dacă există și sunt finite limitele

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx), \text{ iar } m \neq 0, \tag{21}$$

atunci dreapta

$$y = mx + n \tag{22}$$

este asimptota oblică spre $+\infty$ a funcției f (și reciproc).

O funcție f nu poate admite atât asimptotă orizontală cât și asimptotă oblică spre $+\infty$ (în caz contrar ar exista constante reale m, n, l cu $m \neq 0$ astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty} (mx + n - l) = 0$, ceea ce este absurd).

Se tratează în mod similar cazul asimptotelor oblice spre $-\infty$. Remarcăm că pentru o funcție fixată pot avea loc diverse situații: să existe asimptote orizontale atât spre $-\infty$ cât și spre $+\infty$ (distincte sau nu), să existe asimptotă orizontală spre $+\infty$ și oblică spre $-\infty$ etc. Asimptotele unei funcții sunt numite uneori asimptote la graficul funcției.

Exemple

1) Funcția $f : R\setminus\{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ are asimptotă orizontală spre $+\infty$ și spre $-\infty$, anume dreapta $y = 0$ (axa Ox) (fig. II.20).

2) Funcția $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{x+3}$ are asimptotă oblică spre $+\infty$, anume dreapta $y = mx + n$, unde $m = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{2^2 + 3x} = 1$ și $n = \lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim\limits_{x\to\infty} \left[\frac{x^2}{x+3} - x\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{-3x}{x+3} = -3$; așadar, $y = x - 3$ este asimptotă oblică a

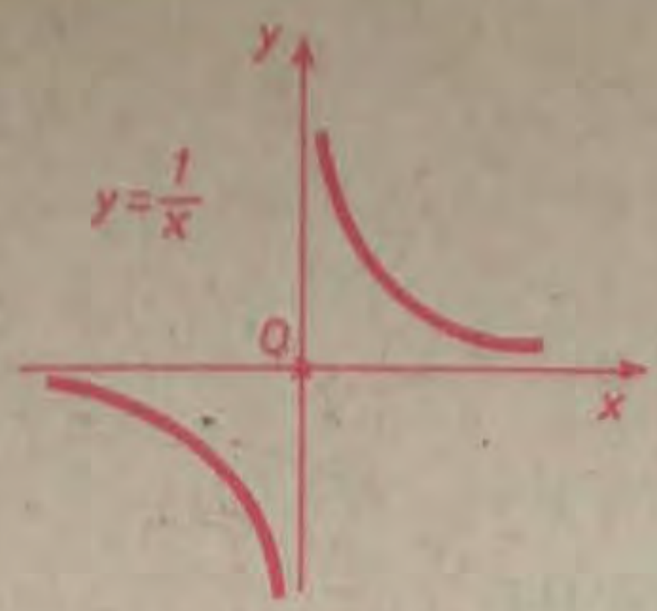


Fig. II.20

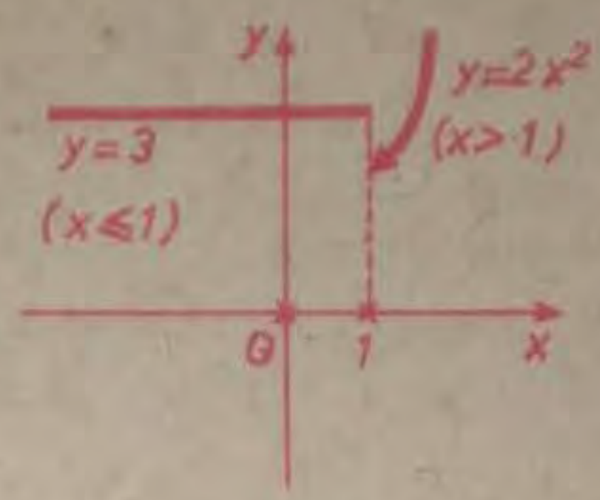


Fig. II.21

lui f spre $+\infty$. Se mai putea scrie $f(x) = x - 3 + \dfrac{9}{x+3}$, deci $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - (x-3)] = 0$ şi conform (20) şi (22) rezultă direct $y = x - 3$ etc.

3) Funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} 3x, & \text{dacă } x \leq 1 \\ 2x^2, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$ (fig. II.21), are asimptotă orizontală $y = 3$ spre $-\infty$ dar nu are asimptotă orizontală spre $+\infty$.

4) Funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2x^2$ nu are asimptote orizontale sau oblice.

5) Considerăm funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x+1}, & \text{dacă } x < -1 \\ 2, & \text{dacă } x \geq -1 \end{cases}$ Ea are asimptotă orizontală spre $+\infty$, anume $y = 2$, iar spre $-\infty$ are asimptota oblică $y = x - 1$.

6.2. Asimptote verticale

Dacă $f : D \to \mathbf{R}$ $(D \subset \mathbf{R})$ este o funcţie reală, $\alpha \in \mathbf{R}$ este un punct de acumulare pentru D şi dacă limita la stânga

(23) $\lim\limits_{\substack{x\to\alpha \\ x<\alpha}} f(x)$ există şi este egală cu $+\infty$ sau $-\infty$,

atunci se spune că dreapta $x = \alpha$ este *asimptotă verticală la stânga* a lui f. Similar, dacă limita la dreapta

(23′) $\lim\limits_{\substack{x\to\alpha \\ x>\alpha}} f(x)$ există şi este egală cu $+\infty$ sau $-\infty$,

se spune atunci că $x = \alpha$ este *asimptotă verticală la dreapta* a lui f.

Dreapta $x = \alpha$ se numeşte *asimptotă verticală* a lui f dacă ea este asimptotă verticală la stânga sau la dreapta a lui f sau de ambele părţi.

Exemple

1) Pentru funcţiile f, $g : \mathbf{R}\setminus\{1\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$, $g(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$, dreapta $x = 1$ este asimptotă verticală.

2) Funcţia $f : \mathbf{R}\setminus\{2\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x < 2 \\ \dfrac{1}{x-2}, & \text{dacă } x > 2 \end{cases}$ (fig. II.22), are $x = 2$ asimptotă verticală la dreapta, dar nu are nici o asimptotă verticală la stânga.

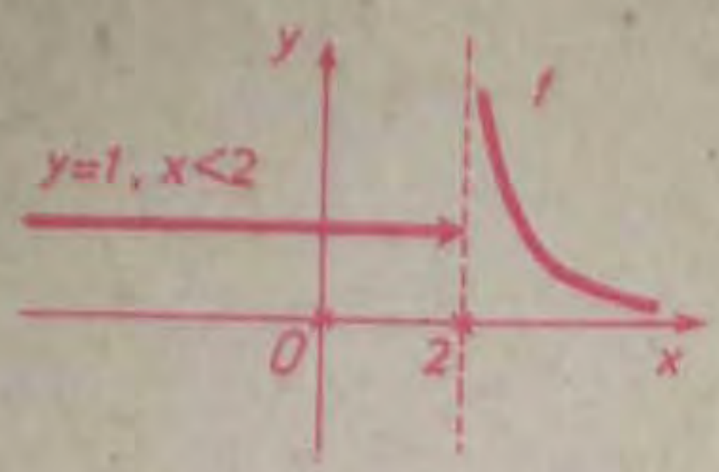


Fig. II.22

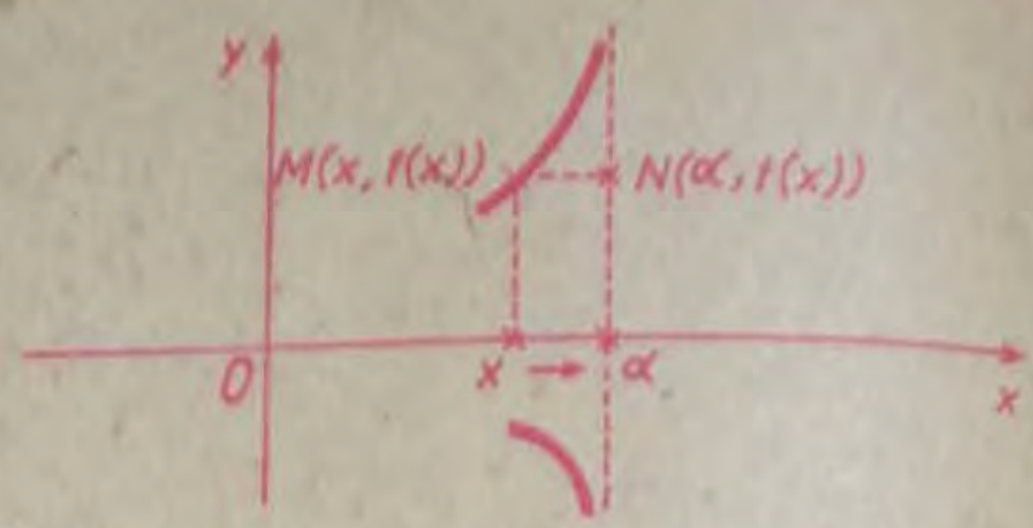


Fig. II.23

3) Fie funcţia $f : \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$. În acest caz, dreptele $x = -1$, $x = 1$ sunt asimptote verticale, iar dreapta $y = 1$ este asimptotă orizontală (spre $\pm\infty$).

4) Funcţia $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{x^5 + 2}{x^3 + x}$ are o unică asimptotă verticală, $x = 0$.

5) Pentru orice $a \in \mathbf{R}$ funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ a, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$

are asimptotă verticală $x = 0$.

Adjectivul „verticală" provine de la faptul că orice dreaptă $x = \alpha$ ($\alpha \in \mathbf{R}$ fixat) este paralelă cu axa Oy. Dacă $x = \alpha$ este asimptotă verticală la stânga pentru o funcţie f, atunci lungimea segmentului MN tinde către zero când $x \to \alpha$, $x < \alpha$, iar ordonata lui M tinde către ∞ sau $-\infty$ (figura II.23) etc.

EXERCIŢII (capitolul II, § 6)

1. Să se determine asimptotele (orizontale, oblice şi verticale) pentru următoarele funcţii $f : D \to \mathbf{R}$ (D fiind domeniul maxim de definiţie).

a) $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 + 1}$;

b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$;

c) $f(x) = \dfrac{x + 1}{(x^2 + 2x)(x^2 + 9)}$;

d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x}}$;

e) $f(x) = \dfrac{x}{|x + 1|}$;

f) $f(x) = \dfrac{|x|}{x + 2}$;

g) $f(x) = \dfrac{x}{(x - 1)(x - 5)}$;

h) $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x}$;

i) $f(x) = \dfrac{x + |x|}{x - |x|}$;

j) $f(x) = \dfrac{(x + 1)^2}{x^2}$;

k) $f(x) = \dfrac{x^2}{|x - 1|}$;

l) $f(x) = \dfrac{(x^2 - 1)^2}{(x - 1)^2}$, $x \neq 1$; $f(1) = 5$.

2. Să se afle numerele reale a, b dacă dreapta $y = 2x + 3$ este asimptotă spre $+\infty$ pentru funcţiile $f : D \to \mathbf{R}$ (D – domeniul maxim de definiţie) următoare:

a) $f(x) = \dfrac{2x^2 + ax + b}{x + 1}$; b) $f(x) = \dfrac{x + |x^2 - 1|}{ax + b}$; c) $f(x) = \dfrac{4x^3 + ax^2 + 1}{bx + 1}$.

3. Să se indice o funcţie reală având ca asimptote toate dreptele $x = k$, $k \in \mathbf{Z}$.

4. Să se afle $a, b, c \in \mathbf{R}$ astfel încât $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + 2}{x^2 + 2x + c}$ să aibă o unică asimptotă verticală, iar graficul lui f să nu intersecteze asimptota orizontală.

§ 7. Calculul limitelor de funcţii

Acest paragraf este foarte important. În cea mai mare parte, ne vom ocupa de studiul unor funcţii importante, care apar în descrierea matematică a multor procese din natură. În capitolul I, 5.5 am dat o sinteză a acestor funcţii studiate în clasele anterioare şi acum ne ocupăm de proprietăţile acestora în legătură cu noţiunea de limită.

7.1. Limitele unor funcţii uzuale

a) *Funcţii polinomiale.* Este evident că $\forall\, \alpha \in \mathbf{R}$, $\lim\limits_{x\to\alpha} x = \alpha$ şi $\lim\limits_{x\to\alpha} cx^k = c\alpha^k$, $c \in \mathbf{R}$, $k \geqslant 1$ întreg (limita unui produs finit fiind produsul limitelor). Rezultă atunci că pentru orice funcţie polinomială reală P şi pentru orice $\alpha \in \mathbf{R}$ avem

$$\boxed{\lim_{x\to\alpha} P(x) = P(\alpha)} \tag{24}$$

deoarece P este suma finită a unor funcţii monom de tipul $x \mapsto cx^k$.

Dacă $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, $a_0 \neq 0$, atunci $\lim\limits_{x\to\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to\infty} a_0x^n$ şi $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} a_0x^n$, aplicând un raţionament făcut la punctul 4.1.b.

Exemple

1) $\lim\limits_{x\to2}(x^2 + 5x) = 2^2 + 5\cdot 2 = 14$; $\lim\limits_{x\to4}(-x^3 + 5x) = -4^3 + 5\cdot 4 = -44$.

2) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2 + 5x) = \lim\limits_{x\to\infty} x^3 = \infty$;

$\lim\limits_{x\to\infty}(-x^3 + 2x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(-x^3) = -\infty$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^3 + 5x) = \infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^3 + 2x) = \infty$.

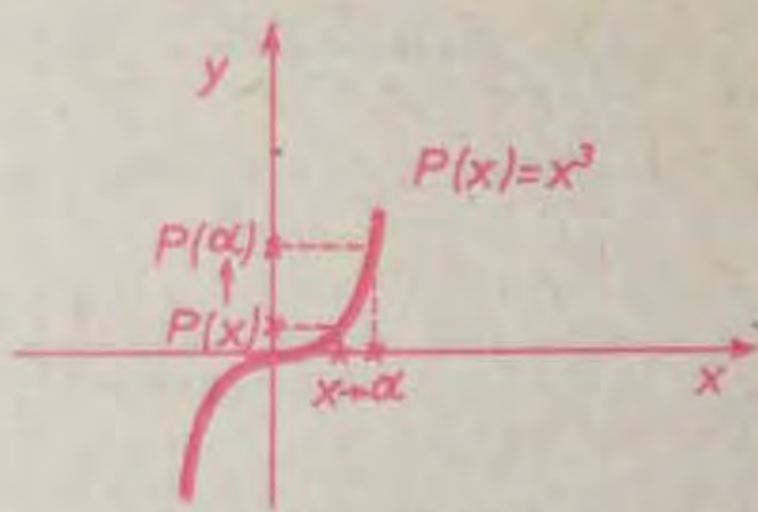


Fig. II.24

Graficele funcţiilor polinomiale de grad $n \geqslant 2$ nu au asimptote (orizontale, oblice sau verticale).

b) *Funcţii raţionale.* Dacă P şi Q sunt funcţii reale polinomiale şi $\alpha \in \mathbf{R}$ un punct astfel încât $Q(\alpha) \neq 0$, atunci

$$\boxed{\lim_{x\to\alpha} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(\alpha)}{Q(\alpha)}} \tag{25}$$

deoarece pentru orice şir $x_n \to \alpha$, $x_n \neq \alpha$, avem $\dfrac{P(x_n)}{Q(x_n)} \to \dfrac{P(\alpha)}{Q(\alpha)}$.

În cazul când $Q(\alpha) = 0$, discuția este ceva mai dificilă: dacă $P(\alpha) \neq 0$, atunci limita $\lim\limits_{\substack{x \to \alpha \\ x < \alpha}} \frac{P(x)}{Q(x)}$ este ∞ sau $-\infty$ la fel $\lim\limits_{\substack{x \to \alpha \\ x > \alpha}} \frac{P(x)}{Q(x)}$; dacă $P(\alpha) = 0$, atunci funcția rațională $\frac{P(x)}{Q(x)}$ poate fi simplificată cu $x - \alpha$ etc.

Exemple

1) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 + 1}{x^3 + 1} = \frac{3^2 + 1}{3^3 + 1} = \frac{5}{14}$;

2) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} (x + 1) = 2$ și $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{(x - 1)^3} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{x + 1}{(x - 1)^2} = \infty$;

3) $\lim\limits_{x \to -3} \frac{1}{x + 3}$ nu există;

4) $\lim\limits_{x \to -3} \frac{x}{(x + 3)^2} = -\infty$, iar $\lim\limits_{x \to -3} \frac{x^2 - 9}{(x + 3)^2}$ nu există.

Raționând ca în teorema II.14, *limita* $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$ $\left(ca\ și\ \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\right)$ *este egală cu limita raportului termenilor de grad maxim ai polinoamelor* P *și* Q.

Exemple

1) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{8x^2 + x + 2}{7x^2 - 2x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2\left(8 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(7 - \frac{2}{x}\right)} = \frac{\lim\limits_{x \to \infty}\left(8 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x \to \infty}\left(7 - \frac{2}{x}\right)} = \frac{8}{7}$; similar

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{8x^2 + x + 2}{7x^2 - 2x} = \frac{8}{7}$.

2) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{(x + 1)^3 - x^3}{2x^2 + 5x} = \frac{3}{2}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3x + 8}{2x^2 + 5x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3x}{2x^2} = 0$.

3) Pentru orice n natural, avem

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^n + 1\,987}{8x^3 + 211} = \lim_{x \to \infty} \frac{3x}{8x^3} = \begin{cases} 0, \text{ dacă } n < 3 \\ \infty, \text{ dacă } n > 3 \\ \frac{3}{8}, \text{ dacă } n = 3 \end{cases}$$

$$\text{și } \lim_{x \to -\infty} \frac{3x^n + 1\,987}{8x^3 + 211} = \lim_{x \to -\infty} \frac{3x^n}{8x^3} = \begin{cases} 0, \text{ dacă } n < 3 \\ -\infty, \text{ dacă } n > 3 \text{ este par} \\ \infty, \text{ dacă } n > 3 \text{ este impar} \\ \frac{3}{8}, \text{ dacă } n = 3 \end{cases}$$

Dacă polinomul Q are ca rădăcini reale $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ și $P(\alpha_i) \neq 0$, $1 \leq i \leq k$, atunci graficul funcției raționale $\frac{P}{Q}$ admite asimptotele verticale $x = \alpha_i$, $1 \leq i \leq k$. Dacă polinomul Q nu are rădăciui reale, atunci graficul lui $\frac{P}{Q}$ nu

are asimptote verticale în acest caz, peutru orice $\alpha \in \mathbf{R}$, limita $\lim\limits_{x \to \alpha} \frac{P}{Q}$ este finită, egală cu $\frac{P(\alpha)}{Q(\alpha)}$.

O fracţie raţională $\frac{P}{Q}$ admite asimptote orizontale dacă şi nnmai dacă gr $P \leqslant$ gr Q şi admite asimptotă oblică (aceeaşi spre $+\infty$ şi spre $-\infty$) dacă şi numai dacă gr $P = 1 +$ gr Q. Demonstraţiile sunt imediate.

Exemple

1) Funcţia $f : \mathbf{R} \setminus \{0, 1, -1\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x+4}{x^3 - x}$ are dreptele $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$, asimptote verticale şi $y = 0$ asimptotă orizontală.

2) Funcţia $f : \mathbf{R} \setminus \{2\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2}$ nu are asimptote verticale sau orizontale, iar funcţia $g : \mathbf{R} \setminus \{2\} \to \mathbf{R}$, $g(x) = \frac{x^3}{x - 2}$ are dreapta $x = 2$ asimptotă verticală.

c) *Funcţia radical.* Dacă $\alpha > 0$, atunci $\lim\limits_{x \to \alpha} \sqrt{x} = \sqrt{\alpha}$; într-adevăr, pentru orice şir $x_n \to \alpha$ avem $x_n > 0$ de la un rang încolo şi $|\sqrt{x_n} - \sqrt{\alpha}| = \frac{|x_n - \alpha|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{\alpha}} < \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \cdot |x_n - \alpha|$, deci $\sqrt{x_n} \to \sqrt{\alpha}$. De asemenea, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \sqrt{x} = 0$. În mod analog, pentru orice α real avem $\lim\limits_{x \to \alpha} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{\alpha}$.

În general, dacă $n \in \mathbf{N}$ este impar, atunci

(26) $$\boxed{\lim_{x \to \alpha} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{\alpha}}$$ pentru orice α real.

De asemenea, în acest caz avem

(27) $$\boxed{\lim_{x \to -\infty} \sqrt[n]{x} = -\infty; \ \lim_{x \to \infty} \sqrt[n]{x} = \infty}$$

Dacă $n \in \mathbf{N}$ este par, atunci relaţia (26) are loc pentru $\alpha > 0$; de asemenea,

(28) $$\boxed{\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \sqrt[n]{x} = 0 \ \text{şi} \ \lim_{x \to \infty} \sqrt[n]{x} = \infty}$$

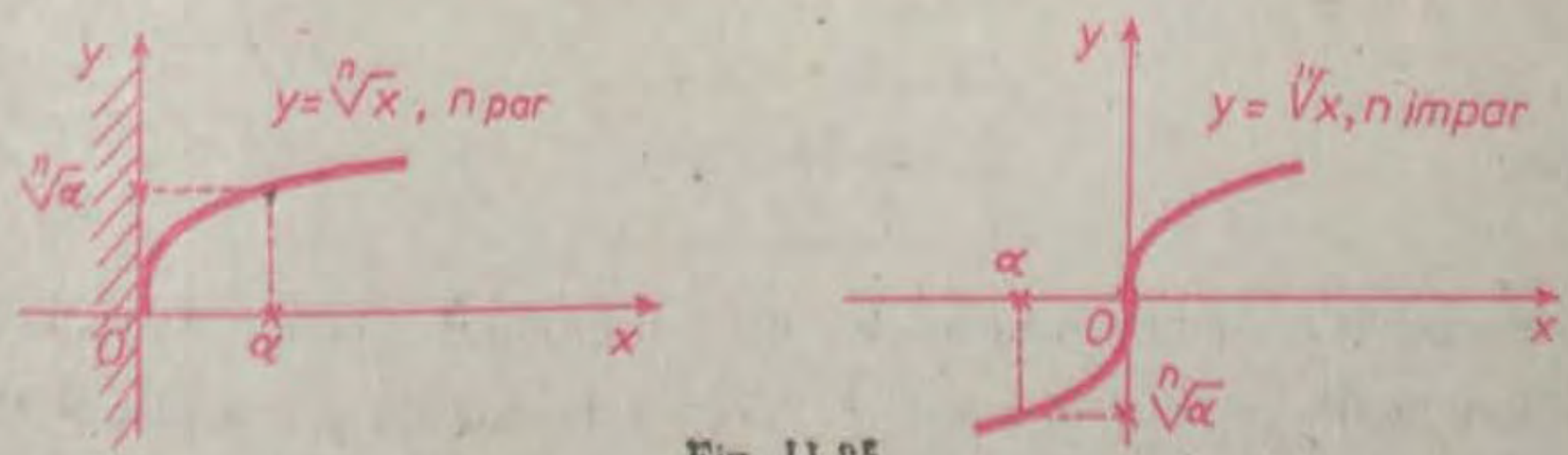


Fig. 11.25

Relațiile (27), (28) se mai scriu simbolic $\sqrt[n]{\infty} = \infty$ pentru orice n natural și $\sqrt[n]{-\infty} = -\infty$ dacă n este impar.

d) *Funcții trigonometrice.* În clasele anterioare au fost definite funcțiile sin, cos, tg, arcsin etc. prin considerente geometrice, care foloseau în mod tacit proprietăți adânci ale numerelor reale. Adoptăm aceste definiții dar menționăm că o prezentare riguroasă a funcțiilor trigonometrice ca funcții reale poate fi dată prin utilizarea dezvoltărilor în serie.

Pentru orice α real avem

$$\boxed{\lim_{x \to \alpha} \sin x = \sin \alpha} \tag{29}$$

Într-adevăr, pentru orice șir $x_n \to \alpha$ avem $|\sin x_n - \sin \alpha| = \left|2 \sin \frac{x_n - \alpha}{2} \cos \frac{x_n + \alpha}{2}\right| \leqslant 2\left|\sin \frac{x_n - \alpha}{2}\right| \leqslant |x_n - \alpha|$, deoarece $|\sin x| \leqslant |x|$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

În mod similar, se arată că

$$\boxed{\lim_{x \to \alpha} \cos x = \cos \alpha, \ \forall \alpha \in \mathbf{R}} \tag{30}$$

și, folosind limita unui cât, rezultă că

$$\boxed{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \alpha} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \alpha \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbf{Z}\right) \text{ și} \\ \lim\limits_{x \to \alpha} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} \alpha \ (\alpha \neq k\pi, \ k \in \mathbf{Z}). \end{array}} \tag{31}$$

De asemenea,

$$\boxed{\begin{array}{ll} \lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \operatorname{tg} x = \infty, & \lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x > \frac{\pi}{2}}} \operatorname{tg} x = -\infty \end{array}} \tag{32}$$

și, ca atare, dreapta $x = \frac{\pi}{2}$ este asimptotă verticală pentru funcția tangentă

Indicăm acum o limită cu totul remarcabilă.

TEOREMA II.21 Avem

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1} \tag{33}$$

Demonstrație. Alegem un cerc de rază 1 și unghiul la centru având măsura în radiani egală cu $x\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$. Avem aria $\triangle OAM <$ aria sector $AOM <$

$<$ aria $\triangle OAT$. Dar aria $\triangle OAM = \frac{1}{2}\sin x$, aria sector $AOM = \frac{1}{2}x$ şi aria $\triangle OAT = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$, deci $\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$ pentru $0 < x < \frac{\pi}{2}$ şi înmulţind cu $\frac{2}{\sin x}$, rezultă $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$, adică

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

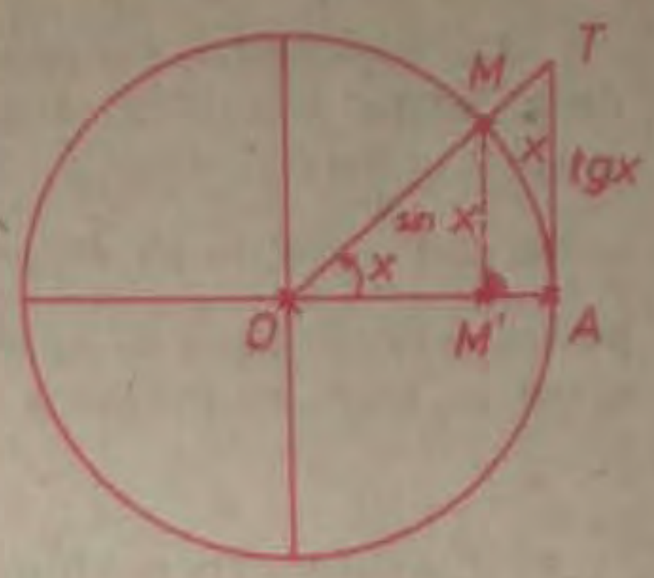


Fig. II.26

Aceste inegalităţi au loc şi pentru $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, deoareče funcţiile $x \mapsto \cos x$, $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ sunt pare.

Pentru orice $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$ avem de la un rang încolo $-\frac{\pi}{2} < x_n < \frac{\pi}{2}$ şi deci

$$\cos x_n < \frac{\sin x_n}{x_n} < 1$$

şi deoarece $\cos x_n \to \cos 0 = 1$, se obţine $\frac{\sin x_n}{x_n} \to 1$ (teorema II.12).

Exemple

1) Funcţia sa: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin

$$\operatorname{sa}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 1, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

se numeşte „sinus atenuat" şi graficul ei este schiţat în figura II.27. Aşadar, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \operatorname{sa}(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \operatorname{sa}(x) = \operatorname{sa}(0) = 1$.

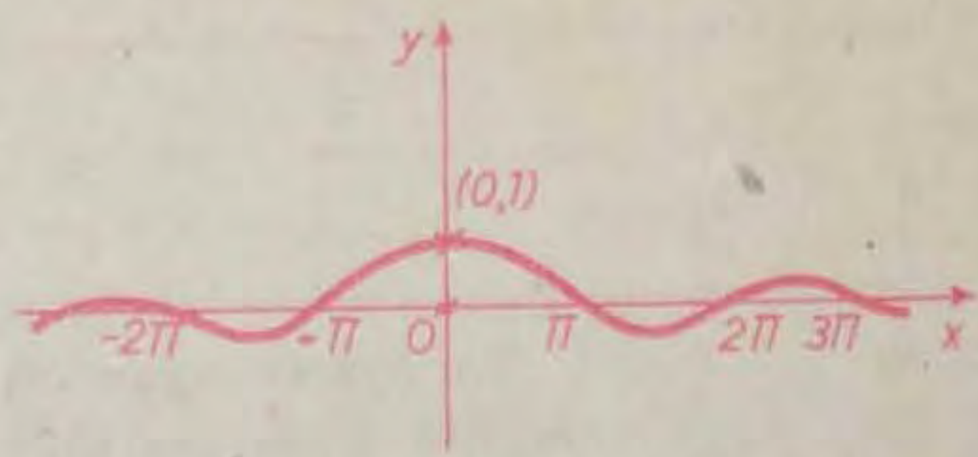


Fig. II.27

2) Avem $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin px}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin px}{px} \cdot p = p \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin px}{px} = p$, deoarece $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin px}{px} = \lim\limits_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$, punând $y = px$ ($p \neq 0$ constant).

Aici este ilustrat un procedeu mai general numit „schimbare de variabilă". Anume, fie o funcţie $f : D_1 \to \mathbf{R}$, $D_1 \subset \mathbf{R}$, l un punct de acumulare pentru D_1 astfel încât să existe $\lambda = \lim\limits_{y \to l} f(y)$. Dacă $u : D \to D_1$ este o funcţie, α un punct de acumulare pentru D şi $\lim\limits_{x \to \alpha} u(x) = l$ şi, în plus, $\{x \neq \alpha$ în $D \Rightarrow u(x) \neq l\}$, atunci $\lim\limits_{x \to \alpha} f(u(x)) = \lambda$. Într-adevăr, pentru orice şir $x_n \to \alpha$, $x_n \neq \alpha$, avem $u(x_n) \to l$, $u(x_n) \neq l$, deci $f(u(x_n)) \to \lambda$. Se mai spune, pe scurt, că punând $y = u(x)$ avem $\lim\limits_{x \to \alpha} f(u(x)) = \lim\limits_{y \to l} f(y)$.

e) *Funcţia exponenţială.* Fixăm $a > 0$, $a \neq 1$. Se cunoaşte definiţia lui a^x pentru $x \in \mathbf{Q}$; anume, dacă $x = \frac{p}{q}$ (p, q întregi, $q \geqslant 1$), atunci $a^x = \sqrt[q]{a^p}$. Dacă x este iraţional şi se alege un şir de numere raţionale $r_n \to x$, atunci se poate arăta că şirul $(a^{r_n})_{n \geqslant 0}$ este convergent şi limita lui se notează a^x [număr real independent de alegerea şirului r_n convergent către x, în sensul că dacă $r_n \to x$, $r'_n \to x$ şi $r_n, r'_n \in \mathbf{Q}$, atunci $\lim\limits_{n \to \infty} a^{r_n} = \lim\limits_{n \to \infty} a^{r'_n}$].

De exemplu, $3^{\sqrt{2}} = \lim\limits_{n \to \infty} 3^{r_n}$, unde r_n este şirul trunchierilor lui $\sqrt{2}$.

Se arată că $a^x > 0$, $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$, $(a^x)^y = a^{xy}$, $a^x : a^y = a^{x-y}$ pentru orice x, $y \in \mathbf{R}$.

Cazul $a > 1$. În acest caz se obţine o funcţie strict crescătoare, care defineşte o aplicaţie bijectivă $\mathbf{R} \to (0, \infty)$ $x \mapsto a^x$ şi se poate arăta că pentru orice α real avem

$$\boxed{\lim_{x \to \alpha} a^x = a^\alpha} \tag{34}$$

adică pentru orice şir $x_n \to \alpha$, avem $a^{x_n} \to a^\alpha$ (se mai spune că limita exponenţialei este exponenţiala limitei). În plus, se arată că

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} a^x = 0, \ \lim_{x \to \infty} a^x = \infty (a > 1)} \tag{35}$$

şi că

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{a^x} = 0, \ \forall n \in \mathbf{Z}, \ a > 1} \tag{36}$$

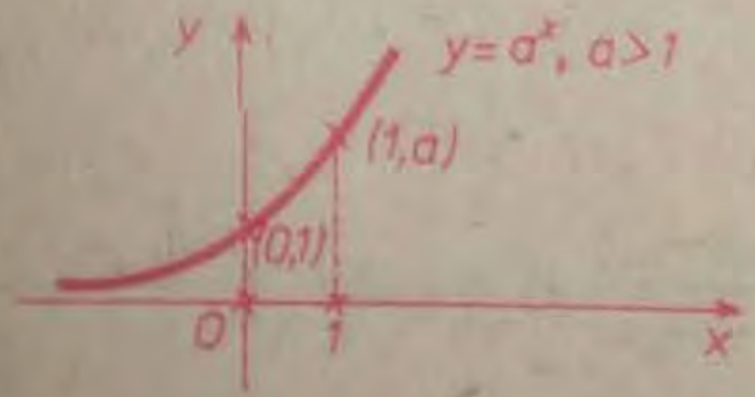


Fig. II.28

Verificarea riguroasă a acestor afirmaţii necesită unele dezvoltări mai laborioase.

Graficul funcţiei $f : \mathbf{R} \to (0, \infty)$, $f(x) = a^x$ pentru $a > 1$ are $y = 0$ asimptotă orizontală spre $-\infty$; el este de forma indicată în figura II.28.

În particular, funcţiile $x \mapsto 2^x$, $x \mapsto 10^x$, $x \mapsto e^x$ au graficele de această formă.

Cazul $0 < a < 1$. În acest caz avem o funcție strict descrescătoare și bijectivă $f : \mathbf{R} \to (0, \infty)$, $x \mapsto a^x$ și, în plus,

$$\lim_{x \to \alpha} a^x = a^\alpha, \ \forall \alpha \in \mathbf{R}; \ \lim_{x \to -\infty} a^x = \infty \text{ și } \lim_{x \to \infty} a^x = 0.$$

Graficul funcției f pentru $0 < a < 1$ are $y = 0$ asimptotă orizontală spre ∞ și este de forma indicată în fig. II.29.

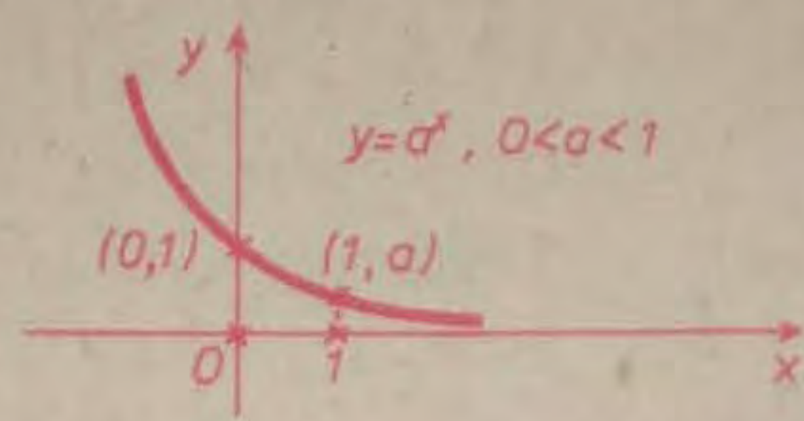


Fig. II.29

f) *Funcții hiperbolice.* Pentru orice $x \in \mathbf{R}$ se notează $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ („sinus hiperbolic"), $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ („cosinus hiperbolic") și $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{e^{2x} - 1}{2^{2x} + 1}$.

Graficele funcțiilor sh, ch sunt schițate în figura II.30. Este evidentă relația $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$, $\forall t \in \mathbf{R}$, deci punctul (x, y) din plan de coordonate $x = \operatorname{ch} t$, $y = \operatorname{sh} t$ „parcurge" ramura de hiperbolă $x^2 - y^2 = 1$, $x > 0$ (ceea ce justifică terminologia).

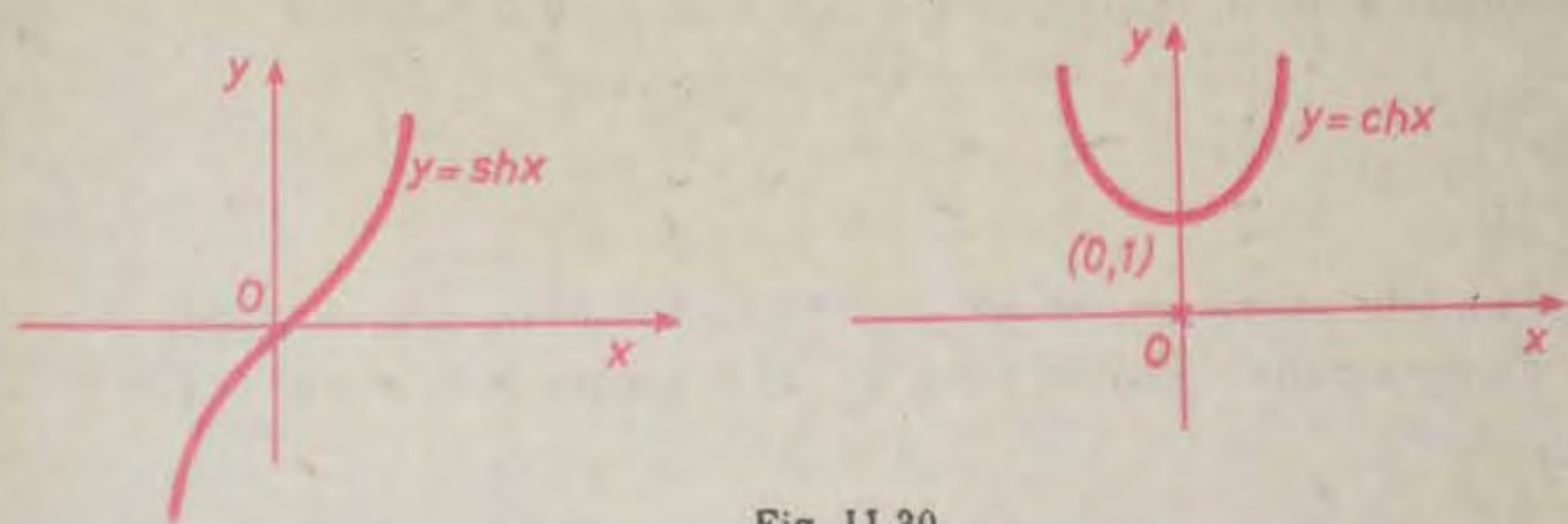


Fig. II.30

g) *Funcția logaritmică.* Fixăm din nou $a > 0$, $a \neq 1$. Se definește funcția logaritmică în baza a, $\log_a : (0, \infty) \to \mathbf{R}$ ca inversa funcției exponențiale $x \mapsto a^x$ Dacă $a > 1$ (respectiv $0 < a < 1$) funcția este strict crescătoare (respectiv strict descrescătoare). În plus,

$$\boxed{\lim_{x \to \alpha} \log_a x = \log_a \alpha, \ \forall \alpha > 0} \tag{37}$$

(limita logaritmului este egală cu logaritmul limitei).

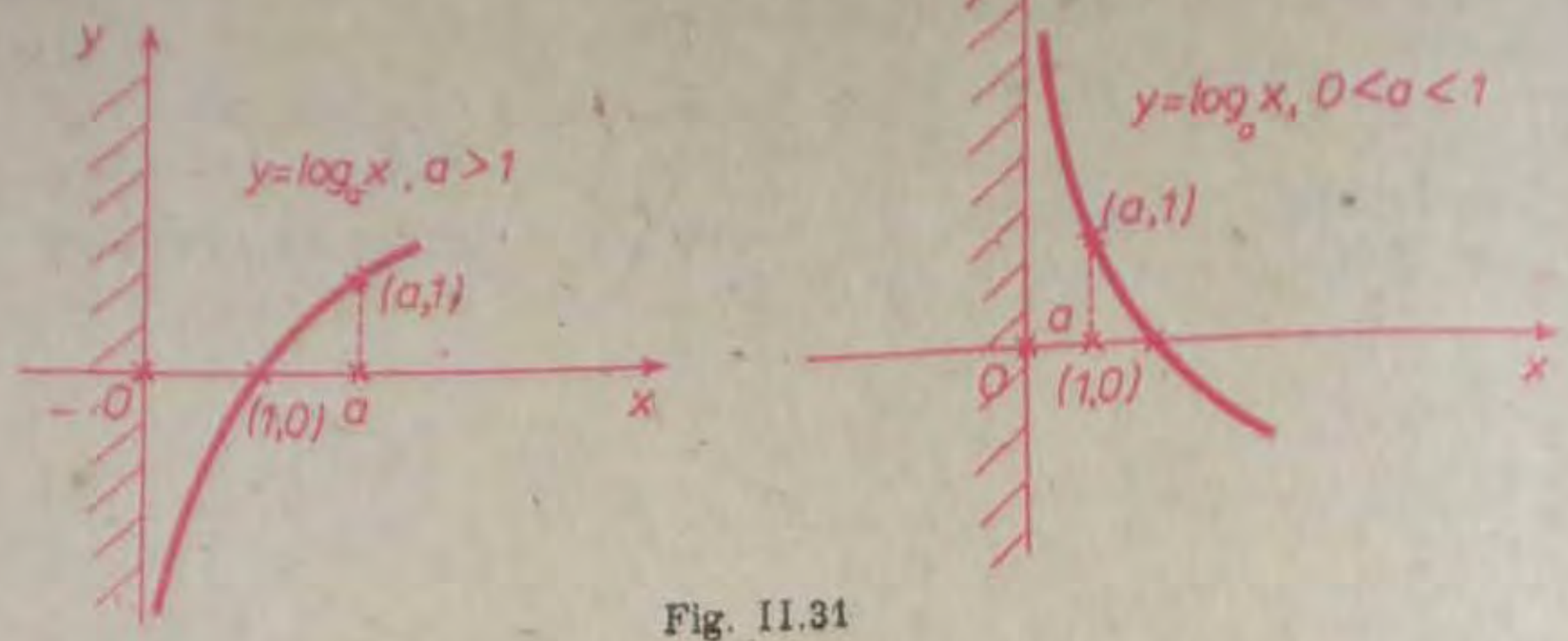


Fig. II.31

Dacă $a > 1$, avem

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \log_a x = -\infty \quad \text{și} \quad \lim_{x\to\infty} \log_a x = \infty} \tag{38}$$

iar dacă $0 < a < 1$, atunci $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \log_a x = \infty$ și $\lim\limits_{x\to\infty} \log_a x = -\infty$.

Graficele corespunzătoare sunt schițate în figura II.31.

Pentru $a = 10$ se obține logaritmul zecimal $\lg = \log_{10}$. Un caz particular, extrem de important, este cel al logaritmilor în baza e, numiți *logaritmi naturali* sau *neperieni* (după numele lui J. Neper, 1550—1617). Se notează ln în loc de $\log_e$, deci pentru orice $x > 0$, se pune $\ln x = \log_e x$. Aplicând regula de schimbare a bazei, rezultă că $\forall\, a > 0,\ a \neq 1,\ \forall\, x > 0$

$$\boxed{\log_a x = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln x} \tag{39}$$

Remarcăm, de asemenea, că $a^x = e^{x \ln a} = 10^{x \lg a}$ $(a > 0,\ x \in \mathbf{R})$.

b) *Funcția putere.* Pentru orice $x > 0$ și pentru orice r real avem

$$x^r = e^{r \ln x} \tag{40}$$

și în acest mod, funcția putere $g : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $g(x) = x^r$ este tocmai compunerea funcțiilor $x \mapsto u = r \ln x$ și $u \mapsto e^u$.

Mai general, dacă $f, g : D \to \mathbf{R}$ $(D \subset \mathbf{R})$ sunt funcții reale și $f > 0$ (adică $f(x) > 0$, $\forall\, x \in D$), atunci se poate defini funcția $f^g : D \to \mathbf{R}$ prin $f^g = e^{g \ln f}$. De exemplu, $x^x = e^{x \ln x}$, $\forall\, x > 0$.

În încheierea acestui punct, indicăm câteva limite remarcabile legate de exponențiale și logaritmi. Din definiția II.7 a numărului e, se poate deduce că

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e} \tag{41}$$

Făcând schimbarea de variabilă $x = \frac{1}{y}$, se poate demonstra că

(42) $$\boxed{\lim_{y \to 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} = e}$$

De aici rezultă că

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \ln(1 + x) = \lim_{x \to 0} \ln(1 + x)^{\frac{1}{x}} = \ln \lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} =$$
$$= \ln e = 1.$$

De asemenea, pentru $a > 0$, $a \neq 1$, notând $a^x - 1 = u$, avem $a^x = 1 + u$, $x \ln a = \ln(1 + a)$, deci

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{u \to 0} \frac{u \ln a}{\ln(1 + u)} = (\ln a) \cdot \lim_{u \to 0} \frac{1}{\frac{\ln(1 + u)}{u}} = \ln a.$$

În fine, pentru orice număr real r, notând $1 + x = 2^v$ avem

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1 + x)^r - 1}{x} = \lim_{v \to 0} \frac{2^{rv} - 1}{2^v - 1} = \lim_{v \to 0} \frac{\frac{2^{vr} - 1}{r^v} r}{\frac{2^v - 1}{v}} = r \cdot \frac{\ln 2}{\ln 2} = r.$$

Reţinem aşadar următoarele limite:

(43) $$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1;$$

(44) $$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \ a > 0;$$

(45) $$\lim_{x \to 0} \frac{(1 + x)^r - 1}{x} = r, \ \forall \ r \text{ real.}$$

Exemple

1) $$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2}}{4 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \left(\lim_{x \to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right) \cdot$$

$$\cdot \left(\lim_{x \to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}. \text{ De aici, } \lim_{x \to 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \right)^3 = \left(\frac{1}{2} \right)^3 = \frac{1}{8}.$$

2) $$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1 + 4x + x^2}{1 + x} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} \left(1 + \frac{3x + x^2}{1 + x} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} \left(1 + \frac{3x + x^2}{1 + x} \right)^{\frac{3x + x^2}{1 + x} \cdot \frac{1 + x}{3x + x^2} \cdot \frac{1}{x}} =$$
$$= e^{\lim_{x \to 0} \frac{3x + x^2}{(1 + x)x}} = e^3.$$

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^2)^x - 1}{x} \overset{cf.(44)}{=\!=} \ln e^2 = 2 \ln e = 2.$

4) Punând $x = 1 + y$, rezultă $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\sqrt{1+y}-1}{y} =$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{(1+y)^{\frac{1}{9}} - 1}{y} \overset{cf.(45)}{=\!=} \frac{1}{9}.$$

Observaţie. În ultimul timp există tendinţa de a introduce notaţii noi pentru funcţiile elementare: SIN, COS, TAN ($x \mapsto \operatorname{tg} x$), COT ($x \mapsto \operatorname{ctg} x$), EXP ($x \mapsto e^x$), LOG($x \mapsto \ln x$), SIN^{-1}($x \mapsto \arcsin x$), TAN^{-1} ($x \mapsto \operatorname{arctg} x$) etc. Valorile acestor funcţii pot fi calculate, cu aproximaţie, cu ajutorul minicalculatoarelor sau cu ajutorul unor tabele speciale.

7.2. Cazuri exceptate

Am văzut că pentru funcţiile elementare $f : D \to \mathbf{R}$ definite pe domeniul lor maxim de definiţie D, avem

$$\boxed{\lim_{x\to\alpha} f(x) = f(\alpha),\ \forall\, \alpha \in D} \tag{46}$$

Cu alte cuvinte, calculul limitei lui f în punctul α revine la calculul valorii $f(\alpha)$ obţinute înlocuind direct x cu α.

Aplicarea mai largă a acestei reguli poate să conducă la operaţii care nu au fost definite în $\overline{\mathbf{R}}$, de tipul

$$\frac{0}{0},\ 0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ \frac{\infty}{\infty},\ 1^\infty,\ 0^0,\ \infty^0 \text{ etc.}$$

numite *cazuri exceptate*. Sunt atunci necesare transformări ale funcţiei de sub limită, cu respectarea strictă a proprietăţilor limitelor, utilizând limitele-tip indicate mai sus. Nu există însă reguli generale şi se pot face cel mult unele recomandări.

Dacă trebuie calculată o limită de forma $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{g(x)}{h(x)}$ şi dacă $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\alpha} h(x) = 0$ se spune că ne aflăm în cazul $\dfrac{0}{0}$. În această situaţie se recomandă simplificarea cu $x - \alpha$ sau translaţia $x - \alpha = y$, care conduce la limita $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{g(\alpha+y)}{h(\alpha+y)}$ etc.

Exemple

1) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^2+x-2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+1}{x+2} = \dfrac{2}{3};$

2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{2\cos x - 1}{3x-\pi} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{2\cos\left(\frac{\pi}{3}+y\right)-1}{3\left(\frac{\pi}{3}+y\right)-\pi} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{2\left(\frac{1}{2}\cos y - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin y\right)-1}{3y} =$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\cos y - 1}{3y} - \lim_{y\to 0} \frac{\sqrt{3}\sin y}{3y} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Dacă avem de calculat $\lim\limits_{x\to a}[g(x)-h(x)]$ și dacă $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} h(x)=$ $=\infty$, atunci se obține cazul $\infty-\infty$. În acest caz se recomandă transformarea funcției de sub limită, iar în cazul radicalilor, amplificarea eventuală cu expresia conjugată.

Exemple

1) $$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^3-1}\right)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{x^2+x}{x^3-1}=\infty,\ \text{iar}\ \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1}\right)=$$

$$=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{x^2+x-2}{x^3-1}=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{x+2}{x^2+x+1}=\frac{3}{3}=1.$$

2) $$\lim_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-1})=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-\sqrt{x^2-1})(x+\sqrt{x^2-1})}{x+\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}=0.$$

În cazul $\frac{\infty}{\infty}$ se recomandă uneori scoaterea forțată a unor factori comuni. De exemplu,

3) $$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}}=1,\ \text{iar}\ \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=-1.$$

4) $$\lim_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2+5x})=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-(x^2+5x)}{x+\sqrt{x^2+5x}}=-5\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+\sqrt{x^2+5x}}=$$

$$=-5\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x\left(1+\sqrt{1+\frac{5}{x}}\right)}=-5\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{5}{x}}}=-\frac{5}{2}.$$

În cazul exceptat 1^∞ se utilizează limita-standard care definește numărul e, anume $\lim\limits_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=e$. De exemplu,

5) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x+9}{x^2+5x+3}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2+2x+9}{x^2+5x+3}-1\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{6-3x}{x^2+5x+3}\right)^x=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{6-3x}{x^2+5x+3}\right)^{\frac{x^2+5x+3}{6-3x}}\right]^{\frac{6x-3x^2}{x^2+5x+3}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x-3x^2}{x^2+5x+3}}=e^{-3}=\frac{1}{e^3}.$$

De asemenea, punând $x - \frac{\pi}{4} = y$, rezultă

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{4x-\pi}} = \lim_{y \to 0} \left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + y\right)\right]^{\frac{1}{4y}} = \lim_{y \to 0} \left(\frac{1 + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} y}\right)^{\frac{1}{4y}} =$$

$$= \lim_{y \to 0} \left[\left(1 + \frac{2 \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} y}\right)^{\frac{1 - \operatorname{tg} y}{2 \operatorname{tg} y}}\right]^{\frac{2 \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} y} \cdot \frac{1}{4y}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{y \to 0} \frac{\operatorname{tg} y}{2y(1 - \operatorname{tg} y)}} = e^{\frac{1}{2} \lim\limits_{y \to 0} \frac{\operatorname{tg} y}{y} \cdot \lim\limits_{y \to 0} \frac{1}{1 - \operatorname{tg} y}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

În capitolul V vom da o altă regulă utilă pentru calculul limitelor (regula lui l'Hospital).

EXERCIŢII (capitolul II, § 7)

1. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 - 2x)$; b) $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 + x - 2)$; c) $\lim\limits_{x \to 1} (x^4 - x)$; d) $\lim\limits_{x \to -1} (x^4 + x)$; e) $\lim\limits_{x \to 7} (2x^2 - x)$;

f) $\lim\limits_{x \to \infty} (x^3 - x^2 + x)$; g) $\lim\limits_{x \to \infty} (-x^3 + x^2)$; h) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^3 + 8x^2)$; i) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^4 + x - 100)$;

j) $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{x^3 - x}$; l) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(-\sqrt{x^2 - 1}\right)$; m) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{2x}$; n) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{|2x - 2|}$; o) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3 + x}{x^3 - x}$;

p) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^4 + x}{x^4 - x}$; q) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^4 + x^3}{x^4}$; r) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{x^3}$; s) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x + 1}{|x - 1|}$; t) $\lim\limits_{n \to -\infty} \frac{x + 1}{|x - 1|}$;

u) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + 4}}$; v) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2 + x + 1}{\sqrt{x^4 + 1}}$.

2. Să se calculeze: a) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$ şi b) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^m + 1}{x^n + 1}$ (m, n întregi > 0).

3. Să se calculeze: a) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^2 + x}{3x^2 - x}$; b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x^2 + x}{3x^2 - x}$; c) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^4 - x}{3x^3 + x + 2}$;

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x - 1}{x^2 + x}$; e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^3 + x^2}{x^2 + 4}$; f) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$; g) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

4. Să se determine asimptotele următoarelor funcţii reale:

$$f(x) = \frac{x + 1}{x^2 + 1}, \quad f(x) = \frac{x + 2}{x^2 - 1}, \quad f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}, \quad f(x) = x - \sqrt{x^2 - x}, \quad f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1},$$

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}, \quad f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 4x - 5}$$

5. Să se arate că dacă P, Q sunt funcţii polinomiale reale şi $\operatorname{gr} P - \operatorname{gr} Q = 1$, atunci funcţia raţională $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ are asimptotă oblică spre $+\infty$ şi spre $-\infty$ (anume dreapta $y = ax + b$ unde $ax + b$ este câtul lui P prin Q).

6. Să se arate că funcţiile: $f : \mathbf{R}\setminus\{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, $g : \mathbf{R}\setminus\{0\} \to \mathbf{R}$, $g(x) = \cos\frac{1}{x}$, $h : \mathbf{R}\setminus\left\{\frac{2}{1+2k},\ k \in \mathbf{Z}\right\} \to \mathbf{R}$, $h(x) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{x}$, nu au limită în punctul $x = 0$.

7. Să se calculeze

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$; c) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x-a}$; ($0<b<a$ constante); d) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$; e) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^3+x}+x)$; f) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-2x})$; g) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x}-2x)$; h) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{4x}$; i) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\operatorname{tg} x-\sin x}{x}$; j) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\operatorname{tg}^2 2x}$; k) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos 4x}{x^2}$; l) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-|x|}$; m) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-|x|}$; n) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x^2}$; o) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{|x|+1}{x-1}}$.

8. Să se determine limitele laterale în punctul $x = 1$ pentru funcţiile $f : D \to \mathbf{R}$ (D – domeniul maxim de definiţie) următoare:

a) $f(x) = e^{\frac{1}{x-1}}$; b) $f(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}}$; c) $f(x) = e^{\frac{1}{|x^2-1|}}$; d) $f(x) = e^{\frac{x^2-2}{x-1}}$; e) $f(x) = e^{1+\frac{2}{|x-1|}}$; f) $f(x) = \frac{1}{x-1}\, e^{\frac{1}{x-1}}$; g) $f(x) = \frac{|x|-1}{x-1}$; h) $f(x) = \frac{\cos \pi x+1}{(x-1)^3}$.

9. Să se calculeze: a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\log_2 x$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\log_2 x$; c) $\lim\limits_{x\to 1}\log_2 x$; d) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\log_2\frac{x}{x-1}$; e) $\lim\limits_{x\to\infty} x\, e^{-x}$; f) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x+1}\, e^{2x}$; g) $\lim\limits_{x\to-\infty} x\, e^{x}$; h) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 e^{x}$.

10. Dacă f, g sunt funcţii reale definite pe un interval (a, ∞), $a \in \mathbf{R}$, scriem „$f(x) \ll g(x)$ pentru $x \to \infty$" dacă $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{g(x)}{f(x)} = \infty$. Să se arate că pentru orice funcţie polinomială $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, $a_0 > 0$, $n \geq 1$ avem

$$\ln x \ll P(x) \ll e^x \text{ pentru } x \to \infty$$

11. Să se determine asimptotele funcţiilor $f : D \to \mathbf{R}$ următoare (D fiind domeniul maxim de definiţie):

a) $f(x) = x\, e^{\frac{1}{x}}$; b) $f(x) = e^{-\frac{x}{x^2}}$; c) $f(x) = e^{-x^3}$; d) $f(x) = \frac{1}{e^x-1}$; e) $f(x) = \frac{\sin x}{1+\cos x}$; f) $f(x) = \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}$; g) $f(x) = \frac{1}{\sin x}$; h) $f(x) = \frac{x}{e^x+1}$; i) $f(x) = \frac{1}{|e^x-1|}$; j) $f(x) = x\sqrt{\frac{x}{x+1}}$; k) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+4}}{3x-5}$; l) $f(x) = \ln(x^2-1)$; m) $f(x) = \frac{\sqrt{x^4-1}}{x+3}$.

12. Să se calculeze limitele următoare (de tipul 1^∞):

a) $\lim\limits_{x\to 3}(13-4x)^{\frac{1}{x-3}}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^x$; c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2}}\right)^x$; d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\frac{1}{2x-\pi}}$;

e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)^{\sqrt{-x}}$; f) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$; g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\sqrt{\frac{1}{x}}\right)^x$.

13. Fie $a_n\to a$ un şir convergent de numere reale strict pozitive. Să se arate că $\lim\limits_{x\to\infty}(a_1a_2\ldots a_n)^{\frac{1}{n}}=a$.

14. Să se determine constanta $k\in\mathbf{R}$ astfel încât, pentru funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x^3}-\sqrt[3]{(x-1)^3}+k$, dreapta $y=1$ să fie asimptotă orizontală spre $+\infty$.

EXERCIŢII ŞI PROBLEME REZOLVATE LA CAPITOLUL II

1. *Dacă a este un număr real, să se arate că şirurile $x'_n=a-\frac{1}{n}$, $x''_n=a+\frac{1}{n}$, $n\geq 1$ sunt convergente către a şi $x'_n<a$, $x''_n>a$, $\forall\, n\geq 1$.*

Soluţie. Fie $\varepsilon>0$ arbitrar fixat. Se observă că

$$|x'_n-a|=\left|-\frac{1}{n}\right|=\frac{1}{n},\ |x''_n-a|=\frac{1}{n}.$$

Dacă punem condiţia $\frac{1}{n}<\varepsilon$, atunci $n>\frac{1}{\varepsilon}$ şi, ca atare, alegând N natural astfel încât $N>\frac{1}{\varepsilon}$, rezultă că $|x'_n-a|=\frac{1}{n}<\varepsilon$, $|x''_n-a|=\frac{1}{n}<\varepsilon$ pentru orice $n\geq N$. Aşadar, $x'_n\to a$, $x''_n\to a$.

2. *Să se arate că şirurile*

$$a_n=\frac{2^n}{(n!)^2}\ \text{şi}\ b_n=2^{-\sqrt{n^2+1}}\ (n\geq 1)$$

sunt mărginite, monotone şi convergente către zero.

Soluţie. Se verifică uşor că $0\leq a_n\leq 2$ şi $0\leq b_n\leq\frac{1}{2}$ pentru orice $n\geq 1$. Apoi $a_{n+1}-a_n=\frac{2^{n+1}}{[(n+1)!]^2}-\frac{2^n}{(n!)^2}=\frac{2}{(n!)^2}\left[\frac{2}{(n+1)^2}-1\right]\leq 0$, adică $a_{n+1}\leq a_n$, şi similar $b_{n+1}\leq b_n$ pentru orice $n\geq 1$. Aşadar ambele şiruri sunt monoton descrescătoare. Deoarece $0\leq a_n<\frac{2^n}{n!}<\frac{1}{n}$ (pentru $n\geq 6$) şi $0\leq b_n\leq\frac{1}{2^n}$ (pentru $n\geq 1$), rezultă că $a_n\to 0$, $b_n\to 0$, aplicând teorema II.4.

3. *Să se arate că pentru orice $a>0$ avem $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.*

Soluție. Presupunem că $a \geq 1$ și notăm $\sqrt[n]{a} - 1 = x_n$. Atunci, $x_n \geq 0$ și $a = (1 + x_n)^n \geq nx_n$, deci $0 \leq x_n \leq \frac{a}{n}$ și, ca atare, $x_n \to 0$, adică $\sqrt[n]{a} \to 1$ pentru $n \to \infty$.

Dacă $0 < a < 1$, atunci $\frac{1}{a} > 1$ și, ca atare, $\sqrt[n]{\frac{1}{a}} \to 1$, adică $\frac{1}{\sqrt[n]{a}} \to 1$, deci $\sqrt[n]{a} \to 1$.

4. *Să se arate că:* a) *dacă o funcție f are limita la stânga l_s (respectiv la dreapta l_d) într-un punct $x_0 \in \mathbf{R}$, atunci*

$$l_s = \lim_{n\to\infty} f\left(x_0 - \frac{1}{n}\right), \text{ respectiv } l_d = \lim_{n\to\infty} f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right), \ n \in \mathbf{N};$$

b) *dacă pentru $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$ există $l = \lim\limits_{n\to\infty} f(x)$, atunci $l = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ n\in\mathbf{N}}} f(n)$, dar nu și reciproc.*

Soluție. a) Este suficient să alegem șirul $x'_n = x_0 - \frac{1}{n}$ $\left(\text{și respectiv } x''_n = x_0 + \frac{1}{n}\right)$ și atunci $f(x'_n) \to l_s$ (respectiv $f(x''_n) \to l_d$).

b) Deoarece există $l = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, rezultă că pentru orice șir $x_n \to \infty$ (din domeniul de definiție al lui f) avem $f(x_n) \to l$. Luând $x_n = n$, rezultă $f(n) \to l$.

Pentru partea secundă, să considerăm funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ dacă } x \neq 1, 2, 3, \ldots \\ \frac{1}{n}, \text{ dacă } x = n, \ n \geq 1 \text{ întreg.} \end{cases}$$

Avem $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, dar limita $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ nu există.

5. *Să se calculeze limitele laterale în punctul $x = 2$ pentru funcțiile $f, g, h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ următoare:*

$$f(x) = \frac{|x-2|}{x^2 + x + 1}, \quad g(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \leq 2 \\ 2x + 7, & \text{dacă } x > 2 \end{cases}, \quad h(x) = \begin{cases} \sin \pi x, & \text{dacă } x < 2 \\ x^2, & \text{dacă } x \geq 2 \end{cases}.$$

Soluție. $f(2-0) = \lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ x<2}} f(x) = 0$, $f(2+0) = \lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ x>2}} f(x) = 0$;

$$g(2-0) = \lim_{\substack{x\to 2 \\ x<2}} x = 2 \text{ și } g(2+0) = \lim_{\substack{x\to 2 \\ x>2}} (2x+7) = 11;$$

$$h(2-0) = \lim_{\substack{x\to 2 \\ x<2}} h(x) = \lim_{\substack{x\to 2 \\ x<2}} \sin \pi x = \sin 2\pi = 0 \text{ și } h(2+0) = \lim_{\substack{x\to 2 \\ x>2}} x^2 = 4.$$

6. *Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin*

$$f(x) = \begin{cases} x - q, & \text{dacă } x < 1 \\ 2x + p, & \text{dacă } x > 1 \\ q, & \text{dacă } x = 1 \end{cases}$$

unde p și q sunt parametri reali. Pentru care valori ale lui p și q funcția f are limită în punctul $x = 1$? În ce caz această limită este egală cu $f(1)$?

Soluție. Avem $f(1-0) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (x-q) = 1-q$, $f(1+0) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} (2x+p) = 2+p$. Aplicând teorema II.7, condiția ca f să aibă limită în punctul $x=1$ este ca $1-q = 2+p$, adică $p+q=-1$. Apoi $f(1)=q$, deci răspunsul la întrebarea secundă se obține rezolvând sistemul $1-q=2+p=q$, de unde $q=\frac{1}{2}$, $p=-\frac{3}{2}$.

7. *Să se calculeze*

$$l_1 = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{x^2-1},\ l_2 = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^4}{(x^2-1)^4} \text{ și } l_3 = \lim \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}.$$

Soluție. $l_1 = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)^2}{(x+1)(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x+1} = 0;$

$$l_2 = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^4}{(x-1)^4(x+1)^4} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{(x+1)^4} = \frac{1}{16}.$$

Ținând cont că $\sqrt{x}-1 = \dfrac{x-1}{\sqrt{x}+1}$, $\sqrt[3]{x}-1 = \dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}$, rezultă

$$\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1} = \frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x}+1} \text{ pentru orice } x \geqslant 0,\ x \neq 1, \text{ deci}$$

$$l_3 = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \frac{3}{2}.$$

8. *Să se determine asimptotele funcțiilor $f : D \to \mathbf{R}$ următoare (D fiind domeniul maxim de definiție):*

a) $f(x) = \dfrac{2x^2-1}{x^2-1}$; b) $f(x) = \dfrac{x^3}{|x^2-4|}$; c) $f(x) = \dfrac{x^2-4x+4}{x^2-3x+2}$;

d) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x-1}$.

Soluție. a) Funcția f este definită pe $D = R\setminus\{-1, 1\}$. Dreptele $x=1$, $x=-1$ sunt asimptote verticale și dreapta $y=2$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ și spre $+\infty$.

b) Dreptele $x=2$, $x=-2$ sunt asimptote verticale; apoi, deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, funcția nu are asimptote orizontale. Studiem existența asimptotei oblice spre $+\infty$; calculăm $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x^2-4} = 1$ și $n = \lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim\limits_{x\to\infty} \left[\dfrac{x^3}{|x^2-4|} - x\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^3}{x^2-4} - x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x}{x^2-4} = 0$. Așadar, $y=x$ este asimptota oblică spre $+\infty$. Similar, se obține că $y=x$ este asimptotă oblică și spre $-\infty$.

c) Funcția f este definită pe mulțimea $D = \mathbf{R}\setminus\{1, 2\}$ și $f(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$, $\forall x \in D$. Dreapta $x=1$ este asimptotă verticală și dreapta $y=1$ este asimptotă orizontală (spre $+\infty$ și spre $-\infty$).

d) Dreapta $x=1$ este asimptotă verticală; apoi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x-1} \cdot \sin x = 0$ și $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, deci axa Ox este asimptotă orizontală (spre $+\infty$ și spre $-\infty$).

9. Se consideră *funcțiile* $f, g, h: [0, \infty) \to \mathbf{R}$ definite prin

$$f(x) = \sqrt{x + 10^3} - \sqrt{x},\ g(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x},\ h(x) = \sqrt{x + \frac{x}{10^3}} - \sqrt{x}.$$

Să se arate că dacă $x \in [1, 10^6]$, *atunci* $h(x) \leq g(x) \leq f(x)$ *și totuși* $\lim\limits_{x\to\infty} h(x) > \lim\limits_{x\to\infty} g(x) > \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

Soluție. Inegalitatea $h(x) \leq g(x)$ revine la $\sqrt{x + \frac{x}{10^3}} \leq \sqrt{x + \sqrt{x}}$, adică $\frac{x}{10^3} \leq \sqrt{x}$, adică $x \leq 10^6$; se probează similar faptul că $g(x) \leq f(x)$. Apoi, prin calcul direct, rezultă $\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \frac{1}{2}$ și $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$. Nu este nici o contradicție cu regula de păstrare a inegalităților prin trecere la limită, deoarece inegalitățile $h(x)) \leq g(x) \leq f(x)$ au loc aici doar pe un interval mărginit.

10. *Să se calculeze limitele următoare:*

$$l_1 = \lim_{h\to 0} \frac{1 - \frac{1}{h}}{1 + \frac{1}{h}}; \qquad l_2 = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2}\right],\ x \neq 0;$$

$$l_3 = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h},\ x > 0; \qquad l_4 = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}}{h},\ x \neq 0;$$

$$l_5 = \lim_{h\to 0} \frac{\sin^2(x+h) - \sin^2 x}{h}; \qquad l_6 = \lim_{h\to 0} (\cos h)^{\frac{1}{h^2}}$$

Soluție. $l_1 = \lim\limits_{h\to 0} \frac{h-1}{h+1} = -1$ $\left(\text{sub forma inițială limita era în cazul exceptat } \frac{\infty}{\infty}\right)$; avem succesiv

$$l_2 = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{x^2 - (x+h)^2}{x^2 \cdot (x+h)^2} = -\lim_{h\to 0} \frac{h + 2x}{x^2(x+h)^2} = \frac{-2}{x^3} \text{ (cazul } \infty \cdot 0);$$

$$l_3 = \lim_{h\to 0} \frac{x + h - x}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \left(\text{cazul } \frac{0}{0}\right);$$

$$l_4 = \lim_{h\to 0} \frac{x + h - x}{h\left(\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{x(x+h)} + \sqrt[3]{x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{x(x+h)} + \sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \left(\text{cazul } \frac{0}{0}\right);$$

$$l_5 = \lim_{h\to 0} \frac{[\sin(x+h) - \sin x][\sin(x+h) + \sin x]}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot 2\sin\left(x + \frac{h}{2}\right)\cos\frac{h}{2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin h \cdot \sin(2x + h)}{h} =$$

$$= \left(\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}\right) \cdot \lim_{h\to 0} \sin(2x + h) = 1 \cdot \sin 2x = \sin 2x.$$

În sfârșit, limita l_4 este în cazul exceptat 1^{∞}, și este necesară prelucrarea expresiei de sub limită:

$$l_4 = \lim_{h\to 0}(1+\cos h-1)^{\frac{1}{h^2}} = \lim_{h\to 0}\left(1-2\sin^2\frac{h}{2}\right)^{\frac{1}{h^2}} = \lim_{h\to 0}\left[\left(1-2\sin^2\frac{h}{2}\right)^{\frac{1}{-2\sin^2\frac{h}{2}}}\right]^{\frac{-2\sin^2\frac{h}{2}}{h^2}} = e^{-\lim\limits_{h\to 0}\frac{2\sin^2\frac{h}{2}}{h^2}} = e^{-\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}\cdot\sin\frac{h}{2}}{2\frac{h}{2}\cdot\frac{h}{2}}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

11. *Să se studieze convergența șirurilor $(a_n)_{n\geq 0}$ definite prin $a_0 = 1$ și prin următoarele relații de recurență:*

a) $a_{n+1} = 1 + a_n^2,\ n \geq 0;$

b) $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{a_n},\ n \geq 0.$

Soluție. a) Șirul $(a_n)_{n\geq 0}$ este monoton crescător: $a_{n+1} - a_n = a_n^2 - a_n + 1 > 0$, deci $a_{n+1} > a_n$, $n \geq 0$. Șirul este deci monoton și, ca atare, are o limită l. Dacă această limită ar fi finită, ar rezulta $l = 1 + l^2$, ceea ce este absurd. Deci $\lim a_n = \infty$.

b) Avem $a_{n+1} > a_n$, $n \geq 0$, așa cum se verifică imediat prin inducție. Raționând ca mai sus, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

12. *Să se arate că dacă $(a_n)_{n\geq 0}$ este un șir convergent, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$, dar reciproca este falsă.*

Soluție. Presupunem că $a_n \to a$. Atunci $|a_{n+1} - a_n| = |(a_{n+1} - a) + (a - a_n)| \leq |a_{n+1} - a| + |a_n - a|$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$, conform corolarului 2 al teoremei II.4.

Pentru a vedea că reciproca este falsă este suficient să considerăm exemplul $s_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n}$ (din exercițiul 14, de la pag. 74).

13. *Să se determine $a \in \mathbf{R}$ astfel încât funcția $f : \mathbf{R}\setminus\{1\} - \mathbf{R}$ definită prin*

$$f(x) = \begin{cases} a\ln(3-x), & \text{dacă } x < 1 \\ \dfrac{2^x - 2}{x-1}, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$$

să aibă limită în punctul $x = 1$.

Soluție. $f(1-0) = \lim\limits_{x\to 1,\, x<1} a\ln(3-x) = a\ln 2$, $f(1+0) = \lim\limits_{x\to 1,\, x>1}\dfrac{2^x - 1}{x-1} = \lim\limits_{y\to 0,\, y>0}\dfrac{2^{1+y} - 2}{y} = 2\lim\limits_{y\to 0,\, y>0}\dfrac{2^y - 1}{y} = 2\ln 2$. Condiția din enunț revine la $f(1-0) = f(1+0)$, deci $a = 2$.

14. *Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție periodică neconstantă. Să se arate că f nu are limită în punctele ∞, $-\infty$.*

Soluție. Conform ipotezei există $T > 0$ astfel încât $f(x+T) = f(x)$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Deoarece f este neconstantă, există $a, b \in [0, T]$ astfel încât $f(a) \neq f(b)$. Considerăm șirurile $x_n' = a + nT$, $x_n'' = b + nT$, $n \geq 0$. Evident, $x_n' \to \infty$, $x_n'' \to \infty$ și $f(x_n') = f(a + nT) = f(a)$, $f(x_n'') = f(b + nT) = f(b)$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n') \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n'')$. Așadar, f nu are limită în punctul ∞. Se procedează similar pentru $-\infty$.

Observație. În particular, funcțiile cos, sin nu au limită în punctele ∞, $-\infty$.

15. Să se arate că funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = e^x (1 + 2 \sin x)$ nu are limită spre $+\infty$.

Soluție. $x_n' = n\pi \to \infty$, $x_n'' = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi \to \infty$ și $f(x_n') = e^{n\pi} \to \infty$, $f(x_n'') \to -\infty$, deci $\lim\limits_{h \to \infty} f(x)$ nu există.

16. Fie $f, g : D \to \mathbf{R}$ *două funcții și* $\alpha \in \overline{\mathbf{R}}$ *un punct de acumulare pentru* D. *Presupunem că există* $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$ *și că* g *este mărginită într-o vecinătatea a punctului* α. *Să se arate că* $\lim\limits_{x \to \alpha} (fg)(x) = 0$. *Ca o aplicație să se arate că*: a) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$; b) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^k \sin \frac{1}{x} = 0$ ($k > 0$, real); c) $\lim\limits_{n \to -\infty} e^x (1 + 2 \sin x) = 0$.

Soluție. Fie $x_n \to \alpha$ un șir oarecare de puncte din $D \setminus \{\alpha\}$, deci $f(x_n) \to 0$. Deoarece funcția g este mărginită într-o vecinătate U a lui α, și cum $x_n \in U$ pentru orice $n \geq N$ (N convenabil), rezultă că șirul $(g(x_n))_{n \geq N}$ este mărginit, deci

$$(fg)(x_n) = f(x_n) \cdot g(x_n) \to 0, \text{ adică } \lim_{x \to \alpha} (fg)(x) = 0.$$

a) Luăm $D = (0, \infty)$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \sin x$, $\alpha = \infty$.

b) Luăm $D = (0, 1)$, $f(x) = x^k$, $g(x) = \sin \frac{1}{x}$, $\alpha = 0$.

c) Luăm $D = (-\infty, 0)$, $f(x) = e^x$, $g(x) = 1 + 2 \sin x$, $\alpha = -\infty$.

Capitolul III
FUNCŢII CONTINUE

Ideea de continuitate a unei funcţii s-a desprins din reprezentările intuitive asupra proceselor în desfăşurarea cărora nu apar salturi, ruperi. Noţiunea matematică de continuitate cere o definiţie precisă, care să conducă prin raţionamente corecte la degajarea proprietăţilor funcţiilor continue, importante în aplicaţii şi în dezvoltări teoretice ulterioare. Conceptul de funcţie continuă s-a definit relativ târziu şi este datorat în principal lui A. Cauchy (1789—1857), B.Bolzano (1781—1848) şi G.Darboux (1842—1917).

§ 1. Funcţii continue într-un punct ; funcţii continue pe o mulţime

1.1. Punerea problemei

Considerăm câteva exemple.

1) Presupunem că pe o axă se mişcă uniform un mobil care la momentul $t = 0$ se află în origine. Dacă viteza, presupusă constantă, a mobilului este v, atunci notând cu $s(t)$ distanţa parcursă de mobil în timpul t, rezultă că $s(t) = v \cdot t$, $\forall t \geq 0$. Graficul acestei funcţii $s : [0, \infty) \to \mathbf{R}$ este indicat în figura III.1.

2) Considerăm funcţia $U : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin

$$U(t) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } t < t_0 \\ U_0, \text{ dacă } t \geq t_0 \end{cases}, \ t_0 \text{ fixat},$$

având graficul în figura III.2. ($U_0 > 0$ fiind o constantă). Reamintim că săgeţile corespund intervalelor deschise sau semideschise.

În exemplul 1 funcţia s nu are salturi, graficul este „neîntrerupt". În exemplul 2 funcţia U are un salt, sau o discontinuitate, cum se spune, în punctul t_0.

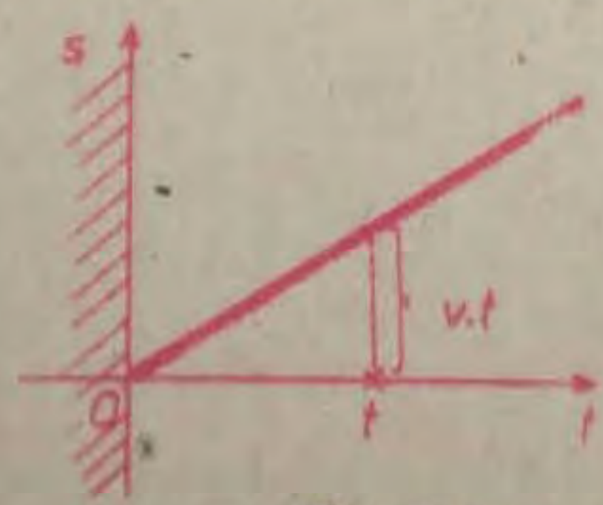


Fig. III.1

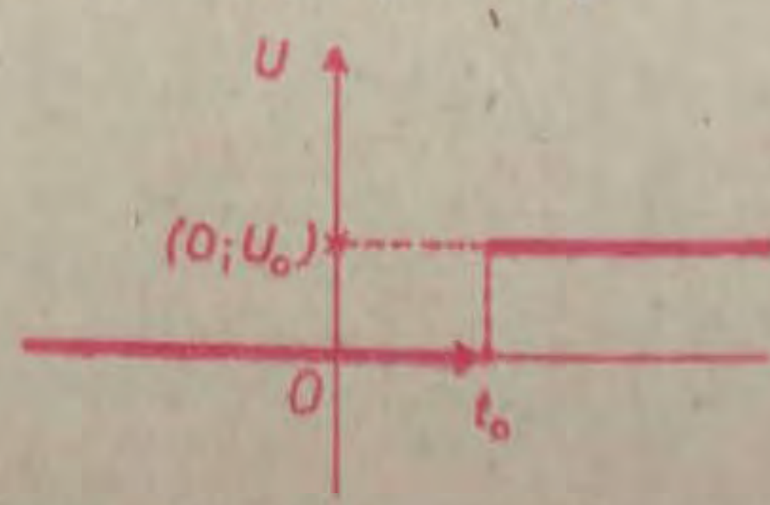


Fig. III.2

3) Funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } x \neq 2 \\ 3, \text{ dacă } x = 2 \end{cases}$$

are limită în orice punct, inclusiv în punctul $x = 2$, dar intuitiv ea nu poate fi considerată continuă în punctul $x = 2$ (figura III.3).

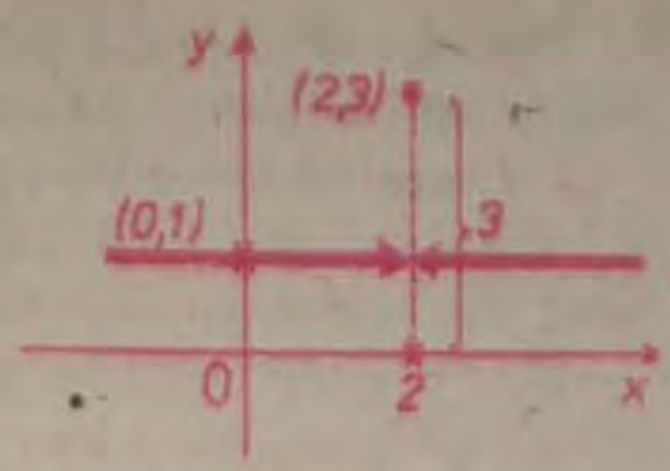


Fig. III.3

4) Dacă $f : E \to \mathbf{R}$ este o funcție și $a \in E$ $(E \subset \mathbf{R})$ este un punct fixat, calculul lui $f(a)$ poate prezenta mari dificultăți în unele cazuri. Din acest motiv este câteodată util de a se proceda în modul următor: se consideră o aproximare $b \approx a$, $b \in E$ și se calculează $f(b)$. Întrebarea naturală care se pune este: aproximează oare $f(b)$ pe $f(a)$? Dacă da, putem evalua eroarea comisă? Sau putem alege o aproximare $b \approx a$ suficient de bună astfel încât eroarea $|f(b) - f(a)|$ să fie mai mică decât un număr pozitiv arbitrar fixat dinainte?

Răspunsul la aceste întrebări este afirmativ dacă f verifică așa-numita proprietate de a fi continuă în punctul a, proprietate ce va fi definită în cele ce urmează.

1.2. Noțiunea de funcție continuă într-un punct

Vom fixa în cele ce urmează următoarele entități:

a) o funcție reală $f : E \to \mathbf{R}$ $(E \subset \mathbf{R})$;

b) un punct a care aparține lui E.

Ne va interesa nu numai comportarea lui f în vecinătatea punctului a, dar și în punctul a.

DEFINIȚIA III. 1. Funcția f se numește **continuă** în punctul a, dacă pentru orice vecinătate V a punctului $f(a)$ există o vecinătate U a punctului a astfel încât din faptul că $x \in U \cap E$ să rezulte $f(x) \in V$.

Dacă funcția f nu este continuă în punctul a ea se numește **discontinuă** în acel punct. Dacă a este un punct izolat al lui E (adică există o vecinătate U a lui a astfel încât $U \cap E = \{a\}$), atunci condiția anterioară este îndeplinită automat și f rezultă continuă în punctul a.

Să presupunem acum nu numai că $a \in E$, dar că a este și un punct de acumulare pentru E (deci există un șir de puncte $a_n \in E \setminus \{a\}$, astfel încât $a_n \to a$). Atunci definiția III.1 este echivalentă (folosind definiția II.4) cu faptul că limita funcției f în punctul a există și este egală cu $f(a)$, adică

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a). \tag{1}$$

În cazul când $E = [\alpha, \beta]$, faptul că f este continuă în punctul α revine la aceea că există limita $\lim\limits_{x \to \alpha, x > \alpha} f(x)$ și aceasta este egală cu $f(\alpha)$. În mod similar, f este continuă în punctul β dacă și numai dacă $\lim\limits_{x \to \beta, x < \beta} f(x)$ există și este egală cu $f(\beta)$.

Dacă funcția f este continuă în fiecare punct al mulțimii E, atunci ea se numește **continuă pe mulțimea** E.

Reţinem că pentru a pune problema continuităţii sau discontinuităţii unei funcţii într-un punct este necesar ca funcţia să fie definită în acel punct.

Un rezultat important îl constituie

TEOREMA III. 1. *(de caracterizare a continuităţii într-un punct).* **Fie $f : E \to \mathbf{R}$ şi $a \in E$. Sunt echivalente următoarele afirmaţii:**

1°. Funcţia este continuă în punctul a;

2°. Pentru orice şir $x_n \to a$, $x_n \in E$, $n \geq 0$, şirul $(f(x_n))_{n \geq 0}$ este convergent şi are limita $f(a)$;

3°. Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ depinzând de ε astfel încât din faptul că $|x - a| < \delta$, $x \in E$ să rezulte $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Dacă a este un punct izolat al mulţimii E, atunci afirmaţiile teoremei sunt verificate întotdeauna. Dacă a nu este un punct izolat al mulţimii E, demonstraţia repetă pe cea dată la teorema II.6, pag. 53, 55 (echivalenţa condiţiilor a, b, c), înlocuind l cu $f(a)$, şi nu o vom relua aici.

Avantajul de a dispune de mai multe proprietăţi echivalente constă în faptul că unele rezultate privind funcţiile continue se demonstrează mai simplu utilizând una sau alta din caracterizările pe care le avem acum la îndemână. Afirmaţia 3° se mai poate enunţa astfel: pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$, astfel încât de îndată ce x este o δ-aproximare pentru a, $f(x)$ să fie o ε-aproximare a lui $f(a)$.

Să remarcăm că proprietatea de continuitate a unei funcţii într-un punct este locală, depinzând doar de valorile ei într-o vecinătate a punctului.

O funcţie poate să fie continuă într-un punct a şi discontinuă într-un punct oricât de apropiat de a.

Un alt fapt remarcabil îl constituie proprietatea unei funcţii continue de „păstrare a semnului pe o vecinătate", anume: **Dacă $f : E \to \mathbf{R}$ este continuă în a şi $f(a) > 0$ (respectiv $f(a) < 0$), atunci există o vecinătate U a punctului a astfel încât $f(x) > 0$ (respectiv $f(x) < 0$) pentru orice $x \in U \cap E$.** Într-adevăr, să notăm $\lambda = f(a)$ şi să presupunem $\lambda > 0$; alegând vecinătatea $V = \left(\frac{\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}\right)$ a punctului λ, există o vecinătate U a lui a astfel încât pentru orice $x \in U \cap E$ să avem $f(x) \in V$, adică $f(x) > \frac{\lambda}{2} > 0$ (se procedează similar dacă $\lambda < 0$).

Presupunem că viteza unui mobil este funcţie continuă de timp. Dacă este strict pozitivă la un moment t_0, ea rămâne strict pozitivă într-o vecinătate a lui t_0 (în particular, mobilul nu poate fi oprit instantaneu, ceea ce explică de ce proprietatea anterioară este numită proprietatea de inerţie a funcţiilor continue).

Înainte de a trece la exemple, stabilim un criteriu util de continuitate, folosind limitele laterale. Fie $f : E \to \mathbf{R}$ şi $a \in E$. Dacă în punctul a există limita la stânga $f(a - 0)$ şi în plus $f(a - 0) = f(a)$, atunci se spune că f este *continuă la stânga* în punctul a. În mod similar, dacă există $f(a + 0)$ şi $f(a + 0) = f(a)$, atunci funcţia f se numeşte *continuă la dreapta* în a.

Are loc un rezultat analog teoremei III.1 pentru funcțiile continue la dreapta (respectiv la stânga), pe care nu-l mai explicităm și care se demonstrează (cu modificări evidente) asemănător teoremei III. 1.

Trebuie remarcat că, dacă $E = [\alpha, \beta]$, atunci continuitatea funcției f în punctul α (respectiv β) este echivalentă cu continuitatea la dreapta în punctul α (respectiv la stânga în punctul β) a funcției f. Se poate întâmpla ca f să fie continuă la stânga în α fără a fi continuă la dreapta, sau invers. De exemplu, funcția $f(x) = x, \begin{cases} x, \text{ dacă } x \leqslant 1 \\ 2, \text{ dacă } x > 1 \end{cases}$ este continuă la stânga în punctul $a = 1$, dar nu este continuă la dreapta în acel punct. Dacă însă f este continuă și la stânga și la dreapta în punctul a, atunci, raționând ca la teorema II.7, rezultă condiția (1) îndeplinită și deci f este continuă în a, ceea ce arată coerența definițiilor date.

Așadar, dacă pentru o funcție $f : E \to \mathbf{R}$ și pentru un punct $a \in E$, care este punct de acumulare pentru $E \cap (-\infty, a)$ și pentru $E \cap (a, \infty)$, există $f(a-0)$ și $f(a+0)$, atunci

f este continuă în a dacă și numai dacă $f(a-0) = f(a+0) = f(a)$.

Observație. Se poate pune următoarea întrebare: dacă $g : E \to \mathbf{R}$ este o funcție continuă pe E și dacă $b \notin E$, există sau nu o funcție $G : E \cup \{b\} \to \mathbf{R}$ astfel încât $G(x) = g(x)$, $\forall x \in E$ și G să fie continuă în punctul b? În caz afirmativ, se spune că g este *prelungită prin continuitate în punctul b*. Remarcăm că dacă există și este finită limita $l = \lim\limits_{x \to b} g(x)$, atunci definind $G(b) = l$, funcția G prelungește funcția g prin continuitate în punctul b.

Dacă o funcție $f : E \to \mathbf{R}$ nu este continuă într-un punct $a \in E$, deși limitele laterale în a există și sunt finite, atunci se spune că a este un *punct de discontinuitate de prima speță* pentru funcția f; punctele de discontinuitate care nu sunt de prima speță se numesc *de speța a doua*. Se poate arăta că *discontinuitățile unei funcții monotone pot fi numai de prima speță.*

Exemple

1) Funcțiile polinomiale, raționale, trigonometrice, exponențiale etc. sunt continue pe orice interval pe care sunt definite. De exemplu, funcțiile $f, g, h, \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 - x + 7$, $g(x) = \sin 2x$, $h(x) = e^x$ sunt continue pe $\mathbf{R}$, iar funcția $u : (-\infty, 0] \to \mathbf{R}$, $u(x) = \sqrt{-x}$ este continuă pe intervalul $(-\infty, 0]$.

2) Funcția-modul $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = |x|$, este continuă în punctul $a = 0$, deoarece $f(a-0) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} (-x) = 0$, $f(a+0) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x = 0$ și $f(a) = |0| = 0$.

Ca un alt exemplu, studiem continuitatea funcției $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, definită prin

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{, dacă } 0 < x \leqslant 1 \\ 2x + 1, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$$

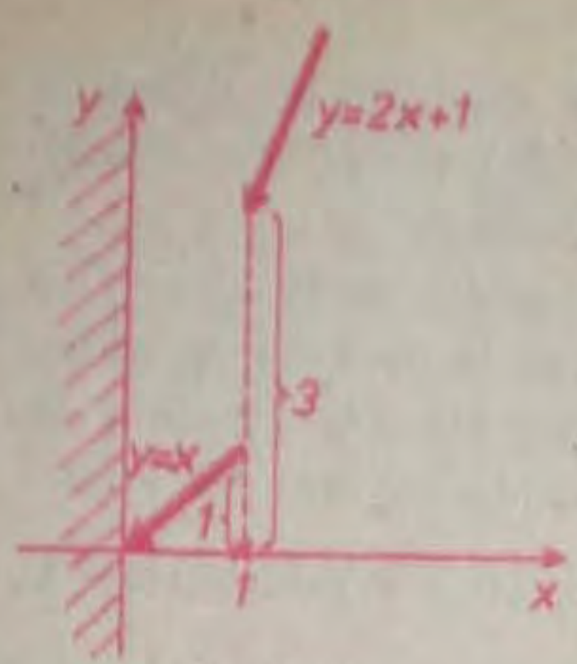


Fig.III.4

Pe intervalul deschis $(0, 1)$ avem $f(x) = x$ şi f este continuă, iar pe intervalul $(1, \infty)$, $f(x) = 2x + 1$ este, de asemenea, continuă. Rămâne de studiat continuitatea în punctul $x = 1$. Dar $f(1-0) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} x = 1$, $f(1+0) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} (2x+1) = 3$ şi $f(1) = 1$. Deci f nu este continuă în punctul $x = 1$ (acest punct este un punct de discontinuitate de prima speţă pentru f). Graficul lui f este indicat în figura III.4.

3) Reluăm exemplele date în 1.1. În exemplul 1, $s(t) = v \cdot t$ este funcţie elementară pentru $t > 0$, deci este funcţie continuă. În punctul $t = 0$ ea este, de asemenea, continuă. În exemplul 2, funcţia U este constantă, deci continuă pe fiecare din intervalele $(-\infty, t_0)$, (t_0, ∞), iar în punctul $t = t_0$ este discontinuă (de prima speţă). În fine, funcţia f având graficul în figura III.3 este continuă pe mulţimea $\mathbf{R}\setminus\{2\}$, iar în punctul $a = 2$ avem $f(2-0) = f(2+0) = 1$ în timp ce $f(2) = 3$, deci f nu este continuă în acest punct (având o discontinuitate de prima speţă).

4) Considerăm funcţia $f : \mathbf{R}\setminus\{1\} \to \mathbf{R}$, definită prin

$$f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ dacă } x < 1 \\ 0, \text{ dacă } x > 1 \end{cases}.$$

Deoarece $f(1-0) = 1$, $f(1+0) = 0$, ea nu poate fi prelungită prin continuitate în punctul $x = 1$. În schimb, funcţia $g : \mathbf{R}\setminus\{1\} \to \mathbf{R}$,

$$g(x) = \begin{cases} x^2, \text{ dacă } x < 1 \\ 2 - x, \text{ dacă } x > 1 \end{cases}$$

poate fi prelungită prin continuitate în punctul $x = 1$ (definind $g(1) = 1$) (figura III.5).

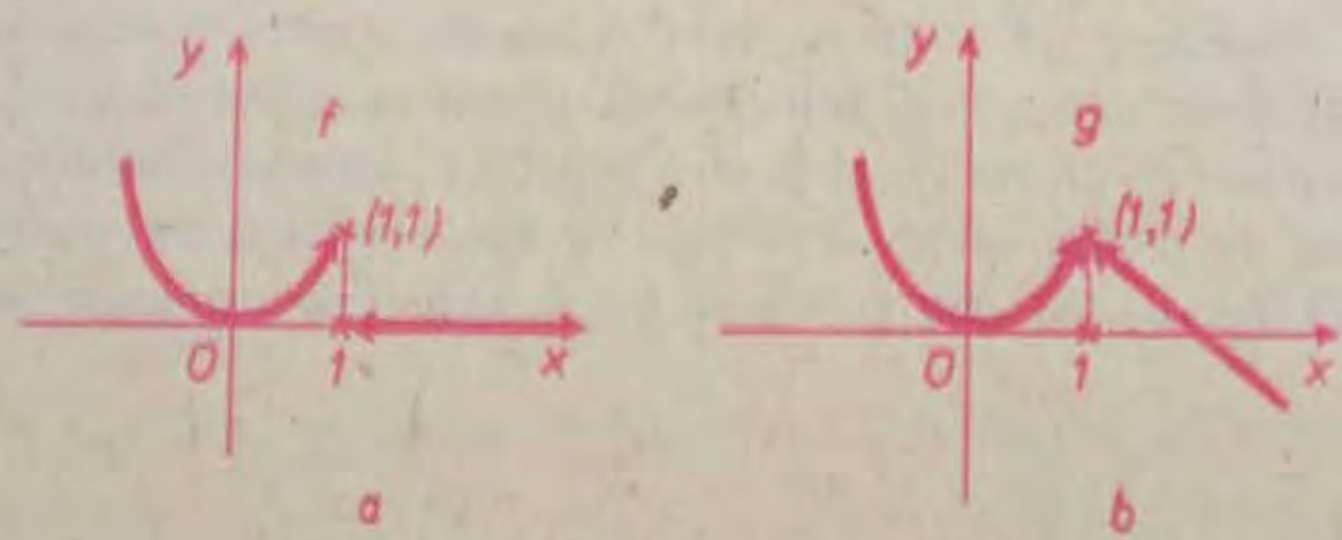


Fig. III.5

5) Dăm un exemplu de funcţie care nu este continuă în nici un punct, anume funcţia lui Dirichlet $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } x \text{ este raţional} \\ 0, \text{ dacă } x \text{ este iraţional} \end{cases}$$

Graficul lui φ nu poate fi trasat.

Dacă $a \in \mathbf{Q}$, alegem $x'_n \to a$ (cu toţi $x'_n \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$), atunci $\varphi(x'_n) = 0 \to 0$ pentru $n \to \infty$, în timp ce $\varphi(a) = 1$. Similar, dacă $a \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$, alegem $x''_n \to a$ (cu toţi $x''_n \in \mathbf{Q}$) şi atunci $\varphi(x''_n) = 1$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(x''_n) = 1$, în timp ce $\varphi(a) = 0$. Aşadar, φ nu este continuă în nici un punct $a \in \mathbf{R}$. Toate punctele dreptei reale sunt discontinuităţi de speţa a doua pentru φ

1.3. Operații cu funcții continue

TEOREMA III. 2. Fie $f, g : E \to \mathbf{R}$ $(E \subset \mathbf{R})$ funcții continue într-un punct $a \in E$, respectiv pe E. Atunci funcțiile $f+g$, $f-g$, fg sunt continue în a, respectiv pe E; dacă $g(a) \neq 0$, atunci $\frac{f}{g}$ este continuă în a [respectiv pe $E \setminus \{x \in E \mid g(x) = 0\}$].

Demonstrație. Conform observației făcute după definiția III.1, ne vom ocupa doar de cazul în care a este punct de acumulare al mulțimii E. Conform ipotezei, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ și $\lim\limits_{x \to a} g(x) = g(a)$. Atunci

$$\lim_{x \to a} (f \pm g)(x) = \lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) = f(a) \pm g(a),$$

adică $\lim\limits_{x \to a} (f \pm g)(x) = (f \pm g)(a)$ și astfel am probat relația (1) din definiția III.1.

Similar se procedează pentru $\frac{f}{g}$.

Exemple

1) Funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sin x + x^2$ este continuă pe R ca sumă a două funcții continue.

2) Funcția $f(x) = \operatorname{tg} x$ este continuă pe intervalul $I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ pentru că este câtul $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$ a două funcții continue și numitorul nu se anulează pe I.

(De altfel, în ambele cazuri funcțiile considerate sunt elementare).

3) Dacă $f : E \to \mathbf{R}$ este continuă și $\lambda \in \mathbf{R}$, atunci λf este continuă (ca produsul dintre f și o funcție constantă). Orice funcție polinomială P, $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ este continuă pentru că este o sumă finită de funcții continue, anume $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \cdot (1_{\mathbf{R}})^k$.

TEOREMA III. 3. Fie $f : E_1 \to E_2$, $g : E_2 \to \mathbf{R}$ $(E_1, E_2 \subset \mathbf{R})$ două funcții reale și $h = g \circ f$ funcția lor compusă. Dacă f este continuă într-un punct $a \in E_1$ și g este continuă în punctul $b = f(a)$, atunci h este continuă în punctul a.

Dacă f este continuă pe E_1 și g continuă pe E_2, atunci h este continuă pe E_1.

Demonstrație. Fie orice șir $x_n \to a$ în E_1. Trebuie arătat că $h(x_n) \to h(a)$. Dar $f(x_n) \to b = f(a)$ în E_2, deoarece f este continuă în a și, mai departe, $g(f(x_n)) \to g(b)$, deoarece g este continuă în b, adică $h(x_n) \to g(b) = g(f(a)) = h(a)$.

Ultima parte a enunțului este o consecință a primei părți.

Cu aceeași demonstrație se poate stabili o proprietate mai generală, anume: dacă a este un punct de acumulare pentru E_1 și dacă există $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, $b \in E_2$, iar g este continuă în b, atunci există $\lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = g(b)$. Plusul de

generalitate este dat de faptul că punctul a poate să nu aparţină lui E_1. Relaţia anterioară se mai scrie

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(\lim_{x\to a} f(x))$$

şi se citeşte: *orice funcţie continuă comută cu limita.*

Considerăm, de asemenea, următorul caz: fie a punct de acumulare al mulţimii E_1 (dar a poate să nu aparţină lui E_1) şi fie $\lim_{x\to a} f(x) = b$, b fiind punct de acumulare al mulţimii E_2; dacă există o vecinătate V a lui a astfel încât pentru $x \in (V \cap E_1) \setminus \{a\}$, $f(x) \neq b$ şi dacă $\lim_{y\to b} g(y)$ există (în $\overline{\mathbf{R}}$), atunci există $\lim_{x\to a} g(f(x)) = \lim_{y\to b} g(y)$.

Demonstraţia se face exact ca mai înainte.

Exemple

1) Luând $g(u) = e^u$, rezultă $\lim_{x\to a} e^{f(x)} = e^{\lim_{x\to a} f(x)}$ şi pentru $g = \sin f(x)$, $\lim_{x\to c} \sin f(x) = \sin \lim_{x\to a} f(x)$ etc.

2) Funcţia $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $h(x) = e^{-x^2}$ este continuă pe $\mathbf{R}$, deoarece este obţinută prin compunerea funcţiilor continue $x \mapsto u = -x^2$ şi $u \mapsto e^u$.

3) Considerăm $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$, $f(x) = \frac{1}{x}$ şi $g : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $g(y) = \ln y$, $a = \infty$.

Atunci $\lim_{x\to\infty} \ln \frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} g(f(x)) = \lim_{y\to 0} \ln y = -\infty$.

Teoremele III.2, III.3 se extind la sume, produse, compuneri ale unui număr finit oarecare de funcţii continue. De asemenea, dacă f, g sunt continue pe o mulţime E, atunci se pot considera funcţiile, definite în I.2.2:

$$\begin{aligned} |f| &: E \to \mathbf{R}, & x &\mapsto |f(x)|\,; \\ \max(f, g) &: E \to \mathbf{R}, & x &\mapsto \max(f(x), g(x)); \\ \min(f, g) &: E \to \mathbf{R}, & x &\mapsto \min(f(x), g(x)). \end{aligned}$$

Teorema care urmează arată că aceste funcţii sunt. de asemenea, continue.

TEOREMA III. 4. Dacă $f, g : E \to \mathbf{R}$ sunt funcţii continue în punctul $a \in E$ (respectiv pe mulţimea E), atunci $|f|$, $\max(f, g)$ şi $\min(f, g)$ au aceeaşi proprietate.

Demonstraţie. Funcţia $|f|$ este compunerea $g \circ f$ a funcţiilor continue $f : E \to \mathbf{R}$, $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ unde $g(x) = |x|$ este funcţia-modul, deci $|f| = f \circ g$ este continuă; apoi, este suficient să observăm că $\max(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$ şi $\min(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$.

De remarcat că dacă $|f|$ este funcţie continuă, nu rezultă că f are această proprietate, aşa cum arată exemplul următor:

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } x \in \mathbf{Q} \\ -1, \text{ dacă } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}, \text{ unde } |f| = 1.$$

EXERCIŢII (capitolul III, § 1)

1. a) Să se arate că funcţia $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ este continuă în punctele $x = 1$ şi $x = -5$.

b) Să se arate că funcţia $f : (-\infty, 2] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{2 - x}$ este continuă la stânga în punctul $x = 2$.

2. Fie $f : [0, 3] \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$. Să se arate că există $\delta > 0$ astfel încât pentru orice x cu $|x - 1| < \delta$ să avem $|f(x) - 1| < \frac{1}{10}$; rezultă de aici că f este continuă în punctul $x = 1$?

3. Care din funcţiile următoare $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sunt continue pe $\mathbf{R}$:

a) $f(x) = |x - 1|$;

b) $f(x) = x + |x|$;

c) $f(x) = \begin{cases} x, \text{ dacă } x < 0 \\ 2x + 1, \text{ dacă } x \geq 0 \end{cases}$;

d) $f(x) = x^3 - \sqrt{x^3 + 1}$;

e) $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, \text{ dacă } x \neq 0 \\ 0, \text{ dacă } x = 0 \end{cases}$;

f) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, \text{ dacă } x \neq 0 \\ 2, \text{ dacă } x = 0 \end{cases}$;

g) $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x)$;

h) $f(x) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } x < 0 \\ x, \text{ dacă } x \geq 0 \end{cases}$?

4. Să se determine punctele de discontinuitate ale funcţiilor $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definite prin

$f(x) = \begin{cases} x, \text{ dacă } x \text{ este raţional} \\ 2x, \text{ dacă } x \text{ este iraţional} \end{cases}$; $\quad f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ dacă } x \in \mathbf{Q} \\ 0, \text{ dacă } x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$.

5. Să se determine $a \in \mathbf{R}$ astfel încât funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} x+3, \text{ dacă } x \leq 3 \\ ax, \text{ dacă } x > 3 \end{cases}$ să fie continuă în punctul $x = 3$.

6. Să se determine constantele reale a şi b astfel încât funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) \to \begin{cases} x^2 + a, \text{ dacă } x \leq 2 \\ ax + b, \text{ dacă } x > 2 \end{cases}$$

să fie continuă pe $\mathbf{R}$ şi, în plus, să existe $\lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$.

7. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcţie astfel încât $|f(x) - x^2| \leq 2|x|$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Să se arate că $f(0) = 0$ şi că f este continuă în origine.

8. Să se arate că funcţiile

$$f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R},\ f(x) = \begin{cases} 2x, \text{ dacă } x < 0 \\ 2 - x, \text{ dacă } x > 0 \end{cases},$$

$$g : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R},\ g(x) = \begin{cases} x, \text{ dacă } x < 0 \\ \dfrac{1}{x}, \text{ dacă } x > 0 \end{cases}$$

nu pot fi prelungite prin continuitate în punctul $x = 0$.

9. Se consideră funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x}, \text{ dacă } x \neq 0 \\ 0, \text{ dacă } x = 0 \end{cases}$. Să se arate că:

a) în orice vecinătate a originii există puncte unde f se anulează şi puncte unde f ia valoarea 1;

b) pentru orice $A \in [-1, 1]$ există un şir de puncte $x_n \to 0$ astfel încât $f(x_n) \to A$;

c) nu există $f(0 - 0)$, $f(0 + 0)$, deci $x = 0$ este punct de discontinuitate de speţa a doua pentru f. Să se schiţeze graficul lui f.

10. Se consideră funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, \text{ dacă } x \neq 0 \\ 0, \text{ dacă } x = 0 \end{cases}$. Să se arate că:

a) f este continuă pe întreg $\mathbf{R}$;

b) în nici o vecinătate a originii, funcţia f nu este monotonă.

11. Funcţia $\rho : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ \rho(x) = \left[x + \dfrac{1}{2} \right]$ poartă numele de „funcţia de rotunjire"

a) Să se traseze graficul acestei funcţii şi să se indice punctele ei de discontinuitate.

b) Să se arate că „funcţia dinte" $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ \varphi(x) = |\rho(x) - x|$ are proprietăţile următoare: $\varphi(x) = |x|$ pentru $x \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2} \right]$, φ este periodică de perioadă 1, φ este continuă: să se traseze apoi graficul funcţiei φ.

12. Să se studieze continuitatea şi să se traseze graficul pentru funcţiile următoare ($n \in N$):

a) $f : (-1, 1) \to \mathbf{R},\ f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} x^n$; b) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{e^{nx}}{1 + e^{nx}}$;

c) $f : \mathbf{R} \setminus \{-1\} \to \mathbf{R},\ f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{x^n + x}{x^{2n} + 1}$; d) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{nx}{1 + |nx|}$.

13. Să se dea exemplu de două funcţii reale f, g discontinue pe un interval I astfel încât $f + g$ şi fg să fie continue pe I.

14. Să se arate că funcţia $\varphi(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $x \neq 0$ poate fi prelungită prin continuitate în punctul $x = 0$. Aceeaşi proprietate o are funcţia $\psi(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$ dar nu şi funcţia $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$.

§ 2. Proprietăţi ale funcţiilor continue pe un interval

Funcţiile continue pe intervale posedă unele proprietăţi generale care vor fi extrem de utile în continuare.

2.1. Proprietăţi de mărginire

În general, o funcţie continuă nu este mărginită. De exemplu, funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = x$ nu este mărginită superior. Ea este definită pe un interval nemărginit. Dar şi funcţia continuă $g : (0, 1] \to \mathbf{R}$, $g(x) = \frac{1}{x}$ nu este mărginită chiar dacă este definită pe un interval mărginit.

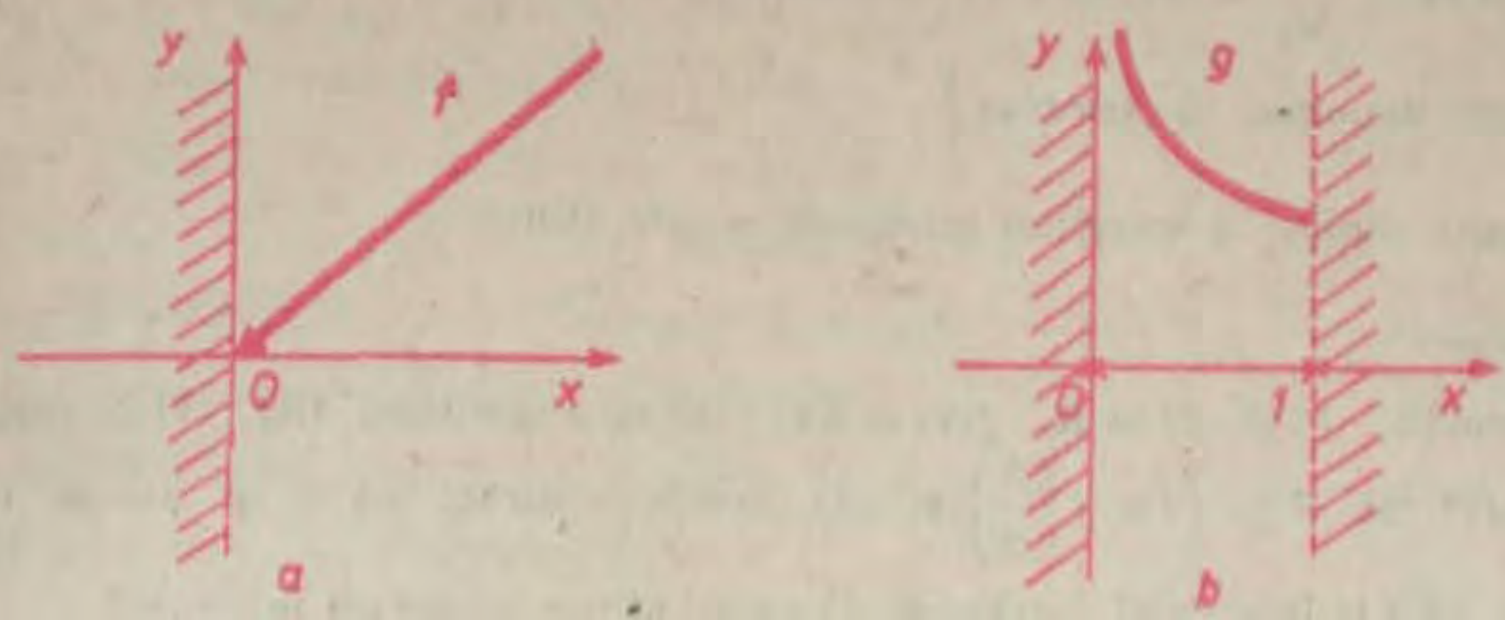


Fig. III.6

Să presupunem că $f : D \to \mathbf{R}$ este o funcţie mărginită şi fie m, M marginile lui f, $m = \inf\limits_{x \in D} f(x)$ şi $M = \sup\limits_{x \in D} f(x)$.

Se spune că f *îşi atinge marginile pe* D dacă există un punct $\alpha \in D$ astfel încât $m = f(\alpha)$ şi un punct $\beta \in D$ astfel încât $M = f(\beta)$. Pentru funcţia continuă $f : [0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = e^{-x}$, marginea inferioară este $m = 0$ şi nu este atinsă pentru că nu există $\alpha \geqslant 0$ astfel încât $e^{-\alpha} = 0$. Similar, pentru funcţia $g(x) = 1 - f(x)$, nu este atinsă marginea superioară $M = 1$.

Are loc totuşi următorul rezultat fundamental, iar exemplele anterioare arată că este esenţială condiţia de compacticitate pusă intervalului de definiţie.

TEOREMA III.5. *(teorema lui Weierstrass de mărginire).* **Orice funcţie continuă pe un interval compact este mărginită şi îşi atinge marginile.**

Demonstraţie. Fie $f : I \to \mathbf{R}$, $I = [a, b]$ o funcţie continuă.

Arătăm mai întâi că f este mărginită. Presupunem, prin absurd, că f nu ar fi mărginită, şi pentru a fixa ideile presupunem că f nu este mărginită superior. Atunci, rezultă că există un şir $(x_n)_{n \geqslant 0}$ de puncte din $[a, b]$, cu proprietatea că $f(x_n) = y_n \to \infty$. Şirul $(x_n)_{n \geqslant 0}$ fiind conţinut în $[a, b]$ este însă mărginit, deci aplicând lema lui Cesaró (pag. 47) deducem existenţa unui subşir convergent $(x_{k_n})_{n \geqslant 0}$ către un punct u care în mod necesar aparţine

lui $[a, b]$. Funcţia f este continuă în punctul u, deci $\lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = f(u)$, dar şirul $(y_{k_n})_{n\geq 0} = f(x_{k_n}))_{n\geq 0}$ ca subşir al unui şir, anume $(y_n)_{n\geq 0}$ ce tinde la infinit, va tinde el însuşi la infinit, adică $f(u) = \infty$, ceea ce este absurd căci funcţia f are valori în $\mathbf{R}$. f este mărginită superior. În mod similar se tratează cazul în care f ar fi presupusă nemărginită inferior.

Aşadar, am demonstrat că f este mărginită. Fie m, M marginile lui f pe intervalul $I = [a, b]$. Arătăm că există $\alpha \in I$ astfel încât $f(\alpha) = M$. În caz contrar, am avea $f(\alpha) \neq M$ pentru orice $\alpha \in I$ şi, ca atare, funcţia pozitivă $g : I \to \mathbf{R}$, $g(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$ este continuă pe I. Ea rezultă atunci mărginită, adică există $M_1 > 0$ astfel încât

$$0 < \frac{1}{M - f(x)} \leq M_1, \text{ pentru orice } x \in I.$$

De aici rezultă $f(x) \leq M - \dfrac{1}{M_1}$, $\forall x \in I$, ceea ce contrazice faptul că $M = \sup_{x\in I} f(x)$ $\left(\text{pentru că } M - \dfrac{1}{M_1} \text{ ar fi atunci un majorant pentru valorile lui } f \text{ şi, ca atare, } M \text{ nu ar fi cel mai mic majorant al acestora}\right)$.

Se arată similar că marginea inferioară m este atinsă.

Exemple:

1) Funcţia $f : [0, 3] \to \mathbf{R}$, $f(x) = 3x - x^2$ este continuă (fig. III.7, a); evident $m = 0 = f(0)$ şi $M = \dfrac{9}{4} = f\left(\dfrac{3}{2}\right)$ şi am verificat direct că f îşi atinge marginile. Restricţia lui f la intervalul deschis $(0, 3)$ nu îşi atinge marginea inferioară.

2) Funcţia continuă $g : (0, 1) \to \mathbf{R}$, $g(x) = x$ este mărginită, dar nu îşi atinge nici una din margini pe intervalul deschis $(0, 1)$ (fig. III.7, b).

3) Dacă $h : [a, b] \to \mathbf{R}$ este o funcţie monoton crescătoare, atunci $m = h(a)$, $M = h(b)$, adică marginile sunt atinse la capetele intervalului. Similar, dacă h este monoton descrescătoare, avem $m = h(b)$, $M = h(a)$ (fără a mai fi nevoie de ipoteza de continuitate a lui f).

4) Trebuie remarcat că punctele în care funcţia f îşi atinge marginile nu sunt neapărat unice. În exemplul 1, $m = f(0) = f(3)$, dar se pot da uşor exemple de funcţii continue neconstante având marginile atinse chiar într-o infinitate de puncte.

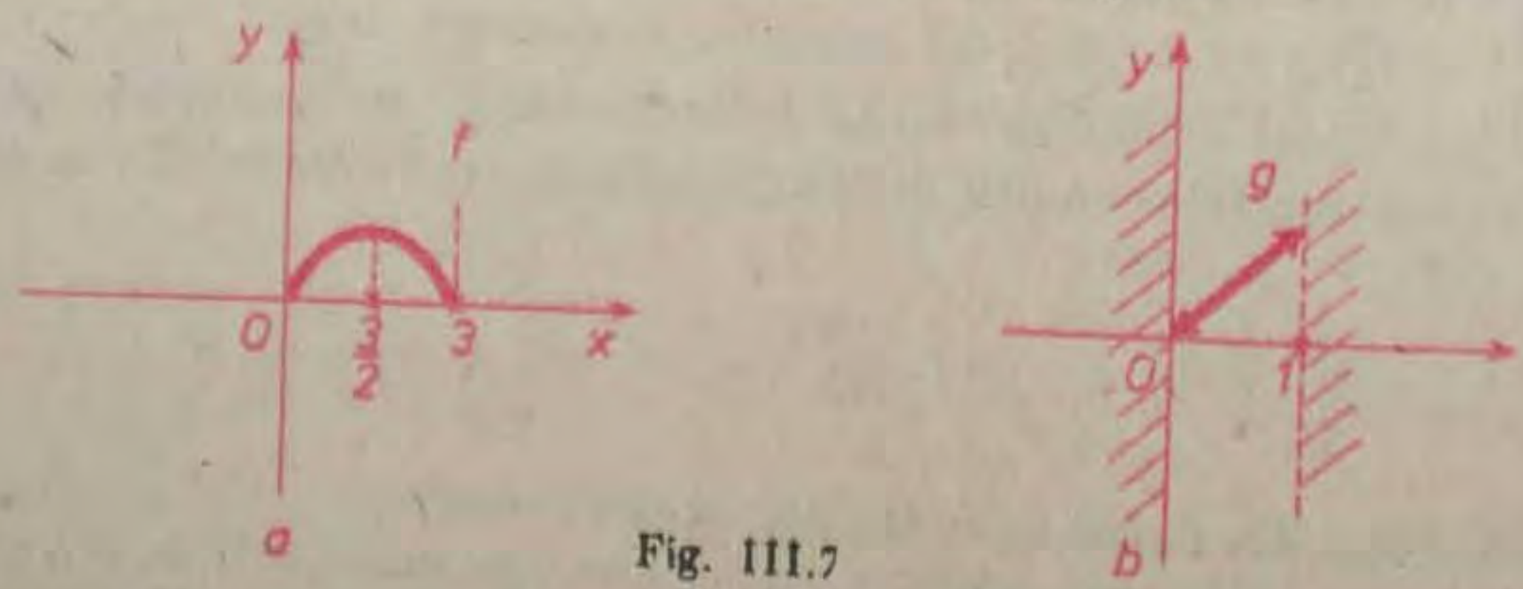


Fig. III.7

Presupunând viteza unui automobil continuă, ca funcţie de timp, din teorema III.5 rezultă că în orice interval de timp I compact există o cea mai mare şi o cea mai mică valoare a vitezei (extremele globale ale vitezei pe I).

2.2 Proprietatea valorilor intermediare (a lui Darboux)

O proprietate a funcţiilor continue care apare evidentă din punct de vedere intuitiv şi poate părea caracteristică funcţiilor continue (ceea ce nu este adevărat) este aceea de a „nu sări valori".

DEFINIŢIA III. 2. Fie I un interval. Se spune că o funcţie $f : I \to \mathbf{R}$ are proprietatea lui Darboux pe intervalul I dacă, pentru orice puncte $x_1 < x_2$ din I şi oricare ar fi numărul c situat între $f(x_1)$ şi $f(x_2)$, există cel puţin un punct $\xi \in (x_1, x_2)$, astfel încât $f(\xi) = c$.

Cu alte cuvinte, o dată cu valorile luate în două puncte ale intervalului I, funcţia $x \mapsto f(x)$ ia şi toate valorile intermediare, atunci când x parcurge intervalul dintre cele două puncte. Trebuie remarcat că această proprietate nu este legată de compacitatea intervalului de definiţie.

Intuitiv, dacă f este o funcţie continuă pe un interval $[a, b]$ şi $f(a) \neq f(b)$, atunci orice dreaptă $y = c$ situată între dreptele $y = f(a)$, $y = f(b)$ intersectează graficul neîntrerupt al lui f cel puţin o dată (figura III.8). Dar aceasta nu poate constitui o demonstraţie.

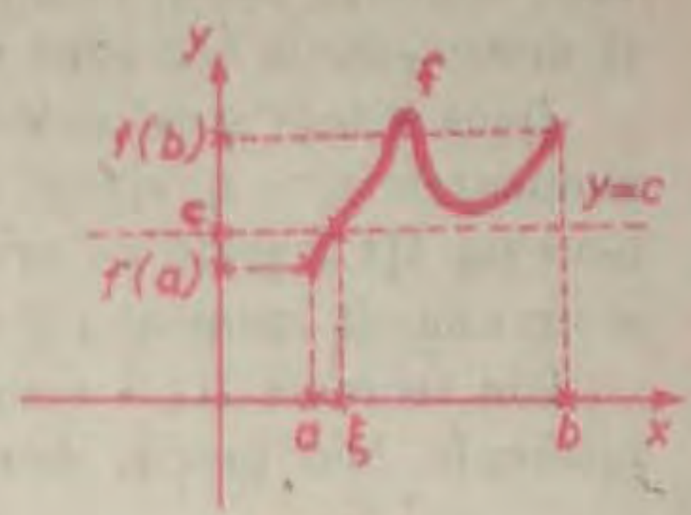


Fig. III.8

TEOREMA III. 6. *(a valorilor intermediare).* Orice funcţie continuă pe un interval are proprietatea lui Darboux pe acel interval.

Demonstraţie. Stabilim în prealabil o lemă, importantă şi prin ea însăşi.

LEMĂ: Dacă $\varphi : [a, b] \to \mathbf{R}$ este o funcţie continuă şi $\varphi(a) \cdot \varphi(b) < 0$, atunci există cel puţin un punct $\xi \in (a, b)$ astfel încât $\varphi(\xi) = 0$.

Demonstraţia lemei. Pentru a fixa ideile, să presupunem că $\varphi(a) < 0$ şi $\varphi(b) > 0$. Fie $A = \{x \in [a, b] \mid \varphi(x) \leqslant 0\}$. Mulţimea A nu este vidă (căci, conform ipotezei, $\varphi(a) < 0$, deci $a \in A$) şi este mărginită (căci $A \subset [a, b]$). Atunci, în conformitate cu axioma lui Cantor, există $\xi = \sup A$. Desigur, $\xi \in [a, b]$. Afirmăm că $\varphi(\xi) = 0$. Într-adevăr, sau $\xi \in A$ sau $\xi \notin A$.

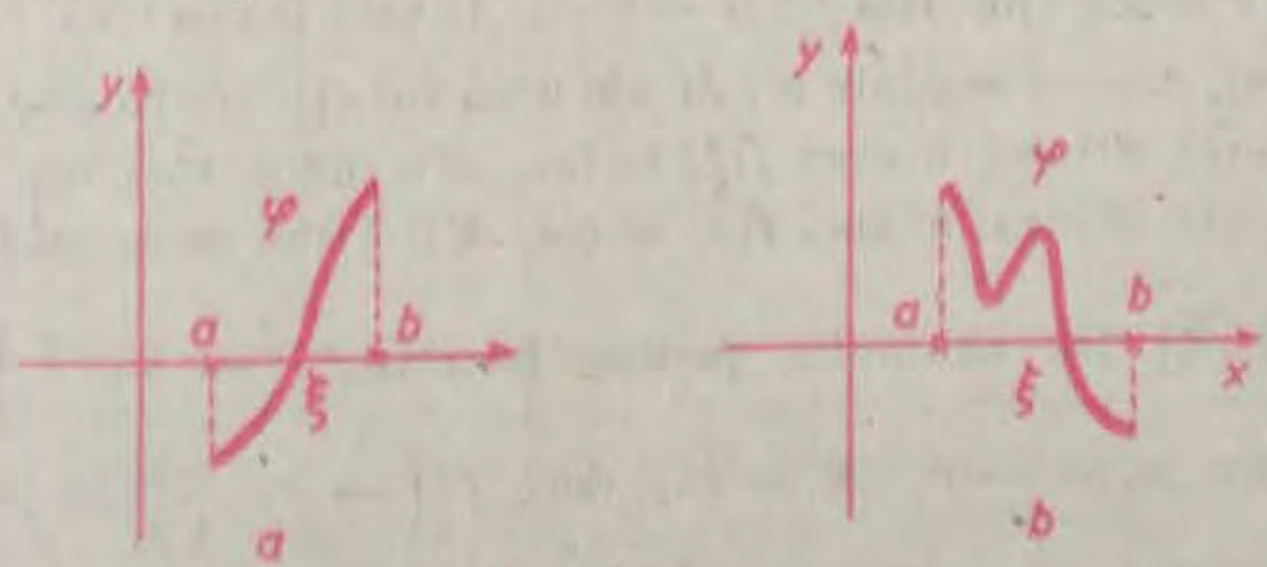


Fig. III.9

Dacă $\xi \notin A$, atunci $\varphi(\xi) > 0$ şi, conform ex. 5 pag. 46, există un şir $x_n \in A$, $x_n \to \xi$; avem $\varphi(x_n) \leqslant 0$ şi φ fiind continuă, $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \varphi(\xi)$. Rezultă că $\varphi(\xi) \leqslant 0$, contradicţie. Rămâne cazul $\xi \in A$, deci $\varphi(\xi) \leqslant 0$. Dacă $\varphi(\xi) < 0$, atunci din continuitatea lui φ în punctul ξ rezultă existenţa unei vecinătăţi U a punctului ξ astfel ca $x \in U$ să implice $\varphi(x) < 0$, deci există în particular puncte $x > \xi$ pentru care $\varphi(x) < 0$ (deci $x \in A$), ceea ce contrazice faptul că $\xi = \sup A$. Aşadar, în mod necesar, $\varphi(\xi) = 0$.

Trecem la demonstraţia propriu-zisă a teoremei.

Fie deci $f : I \to \mathbf{R}$ o funcţie continuă, $x_1 < x_2$ puncte oarecare din intervalul I şi c un număr situat între $f(x_1)$ şi $f(x_2)$. Considerând funcţia $\varphi : I \to \mathbf{R}$, definită prin $\varphi(x) = f(x) - c$, avem $\varphi(x_1) \cdot \varphi(x_2) = (f(x_1) - c) \cdot (f(x_2) - c) \leqslant 0$ deci, conform lemei, există $\xi \in [x_1, x_2]$ astfel încât $\varphi(\xi) = 0$, adică $f(\xi) = c$, şi demonstraţia teoremei este încheiată.

Dacă viteza unui automobil este continuă ca funcţie de timp şi dacă la momentele $t_1 < t_2$ viteza automobilului are valori distincte $v_1 \neq v_2$, atunci teorema III.7 arată că orice viteză intermediară (între v_1 şi v_2) este atinsă la un anumit moment $t \in (t_1, t_2)$.

Din teorema III.6 rezultă că funcţiile continue transformă intervalele în intervale. Mai precis, demonstrăm următorul

COROLAR. Fie $I \subset \mathbf{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbf{R}$ o funcţie continuă pe I. Mulţimea $J = f(I)$ este, de asemenea, un interval.

Demonstraţie. Avem de arătat că dacă α, β aparţin lui J şi $\alpha < c < \beta$, atunci $c \in J$. Dacă $\alpha = f(x_1)$, $\beta = f(x_2)$ cu $x_1, x_2 \in I$ şi $x_1 \neq x_2$. Dar, o dată cu valorile α, β, funcţia f ia şi valoarea intermediară c, adică există ξ între x_1 şi x_2 astfel încât $f(\xi) = c$, deci $c \in J$.

Cu ajutorul corolarului de mai sus se demonstrează riguros surjectivitatea unor funcţii elementare. De exemplu: fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sin x$; din faptul că $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ şi $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ şi din continuitatea funcţiei f rezultă că putem aplica teorema valorilor intermediare. Prin urmare, $f\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [-1, +1]$, adică aplicaţia $f : \mathbf{R} \to [-1, 1]$ este surjectivă.

În general, dacă marginile m, M ale unei funcţii continue $f : I \to \mathbf{R}$ pe un interval I sunt atinse, atunci $f(I) = [m, M]$; dacă nici una din marginile funcţiei nu este atinsă, atunci $f(I) = (m, M)$. [Aici $m = \inf f$ şi $M = \sup\limits_I f$, calculate în $\overline{\mathbf{R}}$]. De exemplu, pentru funcţia $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$, avem $m = -\infty$, $M = \infty$, deci $f\left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right) = (-\infty, \infty)$ şi f rezultă bijectivă.

Observații. 1) Dacă $I = [a, b]$ și f este continuă pe I, nu rezultă, în general, că m, M sunt atinse chiar în capetele intervalului I.

2) Dacă I este un interval compact și $f : I \to \mathbf{R}$ continuă, atunci intervalul $J = f(I)$ este compact, anume $J = [m, M]$. Dacă $I = (a, b)$ este un interval deschis și $f : I \to \mathbf{R}$ este continuă, nu putem afirma despre $J = f(I)$ decât că este un interval, fără a putea specifica dacă este închis, deschis, sau închis la un capăt; se poate întâmpla ca intervalul J să fie compact, sau nemărginit, cum vă puteți convinge singuri pe exemple simple.

2.3. Inversarea funcțiilor continue

Suntem acum în măsură să ne ocupăm de problema inversării funcțiilor continue.

Fie $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție injectivă pe un interval I. Atunci, notând $J = f(I) = \{f(x) \mid x \in I\}$, este definită o aplicație bijectivă.

$$f : I \to J \text{ (notat tot cu } f\text{)}.$$

Conform corolarului precedent, dacă f este continuă, atunci J este un interval. Arătăm că *dacă o funcție $f : I \to \mathbf{R}$ este continuă și injectivă pe un interval I, atunci f este în mod necesar strict monotonă.* Într-adevăr, în caz contrar ar exista cel puțin trei puncte $x_1 < x_2 < x_3$ în I astfel încât

$$f(x_1) > f(x_2),\ f(x_3) < f(x_2) \quad \text{(sau}$$
$$f(x_1) < f(x_2),\ f(x_3) > f(x_2)).$$

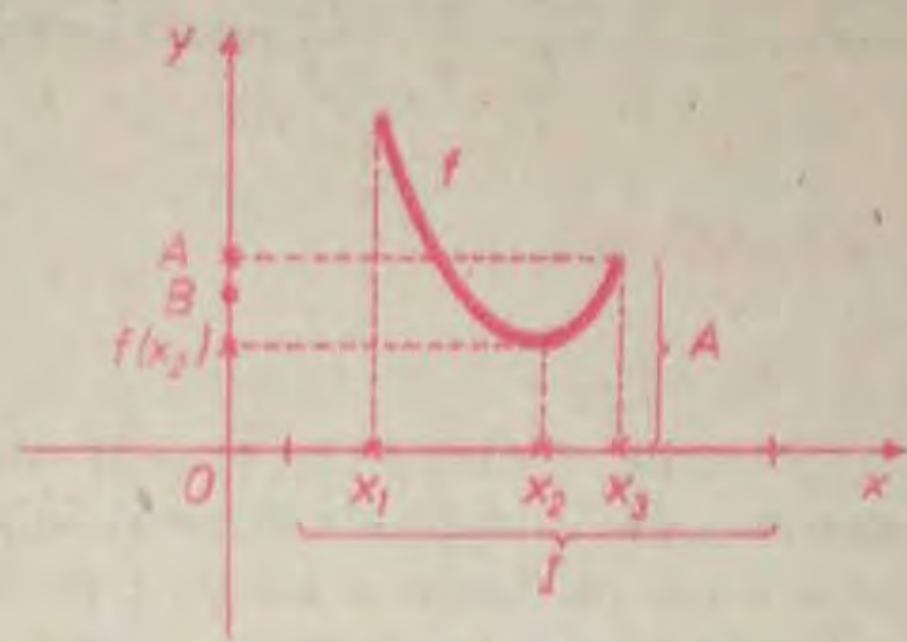


Fig. III.10

Ne situăm în primul caz, celălalt caz tratându-se analog (fig. III.10). Fie atunci $A = \min(f(x_1), f(x_3))$ și $B = \frac{A + f(x_2)}{2}$. Aplicând teorema valorilor intermediare, există $\xi_1 \in (x_1, x_2)$ și $\xi_2 \in (x_2, x_3)$ astfel încât $f(\xi_1) = B$, $f(\xi_2) = B$. Așadar, $f(\xi_1) = f(\xi_2)$ și cum f este injectivă, rezultă $\xi_1 = \xi_2$, ceea ce este absurd.

Enunțăm și demonstrăm ultimul rezultat important al acestui capitol. În esență el arată că o funcție continuă pe un interval este inversabilă dacă și numai dacă este strict monotonă și atunci inversa ei este continuă și strict monotonă, adică inversarea funcțiilor continue se face pe intervale de strictă monotonie. Mai precis, are loc:

TEOREMA III.7. Fie f o funcție continuă pe un interval I și $J = f(I)$. Funcția $f : I \to J$ este bijectivă dacă și numai dacă este strict monotonă și în acest caz, funcția $f^{-1} : J \to I$ este continuă și strict monotonă.

Demonstrație Prima parte a teoremei a fost demonstrată anterior (pentru că este evident că o funcție strict monotonă pe I este injectivă). Pentru a fixa ideile, presupunem că f este strict crescătoare pe I. Atunci, rezultă că f^{-1} este strict crescătoare pe J (deoarece dacă $u_1 < u_2$ în J, $u_1 = f(x_1)$, $u_2 = f(x_2)$, avem neapărat $x_1 < x_2$, adică $f^{-1}(u_1) < f^{-1}(u_2)$).

Rămâne să arătăm că f^{-1} este continuă pe intervalul J; fie $y_0 \in J$ un punct oarecare, deci $y_0 = f(x_0)$ cu $x_0 \in I$. Presupunem că y_0 nu este o extremitate a lui J (celălalt caz tratându-se similar).

Pentru a arăta că f^{-1} este continuă în y_0, aplicăm definiția III.1 și fie U o vecinătate oarecare a lui $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Alegem, α, β astfel încât $(\alpha, \beta) \subset U$ și $\alpha < x_0 < \beta$. Cum f este strict crescătoare, avem $f(\alpha) < f(x_0) < f(\beta)$. Alegem vecinătatea $V = (f(\alpha), f(\beta))$ a punctului $f(x_0)$. Avem de arătat că pentru orice $y \in V$ rezultă $f^{-1}(y) \in U$; într-adevăr, conform teoremei III.6, pentru acest y există $x \in (\alpha, \beta)$ astfel încât $y = f(x)$. Dar atunci $x = f^{-1}(y)$ aparține intervalului (α, β), deci și lui U. Teorema este complet demonstrată.

Observație. Teorema III.7 ne asigură că funcțiile inverse ale funcțiilor uzuale sunt continue. Fie, de exemplu, $n \geq 1$ întreg și funcția $f : [0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^n$. Funcția f este evident injectivă și, conform teoremei III.6, este și surjectivă de la $[0, \infty)$ la $[0, \infty)$, fiind continuă și strict monotonă. Ea are deci o inversă, f^{-1} definită pe $[0, \infty)$ cu valori în $[0, \infty)$, care rezultă continuă conform teoremei III.7. Această inversă este funcția radical definită prin $f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y}$.

Analog, funcția $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ se poate inversa, iar funcția inversă, $\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ rezultă continuă în virtutea teoremei III.7.

2.4. Aplicații

a) Rezolvarea unor ecuații

Am văzut că dacă $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ este o funcție continuă care ia valori de semn contrar în capetele intervalului, adică $f(a)f(b) < 0$, atunci ecuația $f(x) = 0$ are cel puțin o soluție ξ pe intervalul (a, b), adică funcția are un zerou pe acest interval. Dacă, în plus, funcția f este strict crescătoare (sau strict descrescătoare) pe intervalul $[a, b]$, atunci soluția ξ este unică.

Exemple

1) Funcția $x^3 + 4x - 6 = 0$ are exact un zerou ξ situat pe intervalul $[1, 2]$. Într-adevăr, notând $f(x) = x^3 + 4x - 6$, se obține o funcție continuă și, în plus, $f(1) = -1$, $f(2) = 10$, deci $f(1)\, f(2) < 0$ și, în plus, f este strict crescătoare pe intervalul $[1, 2]$.

2) Ecuația $2^x - 1 - \cos x = 0$ are cel puțin o soluție în intervalul $[0, 1]$, deoarece punând $f(x) = 2^x - 1 - \cos x$, avem $f(0) = -1$, $f(1) = 1 - \cos 1 > 0$.

b) Semnul unei funcții

Dacă $f : I \to \mathbf{R}$ este o funcție continuă pe un interval I și dacă f nu se anulează în nici unul dintre punctele intervalului I (adică ecuația $f(x) = 0$ nu are soluții pe I), atunci *funcția f are în mod necesar un semn constant pe I.* Într-adevăr, în caz contrar ar exista puncte $x_1 < x_2$ pe I astfel încât $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$ și atunci f s-ar anula într-un punct $\xi \in (x_1, x_2)$ care aparține lui I.

În general, a studia semnul unei funcții înseamnă a indica mulțimile de puncte în care funcția este pozitivă sau negativă. Vom da o regulă practică importantă în stabilirea semnului unor funcții elementare. Să presupunem

că toate zerourile reale ale unei funcţii continue $f : I \to \mathbf{R}$ sunt $a_1 < a_2 < \ldots$ $\ldots < a_p < \ldots$ (ele pot fi în număr infinit). Atunci pe fiecare din intervalele (a_1, a_2), (a_2, a_3), ..., (a_{p-1}, a_p) etc. funcţia are semn constant şi, ca atare, este suficient ca în fiecare din aceste intervale să alegem câte un singur punct şi să determinăm semnul lui f acolo.

Exemple

1) Stabilim semnul funcţiei $f(x) = x^3 - x$ pe $\mathbf{R}$. Zerourile lui f sunt $a_1 = -1$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$. Pe fiecare din intervalele $I_1 = (-\infty, -1)$, $I_2 = (-1, 0)$, $I_3 = (0, 1)$, $I_4 = (1, \infty)$ funcţia f are semn constant. Alegem $\xi_1 = -2 \in I_1$, şi calculăm $f(\xi_1) = -6$; apoi luăm $\xi_2 = -\frac{1}{2} \in I_2$, $f(\xi_2) = \frac{3}{8}$; $\xi_3 = \frac{1}{2} \in I_3$, $f(\xi_3) = -\frac{3}{8}$; $\xi_4 = 3 \in I_4$, $f(\xi_4) = 24$. Aşadar, funcţia f este negativă pe I_1 şi I_3 şi pozitivă pe I_2 şi I_4.

2) Rezolvăm inecuaţia $(x^2 - 2x - 3) \cdot \lg x < 0$. Aşadar, $I = (0, \infty)$ şi zerourile funcţiei $f(x) = (x^2 - 2x - 3) \cdot \lg x$ pe I sunt $a_1 = 1$, $a_2 = 3$. Funcţia f are semn constant pe intervalele $I_1 = (0, 1)$, $I_2 = (1, 3)$, $I_3 = (3, \infty)$. Luând $\xi_1 = \frac{1}{10} \in I_1$, $\xi_2 = 2 \in I_2$, $\xi_3 = 10 \in I_3$, avem $f(\xi_1) = \left(\frac{1}{100} - \frac{2}{10} - 3\right) \cdot \lg \frac{1}{10} = \frac{319}{100} > 0$, $f(\xi_2) < 0$, $f(\xi_3) > 0$. Ca atare, funcţia f este negativă pe I_2 şi răspunsul este $x \in (1, 3)$.

EXERCIŢII (capitolul III, § 2)

1. Să se arate că funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 - x$ este mărginită pe orice interval $[1, a]$, $a > 1$, dar nu şi pe intervalul $[1, \infty)$.

2. Să se arate că funcţia $f : (1, 2) \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 - 2x$ este mărginită pe intervalul deschis $(1, 2)$, dar nu îşi atinge marginile.

3. Să se arate că dacă $f : [0, \infty) \to \mathbf{R}$ este o funcţie continuă şi $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$, atunci f este mărginită.

4. Să se arate că funcţiile σ şi sgn au proprietatea lui Darboux pe intervalele $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$, nu şi pe intervale de forma $[-a, a]$, $a > 0$.

5. Funcţia $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{2}{x}$ are proprietatea că $f(-1) = -2$ şi $f(1) = 2$, deci ia valorile -2 şi 2, totuşi ea nu ia valoarea zero. Se contrazice astfel teorema III.7?

6. Să se arate că pentru orice funcţie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continuă şi mărginită există $\xi \in \mathbf{R}$ astfel încât $f(\xi) = \xi$.

7. Să se arate că funcţiile $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ următoare se anulează cel puţin o dată pe mulţimile indicate:

a) $f(x) = -x^3 + 6x + 20$ pe $\mathbf{R}$;

b) $f(x) = x^4 + 3x + 1$ pe $[-1, 0]$;

c) $f(x) = ax^{2n+1} + bx + c$ pe $\mathbf{R}$ (a, b, c fiind constante reale şi $n \in \mathbf{N}$);

d) $f(x) = (x - 2)\sin \pi x$ pe $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

8. Să se rezolve inecuaţiile:

a) $(x^2 - 4)\lg x > 0$; b) $(x^2 + 4x - 5)(2^x - 4) < 0$; c) $x \sin x > 0$.

9. Să se determine $a > 0$ minim, astfel încât funcţia $f : [a, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$ să fie injectivă. Să se studieze apoi continuitatea aplicaţiei inverse $f^{-1} : J \to I$, unde $I = [a, \infty)$, $J = f(I)$.

10. Fie $f : [0, \infty) \to \mathbf{R}$ o funcţie continuă astfel încât să existe şi să fie finită limita $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. Să se arate că f este mărginită.

11. Să se arate că $f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ a, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$ are proprietatea lui Darboux dacă şi numai dacă $a \in [-1, +1]$.

12. Fie $f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \in \mathbf{Q} \cap [0, 1]. \\ x^2, & \text{dacă } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \cap [0, 1] \end{cases}$. Să se arate că $f([0, 1])$ este un interval, dar că f nu are proprietatea lui Darboux.

EXERCIŢII ŞI PROBLEME REZOLVATE LA CAPITOLUL III

1. *Să se arate că o funcţie $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ este continuă dacă şi numai dacă $\forall\, x \in (a, b)$, avem* $\lim\limits_{h\to 0} [f(x + h) - f(x)] = 0$.

Soluţie: Aceasta este numai o reformulare a definiţiei. Pentru orice $x_0 \in (a, b)$, condiţia de continuitate este $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, adică $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$ şi, notând $x - x_0 = h$, $\lim\limits_{h\to 0} [f(x_0 + h) - f(x_0)] = 0$.

Folosind variaţiile (sau „creşterile", cum se mai numesc) $\Delta f(x) = f(x) - f(x_0)$, $\Delta x = x - x_0$, condiţia de continuitate a lui f în punctul x_0 revine la faptul că $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta f(x) = 0$.

2. *Să se studieze continuitatea în punctul $x = 1$ pentru fiecare din funcţiile $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ următoare:*

a) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } x \leq 1 \\ 2x - 1, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$;

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{5}{x - 1}, & \text{dacă } x \neq 1 \\ 1, & \text{dacă } x = 1 \end{cases}$;

c) $f(t) = \dfrac{\sqrt[3]{t - 1} - 2t}{t}$ pentru $t \neq 0$; $f(0) = 1$;

d) $f(t) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } 1 - \dfrac{1}{10^5} < t < 1 + \dfrac{1}{10^5} \\ 3, & \text{în rest} \end{cases}$

Soluţie: a) Avem $f(1 - 0) = \lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} x^2 = 1$; $f(1 + 0) = \lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} (2x - 1) = 1$ şi $f(1) = 1^2 = 1$, deci $f(1 - 0) = f(1 + 0) = f(1)$ şi, ca atare, f este continuă.

b) $f(1 - 0) = \lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} f(x) = -\infty$, $f(1 + 0) = \infty$, $f(1) = 1$. Funcţia f este discontinuă în punctul $x = 1$.

c) Funcţia f este definită şi continuă în $\mathbf{R} \setminus \{0\}$.

d) Funcţia f este continuă în punctul $x = 1$ deoarece restricţia ei la vecinătatea $\left(1 - \dfrac{1}{10^5}, 1 + \dfrac{1}{10^5}\right)$ a punctului $x = 1$ este constantă, deci continuă.

3. *Să se arate că dacă $f, g : E \to \mathbf{R}$ sunt funcţii continue într-un punct $x_0 \in E$ şi dacă $f(x_0) < g(x_0)$, atunci există $\delta > 0$ astfel încât $f(x) < g(x)$ pentru orice $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap E$.*

Soluție. Notăm $h = g - f$, deci h este continuă în x_0 și $h(x_0) > 0$. Atunci h rămâne strict pozitivă pe o vecinătate a lui x_0, adică există $\delta > 0$ astfel încât $h(x) > 0$, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap E$.

4. *Fie $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ două funcții continue astfel încât $f(x) = g(x)$, $\forall x \in \mathbf{Q}$. Să se arate că $f = g$. Rămâne concluzia adevărată dacă $f(x) = g(x)$, $\forall x \in \mathbf{Z}$?*

Soluție. Fie $a \in \mathbf{R}$ arbitrar fixat. Alegem un șir de numere raționale $x_n \to a$. Deoarece f, g sunt continue în a, avem $f(x_n) \to f(a)$, $g(x_n) \to g(a)$, și cum $f(x_n) = g(x_n)$, $\forall n \geq 0$, rezultă $f(a) = g(a)$. Răspunsul la ultima întrebare este negativ, așa cum arată funcțiile $f(x) = \sin \pi x$, $g(x) = 0$.

5. *Să se arate că pentru orice $x \in \mathbf{R}$ este bine definit numărul $\varphi(x) = \min\limits_{k \in \mathbf{Z}} |x - k|$ și că funcția $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este continuă pe $\mathbf{R}$.*

Soluție. Fixând $x \in \mathbf{R}$, $\varphi(x)$ este cea mai mică distanță posibilă de la x la un număr întreg. Dacă $x \in [0, 1]$ se observă că

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 - x, & \text{dacă } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}. \text{ Apoi } \varphi(x + 1) = \varphi(x), \ \forall x \in \mathbf{R},$$

deci φ este periodică de perioadă 1. Se verifică direct continuitatea lui φ în puncte din $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$, iar în orice punct întreg k, $\varphi(k - 0) = \varphi(k + 0) = 0$. Graficul lui φ este schițat în figura III.11.

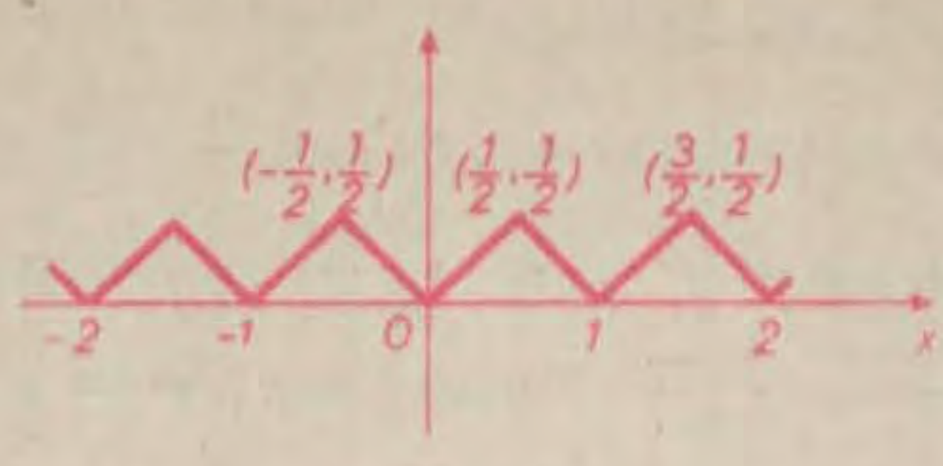


Fig. III.11

6. *Se consideră treapta unitate $\sigma : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.*

$$\sigma(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x < 0 \\ 1, & \text{dacă } x \geq 0 \end{cases}.$$

Să se arate că σ este discontinuă în $x = 0$ și că pentru orice $\varepsilon > 0$ există o funcție continuă $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, astfel încât $f(x) = \sigma(x)$ pentru orice $x \in (-\infty, 0) \cup [\varepsilon, \infty)$.

Soluție. Avem $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \sigma(x) = 0$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \sigma(x) = 1$, deci σ este discontinuă în $x = 0$. Considerăm apoi funcția $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x < 0 \\ 1, & \text{dacă } x \geq \varepsilon \\ \frac{1}{\varepsilon} x, & \text{dacă } 0 \leq x < \varepsilon \end{cases}$.

Este evident că f este continuă pe $\mathbf{R}$ și $f(x) = \sigma(x)$, dacă $x < 0$ și dacă $x \geq \varepsilon$.

7. a) *Fie $a < b$. Să se arate că ecuația $(x^2 + 1)(x - b) + (x^4 + 1)(x - a) = 0$ are cel puțin o rădăcină în intervalul (a, b).*

b) *Fie $a < b < c$ fixate. Să se arate că ecuația $\frac{1}{x - a} + \frac{2}{x - b} + \frac{3}{x - c} = 0$ are o soluție cuprinsă în (a, b) și o a doua în (b, c).*

Soluție. a) Notăm $f(x) = (x^2 + 1)(x - b) + (x^4 + 1)(x - 1)$. Deoarece $f(a) = (a^2 + 1)(a - b) < 0$, $f(b) = (b^4 + 1)(b - a) > 0$, atunci funcția continuă f se anulează cel puțin o dată pe intervalul (a, b).

b) Ecuația este echivalentă în $\mathbf{R} \setminus \{a, b, c\}$ cu $g(x) = (x - b)(x - c) + 2(x - c)(x - a) + 3(x - a)(x - b) = 0$. Avem $g(a) = (a - b)(a - c) > 0$, $g(b) < 0$, $g(c) > 0$ etc.

8. *Să se arate că orice funcție polinomială de grad impar are cel puțin un zero real.*

Soluție. Fie $f(x) = a_0x^{2n+1} + a_1x^{2n} + \dots + a_{2n+1}$; pentru a fixa ideile, presupunem $a_0 > 0$. Deoarece $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, există α astfel încât $f(\alpha) < 0$. Apoi $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, deci există $\beta > \alpha$ astfel încât $f(\beta) > 0$. Așadar, f se anulează între α și β, conf. lemei de la pag. 111.

9. *Să se studieze semnul următoarelor funcții:*

a) $f(x) = x(x - a)(x - b)$, *unde* $0 < a < b$ *sunt constante*;

b) $f(x) = (x + 1) \ln(-x)$, $x < 0$;

c) $f(x) = \sin x + \cos x$, $x \in [0, 2\pi]$;

d) $(x) = \operatorname{sh} x$.

Soluție. a) Zerourile funcției f sunt 0, a, b. Pe intervalele $(-\infty, 0)$, (a, b) funcția este negativă, iar pe intervalele $(0, a)$, (b, ∞) funcția este pozitivă.

b) Funcția este definită pe intervalul $I = (-\infty, 0)$. Ea are un singur punct unde se anulează, $x = -1$. Pe ambele intervale $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$ funcția f este negativă (are semn constant pe fiecare interval și, de exemplu, $f(-e) = (-e + 1) \cdot \ln e = 1 - e < 0$, $f\left(-\frac{1}{e}\right) = \left(1 - \frac{1}{e}\right) \cdot \ln \frac{1}{e} = \frac{1}{e} - 1 < 0$.

c) Zerourile lui f pe intervalul $I = [0, 2\pi]$ sunt $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$. Pe intervalele $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$, $\left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$ funcția este pozitivă ($f \geqslant 0$), iar pe $\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$ funcția este negativă ($f < 0$).

d) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x}$. Funcția f este negativă pe $(-\infty, 0)$ și pozitivă pe $(0, \infty)$

10. *Fie I un interval și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție având proprietatea lui Darboux. Să se arate că:*

a) *dacă f nu se anulează pe I, atunci f are semn constant pe I;*

b) *dacă f are limite laterale în orice punct din I, atunci f este continuă pe I.*

Soluție. a) Dacă, prin absurd, f nu ar avea semn constant pe I, atunci ar exista $a, b \in I$ astfel încât $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Atunci f ar lua, o dată cu valorile $f(a)$, $f(b)$, și valoarea intermediară zero, adică ar exista c cuprins între a, b (deci $c \in I$), astfel încât $f(c) = 0$, ceea ce contravine ipotezei că f nu se anulează pe I.

b) Admitem, prin absurd, că f nu ar fi continuă într-un punct $x_0 \in I$; conform ipotezei, două din numerele $l_s = f(x_0 - 0)$, $l_d = f(x_0 + 0)$, $f(x_0)$ sunt distincte. Să presupunem, de exemplu, că $f(x_0) < l_s$ și fie $\varepsilon = l_s - f(x_0)$. Atunci există $\delta > 0$ astfel încât dacă $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, atunci $l_s - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < l_s + \frac{\varepsilon}{2}$, adică $f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < f(x_0) + \frac{3\varepsilon}{2}$. Fixăm $x_1 \in (x_0 - \delta, x_0)$, deci $f(x_1) > f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}$. Deoarece f are proprietatea lui Darboux pe I, o dată cu valorile $f(x_0)$, $f(x_1)$, funcția f ia valoarea intermediară $f(x_0) + \frac{\varepsilon}{4}$, adică există $c \in (x_1\ x_0)$ astfel încât $f(c) = f(x_0) + \frac{\varepsilon}{4}$. Dar $f(c) > f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}$, adică $f(x_0) + \frac{\varepsilon}{4} > f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}$, ceea ce este absurd.

11. *Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție astfel încât $|f(x) - f(y)| \leq \sqrt{|x - y|}$ pentru orice $x, y \in \mathbf{R}$. Să se arate că există $a > 0$ astfel încât $|x| \leq a$ să implice $|f(x)| < a$. Deduceți că există un punct $u \in \mathbf{R}$* astfel încât $f(u) = u$.

Soluție. Evident, f este continuă pe $\mathbf{R}$. Partea secundă rezultă astfel: se consideră funcția continuă $g : [-a, a] \to \mathbf{R}$, $g(x) = f(x) - x$ și rezultă $g(-a) \cdot g(a) = (f(-a) + a) \cdot (f(a) - a) < 0$ pentru orice $x \in [-a, a]$, deci există $u \in [-a, a]$ astfel încât $g(u) = 0$, adică $f(u) = u$. Rămâne de demonstrat prima parte a enunțului. Pentru $y = 0$ se obține $|f(x) - f(0)| \leq \sqrt{|x|}$, deci $|f(x)| \leq |f(0)| + \sqrt{|x|}$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Dacă nu ar exista a ca în enunț, atunci pentru orice $a > 0$, ar exista x, $|x| \leq a$ și $|f(x)| \geq a$; luând $a = n$, $n \geq 1$ întreg, există x_n, $|x_n| \leq n$ astfel încât $|f(x_n)| \geq n$, deci $n \leq |f(0)| + \sqrt{|x_n|} \leq |f(0)| + \sqrt{n}$ pentru orice n. Împărțind cu $\sqrt{n}$ și făcând $n \to \infty$, se ajunge la o absurditate.

12. Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție continuă (pe un interval compact). Să se arate că $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ astfel încât $\forall x, y \in [a, b]$, $|x - y| < \delta$ să avem $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Soluție. Dacă nu ar fi îndeplinită condiția din enunț, ar exista $\varepsilon > 0$ astfel încât $\forall \delta > 0$ și, în particular, pentru $\delta = \frac{1}{n}$ ($n \geq 1$ întreg) să existe $x_n, y_n \in [a, b]$, $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ și $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$. Conform lemei lui Cesaró, șirurile $(x_n)_{n \geq 1}$, $(y_n)_{n \geq 1}$, fiind mărginite, au subșiruri convergente $x_{k_n} \to \xi$, $y_{k_n} \to \eta$. Deoarece $|x_{k_n} - y_{k_n}| < \frac{1}{k_n} \leq \frac{1}{n}$, rezultă $\xi = \eta$. Deoarece f este continuă, rezultă $f(x_{k_n}) \to f(\xi)$, $f(y_{k_n}) \to f(\xi)$, deci $f(x_{k_n}) - f(y_{k_n}) \to 0$ pentru $n \to \infty$ și rezultă $0 \geq \varepsilon$, ceea ce este absurd.

(Condiția $\varepsilon - \delta$ din enunț se mai numește condiția de continuitate uniformă a lui f pe intervalul $[a, b]$. Atunci enunțul se poate formula astfel: *orice funcție continuă pe un interval compact este uniform continuă.*)

Capitolul IV
FUNCȚII DERIVABILE

Una din noțiunile fundamentale ale analizei matematice, și în fond ale întregii științe, este cea de derivată, atribuită deopotrivă lui G. Leibniz (1646—1716) și lui I. Newton (1642—1727). Această noțiune modelează ceea ce s-ar putea numi „viteza de variație a unei funcții", permite adâncirea studiului local și global al funcțiilor și, în același timp, stă la baza formulării matematice a numeroase legi ale fizicii. De altfel, I. Newton a introdus și a utilizat în mod sistematic conceptul de derivată tocmai în legătură cu studiul legilor mecanicii. Se întâlnesc derivate în studiul vitezei de deplasare a unui mobil, vitezei de variație a temperaturii unui corp sau a intensității curentului electric, în definiția densității liniare a unei bare și oriunde interesează rata vreunei schimbări.

§ 1. Derivata unei funcții într-un punct

1.1. Originea noțiunii de derivată

Au existat două probleme, una fizică — modelarea matematică a noțiunii intuitive de viteză a unui mobil — și alta geometrică — tangenta la o curbă plană —, care au condus la descoperirea noțiunii de derivată. Am folosit de mai multe ori referiri la viteza unui mobil, dar abia acum vom putea da definiția matematică a acestui concept.

a) *Viteza instantanee a unui mobil.* Presupunem că pe o axă Δ se mișcă un mobil în sensul pozitiv al axei și că la momentul t mobilul se află în punctul de abscisă $s(t)$. Dacă mișcarea este uniformă, atunci pentru orice două momente t_1, t_2 ($t_1 \neq t_2$) raportul $\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$ este constant, egal cu viteza v a mobilului; în acest caz, se știe că $s(t) = v \cdot t$. Ce se întâmplă însă dacă mobilul nu mai are o mișcare uniformă, deși se mișcă pe aceeași axă Δ? Raportul anterior nu va mai fi constant și pentru orice momente t_1, t_2 ($t_1 \neq t_2$) raportul $\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$ dintre distanța parcursă și timpul scurs se numește *viteza medie* a mobilului între momentele respective (de remarcat că nu am fixat o ordonare a momentelor t_1, t_2). Să considerăm acum un moment t_0 de referință. Practic nu există mișcări uniforme, dar pe intervale din ce în ce mai mici mișcarea tinde să devină uniformă. Pentru $t \to t_0$, $t \neq t_0$ se poate considera că mișcarea mobilului pe intervalul de timp dintre t_0 și t tinde să

devină uniformă, iar viteza medie respectivă tinde către o caracteristică a mişcării exact la momentul t_0. Aceasta sugerează definiţia *vitezei instantanee a mobilului la momentul* t_0 ca fiind limita

$$(1) \quad v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0},$$

în ipoteza că această limită există. Aşadar, $v(t_0)$ este limita pentru $t \to t_0$ a vitezei medii a mobilului între momentul t_0 şi momentul $t \neq t_0$.

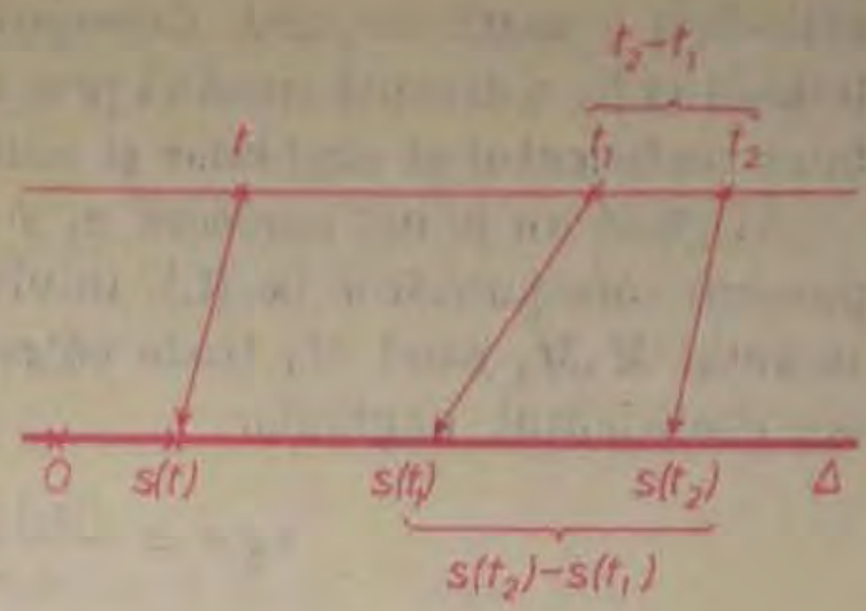


Fig. IV.1

De exemplu, în studiul căderii corpurilor în vid s-a dovedit că spaţiul parcurs în metri după t secunde este $s(t) = \frac{1}{2}gt^2$. Fixând un moment oarecare t_0, viteza la momentul t_0 este

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{2}gt_0^2}{t - t_0} = \frac{1}{2} \lim_{t \to t_0} g(t + t_0) = \frac{1}{2} g \cdot 2t_0 = g \cdot t_0$$

şi viteza la orice moment t va fi $v(t) = g \cdot t$ (g este accelerația gravitaţională $g \simeq 9{,}81$ m/s²).

În mod asemănător, dacă $v(t)$ este viteza mobilului la orice moment t, atunci se defineşte *accelerația mobilului la momentul* t_0 ca fiind

$$a(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0},$$

în ipoteza că această limită există. Legea fundamentală a mecanicii lui Newton arată că la fiecare moment t forţa $F(t)$ care acţionează asupra mobilului, masa m a mobilului şi accelerația $a(t)$ sunt legate prin relaţia $F(t) = m \cdot a(t)$.

a) O limită de tipul (1) apare şi într-o problemă pur geometrică. Fie $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ o funcţie continuă în punctul $x_0 \in (a, b)$ şi (C) graficul lui f; aşadar, punctul M_0 de coordonate $(x_0, f(x_0))$ aparţine lui (C). Pentru grafice speciale (de exemplu pentru un semicerc $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $x_0 \in (-R, R)$) există o noţiune elementară de tangentă şi este interesant şi important să

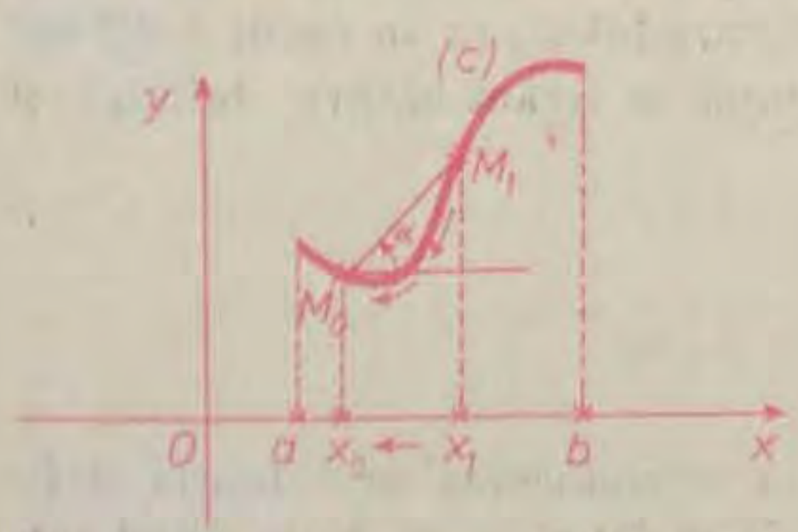


Fig. IV.2

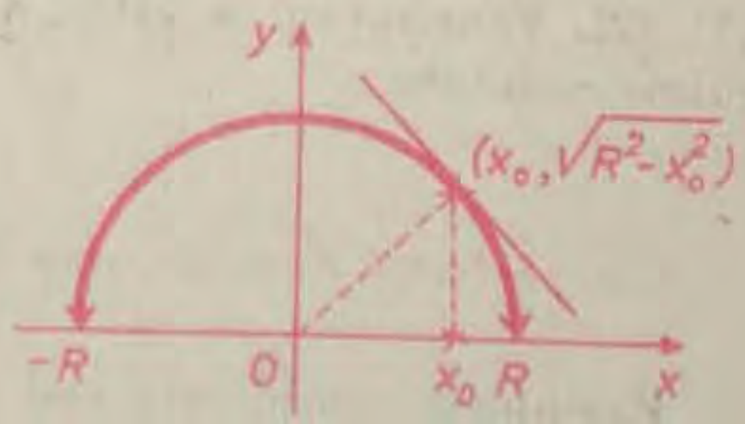


Fig. IV.3

extindem această noțiune. Corespunzător intuiției, tangenta în M_0 la (C) trebuie să fie o dreaptă trecând prin M_0 și rămâne să vedem ce legătură există între coeficientul ei unghiular și ecuația $y = f(x)$ a lui (C).

Alegând un punct oarecare $x_1 \neq x_0$ din (a, b) și notând cu $M_1(x_1, f(x_1))$ punctul corespunzător pe (C), intuitiv tangenta în M_0 trebuie să fie limita secantei M_0M_1 când M_1 tinde către M_0. În termeni preciși, secanta M_0M_1 are coeficientul unghiular

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad \text{(fig. IV.2)}$$

(α fiind măsura — depinzând de x_1 — a unghiului făcut de semidreapta M_0M_1 cu semidreapta de capăt M_0 paralelă cu Ox). Presupunând că există limita

$$m = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, \tag{2}$$

aceasta este, prin definiție, coeficientul unghiular al tangentei în M_0 la (C). (Dacă această limită este $+\infty$ sau $-\infty$, tangenta în M_0 la (C) este verticală.) Dreapta trecând prin M_0 având coeficientul unghiular m este, prin definiție, *tangenta în M_0 la* (C) și are ecuația

$$y - f(x_0) = m(x - x_0). \tag{3}$$

În cazul semicercului (fig. IV.3) avem $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ și în punctul $M_0(x_0, \sqrt{R^2 - x_0^2})$ coeficientul unghiular al tangentei este

$$m = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{\sqrt{R^2 - x_1^2} - \sqrt{R^2 - x_0^2}}{x_1 - x_0} = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{x_0^2 - x_1^2}{(x_1 - x_0)\left(\sqrt{R^2 - x_1^2} + \sqrt{R^2 - x_0^2}\right)} =$$

$$= -\lim_{x_1 \to x_0} \frac{(x_0 + x_1)}{\sqrt{R^2 - x_1^2} + \sqrt{R^2 - x_0^2}} = -\frac{x_0}{\sqrt{R^2 - x_0^2}}.$$

Se observă că tangenta în M_0 la semicerc este perpendiculară pe raza OM_0 care are coeficientul unghiular $\frac{f(x_0) - 0}{x_0 - 0} = \frac{\sqrt{R^2 - x_0^2}}{x_0} = -\frac{1}{m}$. Aceasta arată că în cazul semicercului cele două definiții ale tangentei într-un punct coincid.

Se pot da numeroase alte exemple în care apare în mod firesc limita unui raport între „creșterea funcției" și „creșterea variabilei", ca în cazul limitelor (1), (2). Vom reveni la astfel de exemple după ce fixăm câteva definiții și prime rezultate.

1.2. Definiția derivatei unei funcții într-un punct

Exemplele considerate mai sus sugerează introducerea următoarei definiții fundamentale. Fie o funcție $f : E \to \mathbf{R}$ $(E \subset \mathbf{R})$ și $x_0 \in E$, x_0 fiind totodată și punct de acumulare al mulțimii E. Reținem că f este definită în x_0

DEFINIȚIA IV.1. 1) Se spune că funcția f **are derivată** în punctul x_0, dacă există limita (în $\overline{\mathbb{R}}$)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \text{ notată cu } f'(x_0); \tag{4}$$

2) Dacă derivata $f'(x_0)$ există și este finită se spune că funcția f **este derivabilă** în punctul x_0.

Observații. 1. Se poate întâmpla ca $f'(x_0)$ să existe și să fie $+\infty$ sau $-\infty$.

2. Trebuie remarcat că problema existenței derivatei sau a derivabilității nu se pune în punctele izolate ale mulțimii E (dacă E are astfel de puncte!).

Mai târziu vom introduce și alte notații ale derivatei. Trebuie remarcat că în studiul derivabilității unei funcții într-un punct intervin doar valorile acelei funcții într-o vecinătate a punctului; se mai spune că derivabilitatea este o proprietate *locală* (ca și existența limitelor de funcții sau continuitatea).

Presupunem că $f'(x_0)$ există; făcând translația $x - x_0 = h$, atunci din (4) rezultă că

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x_0 + h \in E}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \tag{5}$$

Uneori se utilizează notațiile $\Delta x = x - x_0$, $\Delta f = f(x) - f(x_0)$, deci $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$, adică derivata lui f într-un punct x_0 este limita dintre „creșterea funcției f" și „creșterea argumentului în punctul x_0" când aceasta din urmă tinde către zero. Nu vom folosi însă aceste notații.

DEFINIȚIA IV.2. Dacă o funcție $f : E \to \mathbb{R}$ ($E \subset \mathbb{R}$) este derivabilă în orice punct al unei submulțimi $F \subset E$, atunci se spune că f **este derivabilă** pe mulțimea F. În acest caz, funcția

$$f \to \mathbb{R},\ x \mapsto f'(x)$$

se numește **derivata lui** f pe mulțimea F și se notează cu f'. Operația prin care f' se obține din f se numește **derivarea lui** f.

Dacă $y = f(x)$, f derivabilă, se mai scrie, prin abuz, $y' = f'(x)$; uneori se folosesc notațiile echivalente $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{df}{dx} = \dfrac{d}{dx}(f)$, indicându-se în raport cu ce argument se face derivarea și reamintind că derivata într-un punct este limita raportului a două creșteri — a funcției și a argumentului.

Dacă f este derivabilă pe E, atunci conform relației (5) avem

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}, \text{ pentru orice } x \in E. \tag{6}$$

Exemple

1) Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x$. În acest caz, f este derivabilă în orice punct din $\mathbf{R}$ deoarece limita

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) - x}{h} = 1$$

există pentru orice $x \in \mathbf{R}$. În plus, $f'(x) = 1$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

2) Pentru funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 - x$, și pentru orice $x \in \mathbf{R}$, există

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - (x+h) - (x^3 - x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 - h}{h} = \lim_{h \to 0} (2x^2 + 3xh + h^2 - 1) = 3x^2 - 1,$$

deci f este derivabilă pe $\mathbf{R}$.

3) Reluând studiul mișcării pe o axă a unui mobil, relația (1) se scrie $v(t_0) = s'(t_0)$, adică viteza instantanee la momentul t_0 este derivata spațiului în acel moment (în ipoteza că funcția $t \mapsto s(t)$ este derivabilă în t_0).

4) Studiem, aplicând definiția IV.1, derivabilitatea funcției $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = |x|$ în punctul $x = 0$. Aceasta depinde de existența limitei raportului $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{|x|}{x}$ în punctul $x = 0$.

Avem $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{-x}{x} = -1$ și $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{x}{x} = 1$, deci limita raportului $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ nu există în punctul $x = 0$ și, ca atare, funcția-modul nu este derivabilă în origine (deși este continuă în origine).

Înainte de a da și alte exemple, stabilim două rezultate teoretice importante.

TEOREMA IV. 1. Orice funcție derivabilă într-un punct este continuă în acel punct.

Demonstrația este imediată: Presupunem că $f : E \to \mathbf{R}$ este derivabilă în punctul $x_0 \in E$, deci limita (4) există și este finită. Din relația $f(x) - f(x_0) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$; $x \neq x_0$ rezultă $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) =$ $= \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim\limits_{x \to x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0$, deci $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, adică f este continuă în x_0.

Reciproca teoremei IV.1 este în general falsă, așa cum o dovedește exemplul funcției-modul în origine.

În studiul existenței limitei unei funcții într-un punct un criteriu util l-a constituit egalitatea limitelor laterale. Adaptăm acest criteriu la studiul derivabilității unei funcții într-un punct, ținând cont că existența derivatei înseamnă în fond existența unei anumite limite.

DEFINIȚIA IV. 3. *Fie $E \subset \mathbf{R}$ și $x_0 \in E$ un punct de acumulare pentru $E \cap (-\infty, x_0)$. Dacă limita*

$$f'_s(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

există (în $\overline{\mathbf{R}}$), atunci această limită se numește **derivata la stânga** *a funcției f în punctul x_0. Dacă, în plus, această limită există și este finită, atunci se spune că f este* **derivabilă la stânga** *în punctul x_0.*

În mod similar se definesc **derivata** $f'_d(x_0)$ **la dreapta** și noțiunea de **funcție derivabilă la dreapta în** x_0.

Direct din teorema II.7. rezultă

TEOREMA IV. 2. Dacă $f : E \to \mathbf{R}$ este derivabilă în punctul $x_0 \in E$, atunci f este derivabilă la stânga și la dreapta în x_0 și $f'_s(x_0) = f'_d(x_0) = f'(x_0)$. Reciproc, dacă f este derivabilă la stânga și la dreapta în x_0 și dacă $f'_s(x_0) = f'_d(x_0)$, atunci f este derivabilă în x_0 și $f'(x_0) = f'_s(x_0)$.

Dacă $E = [a, b]$, faptul că f este derivabilă în a (respectiv b) revine la aceea că f este derivabilă la dreapta în punctul a (respectiv la stânga în b).

Exemple

1) Pentru funcția-modul $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = |x|$, avem $f'_s(0) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} =$

$= \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{|x|}{x} = -1$ și similar, $f'_d(0) = 1$, regăsim faptul că f nu este derivabilă în punctul $x = 0$.

2) Se poate întâmpla ca $f'_d(x_0)$, $f'_s(x_0)$ să fie egale fără ca funcția f să fie derivabilă în x_0. Considerăm exemplul funcției $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{, dacă } x < 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{, dacă } x = 0 \\ x + 1 & \text{, dacă } x > 0 \end{cases} \quad \text{(fig. IV.4).}$$

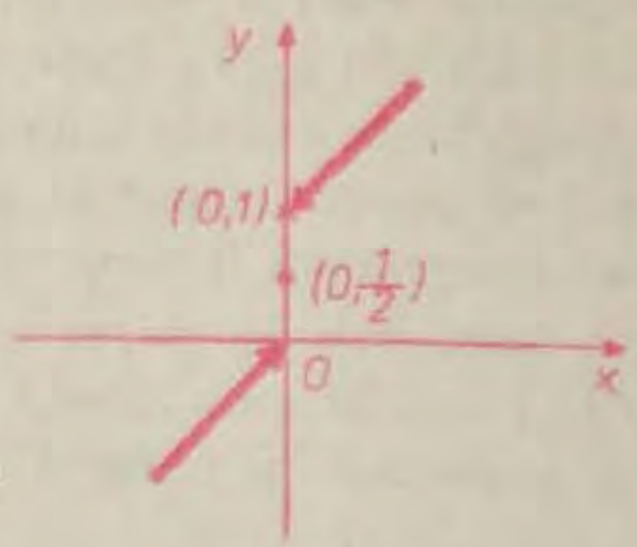


Fig. IV.4

Aici $f'_s(0) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{x - \frac{1}{2}}{x} = \infty$, $f'_d(0) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{x + 1 - \frac{1}{2}}{x} = \infty$,

dar funcția nu este derivabilă în $x = 0$ (nefiind nici măcar continuă în $x = 0$).

Raționând ca în teorema IV.1, rezultă că dacă f este derivabilă la dreapta (respectiv la stânga) într-un punct x_0, atunci f este continuă la dreapta (respectiv la stânga) în acel punct.

3) Funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{|x|}$ nu este derivabilă în punctul $x = 0$ deoarece derivatele laterale, deși există, nu sunt finite; anume,

$$f'_d(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\sqrt{x}}{x} = \infty \text{ și } f'_s(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{\sqrt{-x}}{x} = -\infty.$$

În exemplele 1, 3 am întâlnit funcții continue care sunt nederivabile într-un punct (vom vedea că în celelalte puncte acestea sunt derivabile). Exemplul care urmează arată că există funcții care sunt derivabile într-un singur punct.

4) Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ dacă } x \in \mathbf{Q} \\ 0, \text{ dacă } x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$. Se observă ușor că această funcție este continuă în punctul $x = 0$ și discontinuă în orice punct $x \neq 0$. Să examinăm derivabilitatea lui f în punctul $x = 0$ și, pentru aceasta, să considerăm raportul

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 0}{x - 0} = x, \text{ dacă } x \in \mathbf{Q},\ x \neq 0 \\[2ex] \dfrac{0 - 0}{x} = 0, \text{ dacă } x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$$

și este clar că acesta are limita 0 când x tinde către 0, adică f este derivabilă și $f'(0) = 0$. În punctele $x \neq 0$, f nu este derivabilă (deoarece f nu este continuă în acele puncte).

5) Se poate acum explica ce se înțelege prin mișcare rectilinie, *cu viteza funcție continuă*, a unui mobil, anume: spațiul este funcție de timp derivabilă și cu derivata continuă.

1.3. Interpretarea geometrică a derivatei

Dacă $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ este o funcție derivabilă într-un punct $x_0 \in (a, b)$, atunci conform formulelor (2), (3), (4) graficul lui f are tangentă în x_0 (sau mai corect în punctul $(x_0, f(x_0))$, anume dreapta de ecuație

$$y - f(x_0) = m(x - x_0), \text{ unde } m = f'(x_0).$$

Așadar $f'(x_0)$ este coeficientul unghiular al tangentei la graficul lui f, în punctul $(x_0, f(x_0))$. Dacă $f'(x_0) = +\infty$ sau $-\infty$ (în sensul că limita (4) este egală cu $+\infty$ sau $-\infty$), atunci tangenta în $(x_0, f(x_0))$ este paralelă cu axa Oy.

Fără nici o dificultate, se poate vorbi de semitangentă la dreapta sau la stânga într-un punct la un grafic, în legătură cu derivatele laterale respective în acel punct. Geometric, pentru o funcție derivabilă într-un punct, direcțiile semitangentelor la dreapta și stânga la grafic în acel punct coincid.

Dacă într-un punct x_0, f este continuă și avem $f'_d(x_0) = +\infty$ și $f'_s(x_0) = -\infty$ (sau invers), atunci punctul x_0 se numește *punct de întoarcere* al graficului lui f (fig. IV.5).

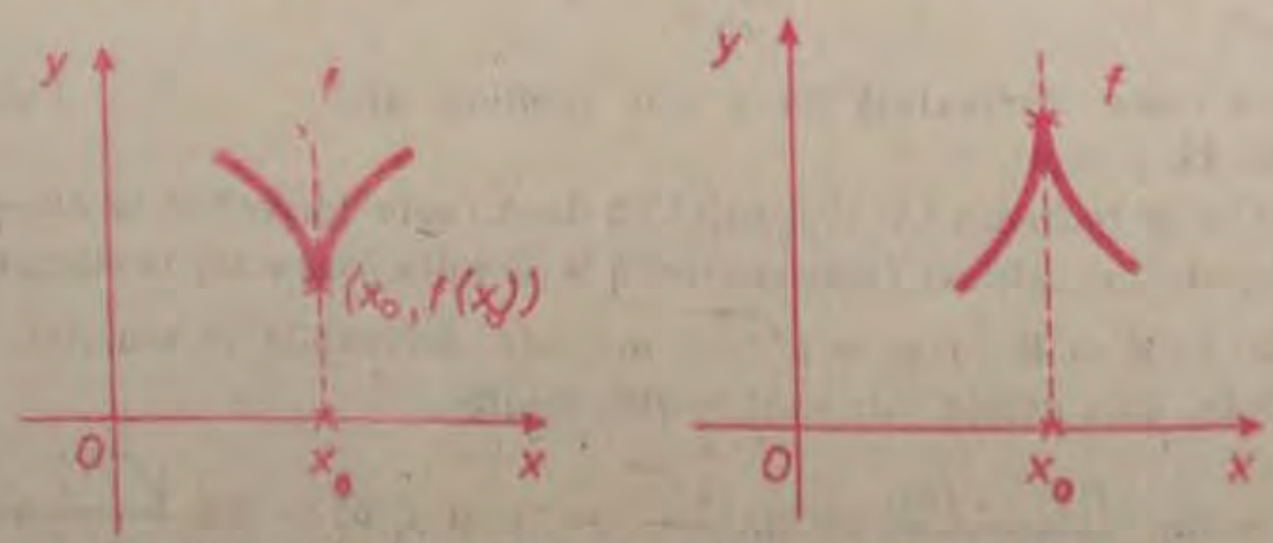


Fig. IV.5

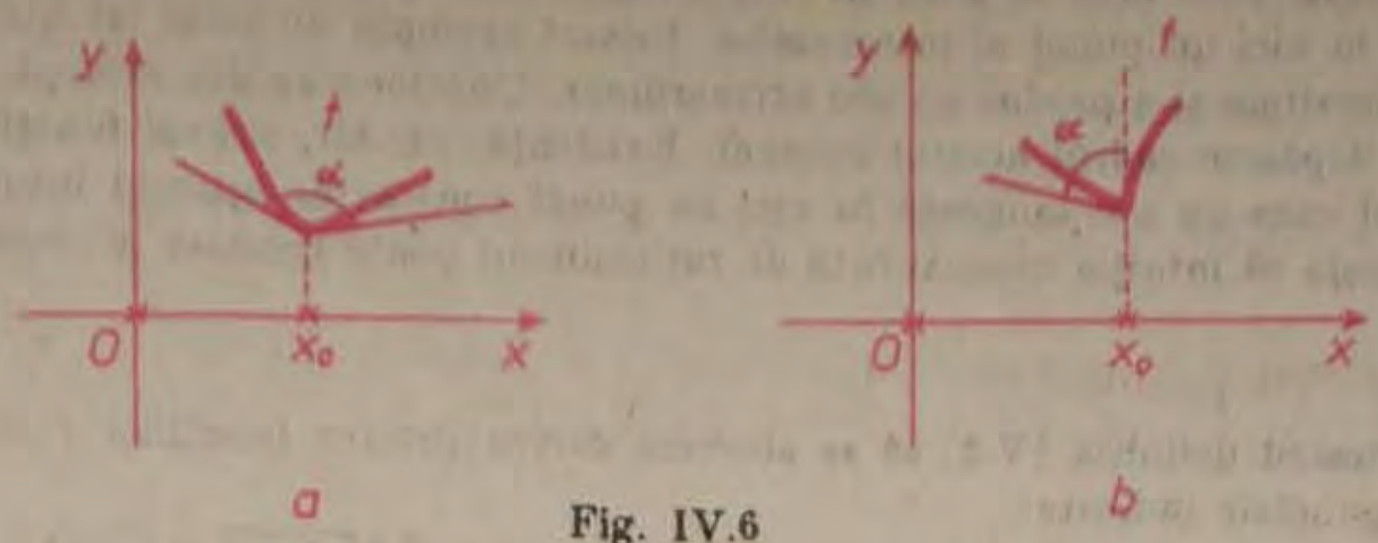


Fig. IV.6

Dacă o funcţie $f : E \to \mathbf{R}$ ($E \subset \mathbf{R}$) este continuă într-un punct $x_0 \in E$, dacă există ambele derivate laterale, cel puţin una dintre ele fiind finită, dar funcţia nu este derivabilă în x_0, atunci se spune că x_0 este *punct unghiular* al graficului lui f (fig. IV.6). Într-un punct unghiular cele două semitangente, la stânga şi la dreapta, formează un unghi $\alpha \in (0, \pi)$.

Exemple

1) Scriem ecuaţia tangentei la graficul (C) al funcţiei $f(x) = \sqrt{x}$ în punctul $x_0 = 1$.

Avem $f(1) = \sqrt{1} = 1$ şi $f'(1) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{\sqrt{x} + 1} = \dfrac{1}{2}$

şi ecuaţia cerută este $y - 1 = \dfrac{1}{2}(x - 1)$, adică $y = \dfrac{1}{2}(x + 1)$ (fig. IV.7).

În punctul $x = 0$ graficul (C) are pe Oy ca semitangentă, deoarece

$$f'_d(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\sqrt{x}}{x} = \infty.$$

2) Pentru funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } x \leq 0 \\ \sin x, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$, avem

$$f'_s(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{x^2}{x} = 0 \text{ şi } f'_d(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\sin x - 0}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Atunci $y = 0$ este semitangentă la stânga în origine şi $y = x$ este semitangenta la dreapta în origine la graficul lui f. Originea este punct unghiular (fig. IV.8).

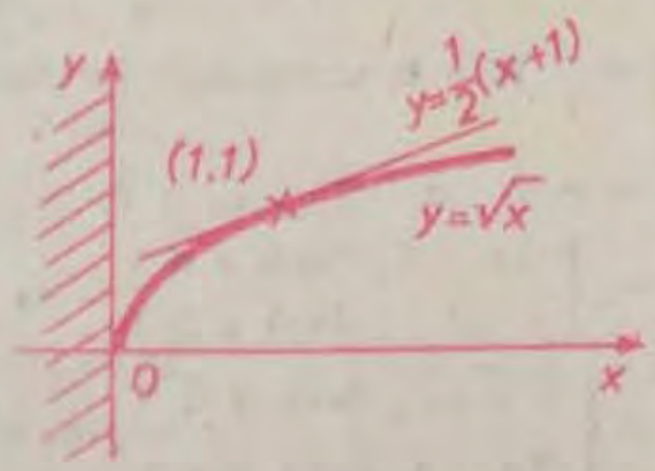


Fig. IV.7

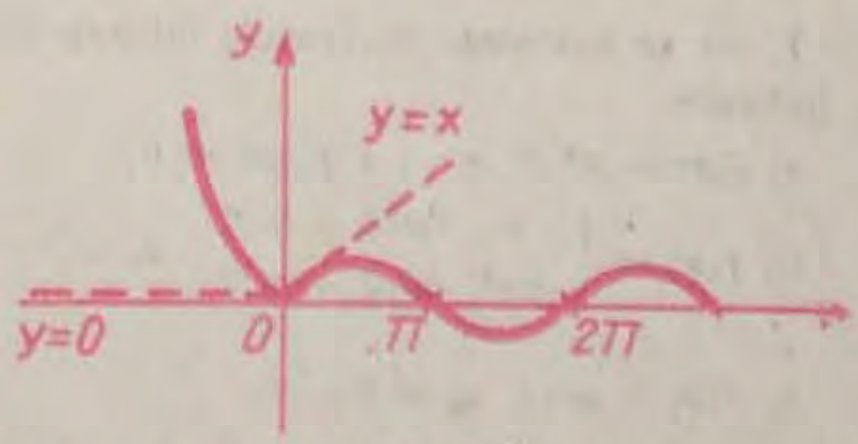


Fig. IV.8

Observaţie. Este bine de ştiut că există funcţii continue pe un interval care nu sunt derivabile în nici un punct al intervalului. Primul exemplu de acest fel a fost construit de K. Weierstrass şi a produs un şoc extraordinar. Ulterior s-au dat exemple mai simple, dar toate depăşesc cadrul acestui manual. Existenţa, aşadar, a unei funcţii cu graficul neîntrerupt care nu are tangentă în nici un punct contravine aparent intuiţiei noastre, dar dovedeşte că intuiţia necenzurată de raţionament poate conduce la erori.

EXERCIŢII (capitolul IV, § 1)

1. Folosind definiţia IV.1, să se studieze derivabilitatea funcţiilor $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ următoare, în punctele indicate:

a) $f(x) = 2x + 3$, $x_0 = 2$;

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2}$, $x_0 = -1$;

c) $f(x) = \sin 5x$ $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$;

d) $f(x) = x^3 + x^2$, $x_0 = 1$;

e) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 8}$, $x_0 = 1$;

f) $f(x) = x - \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 1$;

g) $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x_0 = 0$;

h) $f(x) = x \cdot \sigma(x)$, $x_0 = 0$.

2. Să se studieze continuitatea şi derivabilitatea următoarelor funcţii $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ în punctul $x = 0$;

a) $f(x) = x^3 + x$;

b) $f(x) = \begin{cases} x^3 + x, \text{ dacă } x \leqslant 0 \\ 2x^3 + x, \text{ dacă } x > 0 \end{cases}$;

c) $f(x) = |\sin x|$;

d) $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ dacă } x \leqslant 0 \\ -x^2, \text{ dacă } x > 0 \end{cases}$.

3. Să se arate că funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

este continuă pe $\mathbf{R}$ şi nu este derivabilă în origine.

4. Să se arate că dacă $\alpha > 1$ este întreg constant, atunci funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin \dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

este derivabilă în origine.

5. Se consideră funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt{x}, \text{ dacă } x \geqslant 0 \\ -\sqrt{-x}, \text{ dacă } x \leqslant 0 \end{cases}$. Să se arate că f este discontinuă în origine şi că $f'_d(0) = f'_s(0) = \infty$. Se contravine teoremei IV.1?

6. Folosind formula (6), să se calculeze derivata f' pentru următoarele funcţii $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$:

a) $f(x) = x^3 + 3x$; b) $f(x) = x^2 - 7x + 2$; c) $f(x) = x^3 + 4x$; d) $f(x) = \dfrac{1}{2} x^2 + \dfrac{1}{3} x^3$.

7. Să se calculeze derivatele laterale ale funcţiilor $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ următoare în punctele x_0 indicate:

a) $f(x) = x^2 + x \cdot |x|$, $x_0 = 0$;

b) $f(x) = \begin{cases} x, \text{ dacă } x \leqslant 0 \\ 2x^2, \text{ dacă } x > 0 \end{cases}$, $x_0 = 0$;

c) $f(x) = \sigma(x)$, $x_0 = 0$;

d) $f(x) = x + |x - 2|$, $x_0 = 2$;

e) $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, \text{ dacă } x \leqslant 1 \\ x^2, \text{ dacă } x > 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$;

f) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|}, \text{ dacă } x \leqslant 1 \\ 2x - 1, \text{ dacă } x > 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$.

Să se traseze graficele acestor funcţii.

8. Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$ astfel ca funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1 & , \text{ dacă } x \leq 0 \\ a \sin x + b \cos x, & \text{dacă } x > 0 \end{cases} \text{ să fie derivabilă.}$$

9. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{|x^2 - 1|}$. Să se calculeze derivatele laterale ale lui f în punctele $0, 1, -1$.

10. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$ și $x_0 = 1$. Să se calculeze coeficienții unghiulari ai secantelor definite de punctele $(x_0, f(x_0))$ și $(\alpha, f(\alpha))$ pentru $\alpha = 1{,}5$; $\alpha = 1{,}1$; $\alpha = 1{,}05$. Ce se întâmplă cu acești coeficienți dacă $\alpha \to 1$?

11. Să se scrie ecuația tangentei la graficele funcțiilor $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ indicate în punctele x_0 respective:

a) $f(x) = x^2$, $x_0 = 2$;
b) $f(x) = x^3 - x$, $x_0 = 1$;
c) $f(x) = (2x + 1)^2$, $x_0 = 4$;
d) $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$, $x_0 = 2$;
e) $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$;
f) $f(x) = x + \sin x$, $x_0 = \pi$.

12. Să se determine punctele unghiulare sau punctele de întoarcere pentru funcțiile $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$:

a) $f(x) = x\sqrt{|x - 2|}$;

b) $f(x) = \sqrt[3]{(x - 1)^2}$;

c) $f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ dacă } x < 1 \\ \sqrt[3]{(x - 1)^2}, & \text{dacă } x \geq 1 \end{cases}$;

d) $f(x) = \dfrac{|x - 1|}{|x| + 1}$

13. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2, & \text{dacă } x > 0 \\ 0 & , \text{ dacă } x \leq 0 \end{cases}$. Să se studieze derivabilitatea lui f și să se determine punctele unde tangenta la grafic trece prin origine.

14. Să se determine tangentele la graficul de ecuație $y = (x + 1)^3$ care trec prin origine. Idem, pentru $y = x^3 + 1$.

§ 2. Operații cu funcții derivabile. Derivatele unor funcții uzuale

Am întâlnit deja exemple de funcții derivabile. Este utilă o sinteză a derivatelor funcțiilor uzuale și se impune stabilirea unor reguli generale de derivare a sumelor, produselor, compunerilor etc. de funcții derivabile.

2.1. Derivatele câtorva funcții uzuale

a) *Orice funcție constantă* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = c$ *este derivabilă pe* $\mathbf{R}$, *cu derivata nulă* ($f'(x) = 0$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$).

Se mai scrie

$$\boxed{c' = 0} \tag{7}$$

Demonstrația este imediată: $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{c - c}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{0}{h} = 0.$

Vom vedea mai târziu că şi reciproc, dacă o funcţie are derivata nulă pe un interval, atunci ea este constantă pe acel interval.

b) *Funcţia-putere* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^n$ ($n \geqslant 1$ întreg) *este derivabilă pe* $\mathbf{R}$ *şi* $f'(x) = nx^{n-1}$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$.

Se mai scrie

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \quad \forall\, x \in \mathbf{R} \tag{8}$$

Într-adevăr, $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x+h)^n - x^n}{h} =$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{C_n^1 x^{n-1} h + C_n^2 x^{n-2} h^2 + \ldots + h^n}{h} = \lim_{h \to 0} (C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} h + \ldots + h^{n-1}) =$$

$$= C_n^1 x^{n-1} = nx^{n-1}, \ \forall\, x \in \mathbf{R}.$$

În particular, $x' = 1$, $(x^2)' = 2x$, $(x^3)' = 3x^2$, $(x^{10})' = 10x^9$.

c) Formula (8) poate fi generalizată. Anume, pentru orice constantă reală r, funcţia putere $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^r$, este derivabilă şi, în plus,

$$(x^r)' = rx^{r-1}, \quad \forall\, x > 0 \tag{9}$$

Într-adevăr, $(x^r)' = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x+h)^r - x^r}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{x^r \left[\left(1 + \dfrac{h}{x}\right)^r - 1\right]}{h} =$

$= x^r \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\left(1 + \dfrac{h}{x}\right)^r - 1}{h}$ şi, făcând $h = xy$, $(x^r)' = x^r \cdot \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(1+y)^r - 1}{xy} =$

$= x^{r-1} \cdot \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{(1+y)^r - 1}{y} = rx^{r-1}$, ultima relaţie decurgând din relaţia (45) din capitolul II, p. 89.

Aplicând formula (9) rezultă

$$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \ \forall\, x > 0;$$

$$(\sqrt[3]{x})' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3} - 1} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, \ \forall\, x > 0.$$

Această ultimă relaţie are loc şi pentru $x < 0$. În punctul $x = 0$ funcţiile $f : [0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ şi $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$ nu sunt derivabile (deoarece $f'_d(0) = \infty$; $g'_s(0) = g'_d(0) = \infty$).

De asemenea, $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}$, $\forall\, x \neq 0$ şi

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2}) = -2 \cdot x^{-3} = -\frac{2}{x^3}, \ \forall\, x \neq 0.$$

d) Considerăm funcția logaritmică $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \ln x$ și arătăm că ea *este derivabilă pe intervalul* $(0, \infty)$ și, în plus,

$$(10) \qquad \boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}, \ \forall x > 0}$$

Într-adevăr, pentru orice $x > 0$ avem $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\ln(x+h) - \ln x}{h} =$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \ln \frac{x+h}{x} = \lim_{h \to 0} \ln \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \ln \lim_{h \to 0} \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h} \cdot \frac{1}{x}} = \ln e^{\frac{1}{x}} =$$

$$= \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x}.$$

e) Funcțiile trigonometrice $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$ *sunt derivabile pe* $\mathbf{R}$ *și pentru orice* $x \in \mathbf{R}$, avem

$$(11) \qquad \boxed{(\sin x)' = \cos x};$$

$$(12) \qquad \boxed{(\cos x)' = -\sin x}.$$

Avem, într-adevăr, $(\sin x)' = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2 \sin \frac{h}{2} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)}{h} =$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \lim_{h \to 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = 1 \cdot \lim_{h \to 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = \cos \lim_{h \to 0}\left(x + \frac{h}{2}\right) = \cos x$$

și, similar,

$$(\cos x)' = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h \to 0} \left[- \frac{2 \sin\left(x + \frac{h}{2}\right) \sin \frac{h}{2}}{h} \right] =$$

$$= -\lim_{h \to 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \lim_{h \to 0} \sin\left(x + \frac{h}{2}\right) = -\lim_{h \to 0} \sin\left(x + \frac{h}{2}\right) = -\sin x.$$

Am utilizat de două ori limita binecunoscută $\lim\limits_{u \to 0} \dfrac{\sin u}{u} = 1$. Am făcut mai sus un abuz comod de notație, pe care îl vom mai folosi uneori. Scrierea corectă a formulelor (11), (12) este: $(\sin)'(x) = \cos x$; $(\cos)'(x) = -\sin x$.

Observație. Trebuie făcută distincția între numerele $f'(x_0)$ și $(f(x_0))'$, ultimul fiind nul ca derivată a unei funcții constante. Dacă f' există și este continuă pe un interval deschis care conține x_0, atunci $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$, dar, în general, această relație nu are loc (putându-se întâmpla ca limita nici să nu existe).

Pentru funcția constantă $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $h(x) = \sin \frac{\pi}{4}$ avem $h'(x) = 0$ și nu $h'(x) = \cos \frac{\pi}{4}$; dacă $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sin x$, atunci $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4}$, iar $f\left(\frac{\pi}{4}\right)' = \left(\sin \frac{\pi}{4}\right)' = 0$. Similar, $(\ln 7)' = 0$ și $(\ln)'(7) = \frac{1}{7}$ [este greșit să se scrie $(\ln 7)' = \frac{1}{7}$, reproducând mecanic formula (10); de fapt, scrierea corectă a formulei (10) este $(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$, $\forall x > 0$].

2.2. Reguli de derivare

Vom arăta că pentru funcții $f, g : E \to \mathbf{R}$ derivabile, $E \subset \mathbf{R}$, funcțiile $f + g$, $f - g$, fg etc. au aceeași proprietate.

TEOREMA IV. 3. Presupunem că f, g sunt derivabile în punctul $x_0 \in E$ și λ o constantă.

Atunci:

(a) suma $f + g$ este derivabilă în x_0 și

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0) \tag{13}$$

(b) λf este derivabilă în x_0 și

$$(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0) \tag{14}$$

(c) produsul fg este funcție derivabilă în x_0 și

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \tag{15}$$

Demonstrație. a) Notăm $\Phi = f + g$. Trebuie calculat raportul

$$\frac{\Phi(x) - \Phi(x_0)}{x - x_0} = \frac{(f(x) + g(x)) - (f(x_0) + g(x_0))}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

pentru $x \neq x_0$. Trecând la limită ($x \to x_0$) ambele rapoarte din membrul drept au limită finită, anume $f'(x_0)$ și $g'(x_0)$. Atunci limita $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\Phi(x) - \Phi(x_0)}{x - x_0}$ există și este egală cu $f'(x_0) + g'(x_0)$, adică $\Phi'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$, deci formula (13).

Reținem deci că suma a două funcții derivabile $f, g : E \to \mathbf{R}$ este o funcție derivabilă pe E și derivata sumei este egală cu suma derivatelor; altfel scris,

$$(f + g)' = f' + g' \tag{16}$$

Relația (14) se demonstrează imediat: $(\lambda f)'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{(\lambda f)(x) - (\lambda f)(x_0)}{x - x_0} =$

$= \lambda \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lambda f'(x_0)$; așadar;

$$(17) \qquad \boxed{(\lambda f)' = \lambda f'}.$$

adică, *o constantă „iese afară" de sub derivată.* Pentru $\lambda = -1$ avem $(-f)' = -f'$.

Probăm acum relația (15). Notăm $\psi = fg$.

$$(fg)'(x_0) = \psi'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\psi(x) - \psi(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{[f(x) - f(x_0)]g(x) + f(x_0)[g(x) - g(x_0)]}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) +$$

$$+ f(x_0) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

Am folosit faptul că g este continuă în x_0 (fiind derivabilă în x_0), deci $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$.

Reținem totodată că dacă $f, g : E \to \mathbf{R}$ sunt funcții derivabile pe E, atunci fg este derivabilă pe E și are loc regula de derivare a produsului

$$(18) \qquad \boxed{(fg)' = f' \cdot g + f \cdot g'}$$

Teorema este demonstrată. Reținem că rezultatele obținute într-un punct $x_0 \in E$ conduc la rezultate privind derivabilitatea funcțiilor $f + g$, λf, fg pe mulțimea E.

Prin inducție după k, se demonstrează imediat următorul

COROLAR. Dacă $f_1, f_2, \ldots, f_k$ sunt funcții derivabile în punctul x_0, atunci suma $f_1 + f_2 + \ldots + f_k$, respectiv produsul $f_1 f_2 \ldots f_k$ sunt derivabile în x_0 și, în plus:

$$(f_1 + f_2 + \ldots + f_k)'(x_0) = f_1'(x_0) + f_2'(x_0) + \ldots + f_k'(x_0) \text{ și}$$

$$(f_1 f_2 \ldots f_k)'(x_0) = f_1'(x_0) f_2(x_0) \ldots f_k(x_0) + f_1(x_0) f_2'(x_0) \ldots f_k(x_0) +$$

$$+ \ldots + f_1(x_0) f_2(x_0) \ldots f_{k-1}(x_0) f_k'(x_0).$$

Altfel scris, dacă f_j, $1 \leq j \leq k$, sunt derivabile pe E, atunci $\left(\sum\limits_{j=1}^{k} f_j\right)' = \sum\limits_{j=1}^{k} f_j'$, $\left(\prod\limits_{j=1}^{k} f_j\right)' = \sum\limits_{j=1}^{k} (f_1 \ldots f_j' \ldots f_k)$. De exemplu, pentru $k = 3$, $(f_1 + f_2 + f_3)' = f_1' + f_2' + f_3'$ și $(f_1 f_2 f_3)' = f_1' f_2 f_3 + f_1 f_2' f_3 + f_1 f_2 f_3'$.

TEOREMA IV.4. Presupunem că f și g sunt derivabile în x_0 și că $g(x_0) \neq 0$. Atunci funcția-cât $\frac{f}{g}$ este derivabilă în x_0 și, în plus:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}. \tag{19}$$

Demonstrație. Notăm $h = \frac{f}{g}$; deoarece $g(x_0) \neq 0$ și g este continuă în x_0 rezultă că g este nenulă într-o vecinătate a punctului x_0 și deci are sens derivabilitatea câtului în punctul x_0.

Avem
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = h'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} =$$
$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{(x - x_0)g(x)g(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{[f(x) - f(x_0)]g(x_0) - [g(x) - g(x_0)]f(x_0)}{(x - x_0)g(x)g(x_0)} =$$
$$= \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x_0) - \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} f(x_0)\right] \frac{1}{g(x)g(x_0)} =$$
$$= [f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)] \frac{1}{g^2(x_0)}.$$

Demonstrația arată totodată că dacă f și g sunt derivabile pe E și g nu se anulează în nici un punct din E, atunci câtul $\frac{f}{g}$ este derivabil pe E și, în plus,

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}} \tag{20}$$

În particular, luând pentru f funcția constantă 1, rezultă

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}. \tag{21}$$

în punctele unde g nu se anulează.

În acest moment știm să derivăm funcții reale polinomiale, funcții raționale, funcții trigonometrice etc.

Exemple

1) Funcția reală $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^{10} + 4x^5 - x + 9$ este o sumă finită de funcții de forma ax^n, deci este derivabilă pe $\mathbf{R}$; în plus, $f'(x) = 10x^9 + 20x^4 - 1$, $\forall x \in \mathbf{R}$, aplicând regulile (16), (17), (7) și (8).

Similar, pentru funcția $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = -2x^6 + 3x^2 - 10x$, avem $g'(x) = -12x^5 + 6x - 10$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

2) Pentru $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = (x + \sqrt{x})^2$ avem $f(x) = x^2 + 2x^{\frac{3}{2}} + x$, deci $f'(x) = 2x + 3\sqrt{x} + 1$, $\forall x > 0$.

Similar, pentru funcția $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = (\sqrt[3]{x} - 1)^3$, avem $g(x) = x - 3\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x} - 1 = x - 3x^{\frac{2}{3}} + 3x^{\frac{1}{3}} - 1$, deci $g'(x) = 1 - 2x^{-\frac{1}{3}} + x^{-\frac{2}{3}} = 1 - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ pentru orice $x \neq 0$.

3) Pentru funcțiile $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$, $g(x) = \sin x$ avem $f'(x) = 2x$, $g'(x) = \cos x$ și, ca atare, $(x^2 \sin x)' = 2x \sin x + x^2 \cos x$, $\forall x \in \mathbf{R}$, aplicând regula de derivare a produsului. Similar, $(x^3 \cos x)' = 3x^2 \cos x - x^3 \sin x$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

4) Funcția rațională $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$ este derivabilă în orice punct $x \in \mathbf{R}$ și aplicând regula (20), $f'(x) = \dfrac{3x^2(x^2+1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \dfrac{x^4 + 3x^2}{(x^2 + 1)^2}$. Funcția $f : \mathbf{R} \setminus \{-1, 1) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ este derivabilă în orice punct $x \notin \{-1, 1\}$ și $f'(x) = \dfrac{1 \cdot (x^2 - 1) - x \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = -\dfrac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}$. În punctele $x = -1$, $x = 1$ funcția f nu este definită și nu se pune problema derivabilității lui f în aceste puncte.

5) În orice punct unde $\cos x \neq 0$ avem

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

aplicând regulile (20), (11), (12). În mod similar, în punctele unde $\sin x \neq 0$ avem

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

2.3. Derivarea funcției compuse și a inversei unei funcții

Trecem acum la stabilirea altor două teoreme generale de derivare, relativ la compunere și inversare. Deosebit de importantă este formula de derivare a funcțiilor compuse (funcții de funcție). În acest sens, are loc

TEOREMA IV.5. Fie I, J *intervale* și $I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} \mathbf{R}$ două funcții. Dacă f este derivabilă în punctul $x_0 \in I$ și g este derivabilă în punctul $y_0 = f(x_0)$, atunci funcția compusă $G = g \circ f$ este derivabilă în x_0 și $G'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0)$. Dacă f este derivabilă pe I, g este derivabilă pe J, atunci $g \circ f$ este derivabilă pe I și are loc formula:

$$(22) \qquad \boxed{(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'}$$

O scriere practică a regulii (22) este:

$$G'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x), \quad \forall x \in I.$$

O schiță de demonstrație ar fi de a calcula limita câtului $\dfrac{\Delta g}{\Delta x}$ utilizând relația $\dfrac{\Delta g}{\Delta x} = \dfrac{\Delta g}{\Delta f} \cdot \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ și făcând $\Delta x \to 0$; rezultă $\Delta f \to 0$, deci

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = \lim_{\Delta f \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta f} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = g'(f) \cdot f'.$$

Insuficiența acestui raționament constă în aceea că Δf se poate anula chiar de o infinitate de ori în vecinătatea unui punct.

Demonstrație. Avem de arătat că

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Considerăm funcția ajutătoare $F : J \to \mathbf{R}$, definită prin

$$F(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0}, & \text{dacă } y \neq y_0 \\ g'(y_0), & \text{dacă } y = y_0. \end{cases} \tag{23}$$

Funcția F este continuă în punctul y_0 deoarece

$$\lim_{y \to y_0} F(y) = \lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = g'(y) = F(y_0).$$

Pe de altă parte, pentru orice $x \neq x_0$ avem

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = F(f(x)) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{24}$$

Într-adevăr, dacă $f(x) = f(x_0)$, atunci ambii termeni sunt nuli, iar dacă $f(x) \neq f(x_0)$, atunci $f(x) \neq y_0$ și, conform (23), $F(f(x)) = \dfrac{g(f(x)) - g(y_0)}{f(x) - y_0}$, deci relația (24) este dovedită în ambele cazuri. Trecând la limită ($x \to x_0$) în relația (24) și observând că $F(f(x) \to F(f(x_0)) = F(y_0) = g'(y_0)$, rezultă că

$$G'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = g'(y_0) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g'(y_0) \cdot f'(x_0).$$

Teorema IV.5 este demonstrată, formula (22) fiind o consecință directă a relației anterioare.

Formula stabilită mai sus ne permite să calculăm derivatele unor funcții mai complicate, obținute prin compunerea unor funcții ale căror derivate sunt cunoscute. Ea se extinde la compunerea unui număr finit oarecare de funcții derivabile. Astfel, dacă f, g, h sunt funcții astfel încât funcția $H = h \circ g \circ f$ să fie definită pe un interval I și dacă f este derivabilă în $x_0 \in I$, g derivabilă în $f(x_0)$ și h în punctul $g(f(x_0))$, atunci funcția compusă H este derivabilă în x_0 și, în plus,

$$H'(x_0) = (h \circ g \circ f)'(x_0) = h'(g(f(x_0))) \cdot g'(f(x_0)) \; f'(x_0). \tag{25}$$

Demonstrația este o simplă aplicare repetată a teoremei precedente. Anume, notând $G = g \circ f$ avem $H = h \circ G$, deci $H'(x_0) = h'(G(x_0)) \cdot G'(x_0)$ și, ținând cont că $G(x_0) = g(f(x_0))$, $G'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$, rezultă formula (25).

Exemple

1) Fie $G : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $G(x) = (2x^2 + x)^3$, $x \in \mathbf{R}$: considerând funcțiile $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2x^2 + x$, $g(u) = u^3$, se observă că $G = g \circ f$, deci conform (22), $G'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ și cum $g'(u) = 3u^2$, rezultă $G'(x) = 3 \cdot f(x)^2 \cdot f'(x) = 3(2x^2 + x)^2 \cdot (4x + 1)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

2) Fie $G : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $G(x) = \sin \alpha x$ ($\alpha \in \mathbf{R}$, constant). Așadar, $G(x) = \sin u(x)$, unde $u(x) = \alpha x$, deci $G'(x) = \cos u(x) \cdot u'(x) = \alpha \cos \alpha x$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Similar, pentru $G : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $G(x) = \sin^2 x$, avem $G(x) = v^2(x)$, unde $v(x) = \sin x$, deci $G'(x) = 2v(x) \cdot v'(x) = 2 \sin x \cos x$.

3) Considerăm $H : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $H(x) = \cos^2 3x$, $x \in \mathbf{R}$. În acest caz funcția H este compunerea funcțiilor $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 3x$; $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(u) = \cos u$; $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $h(v) = v^2$ deci $H = h \circ g \circ f$. Dar $f'(x) = 3$, $g'(u) = -\sin u$, $h'(v) = 2v$ și aplicând formula (25) rezultă $H'(x) = 2(\cos 3x)(-\sin 3x) \cdot 3 = -3 \sin 6x$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

Stabilim acum o ultimă teoremă importantă de derivare. Reamintim că dacă $f : I \to \mathbf{R}$ este o funcţie continuă şi strict monotonă pe un interval I, atunci mulţimea $J = \{f(x) \mid x \in I\}$ este, de asemenea, un interval; $f : I \to J$ este bijectivă şi inversa ei $g = f^{-1} : J \to I$ este o funcţie continuă (conform teoremei III.7). Ce se poate spune despre g dacă funcţia f este derivabilă? În acest sens are loc

TEOREMA IV.6. Fie $f : I \to J$ o funcţie continuă şi bijectivă între două intervale. Presupunem că f este derivabilă într-un punct $x_0 \in I$ şi $f'(x_0) \neq 0$, atunci inversa $g = f^{-1}$ este derivabilă în punctul $y_0 = f(x_0)$ şi, în plus,

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \tag{26}$$

Demonstraţie. Bineînţeles, trebuie examinată existenţa limitei raportului $\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0}$ când y tinde către y_0, $y \neq y_0$. Fie $x = f^{-1}(y)$; din faptul că $y \neq y_0$, rezultă $x \neq x_0$ şi, în plus,

$$\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}. \tag{27}$$

Făcând $y \to y_0$, rezultă $g(y) \to g(y_0)$ adică $x \to x_0$ şi ultimul raport tinde către $\frac{1}{f'(x_0)}$. Atunci primul raport din relaţia (27) va avea limită, deci funcţia g este derivabilă în punctul y_0. Totodată se deduce relaţia (26).

Relaţia (26) poate fi scrisă ca egalitate de funcţii astfel: $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$, dacă ipotezele teoremei IV.6 au loc în orice punct din I.

Observaţie. Dacă în enunţ renunţăm la ipoteza $f'(x_0) \neq 0$, se observă din demonstraţia anterioară că dacă $f'(x_0) = 0$, atunci $g'(y_0) = +\infty$ sau $-\infty$ (după cum f este strict crescătoare sau strict descrescătoare), adică în punctul $y_0 = f(x_0)$ graficul funcţiei inverse are o tangentă verticală.

Consecinţe

1) Considerăm funcţia $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$, definită prin $f(x) = \sin x$. În orice punct $x_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ sunt verificate condiţiile teoremei IV.6, deci funcţia $f^{-1} = \arcsin$ este derivabilă în orice punct $y_0 \in (-1, 1)$. În plus, aplicând formula (26) şi notând $y_0 = \sin x_0$, deci $\arcsin y_0 = x_0$, rezultă

$$(\arcsin)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{\cos x_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x_0}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y_0^2}}, \ \forall\, y_0 \in (-1, 1).$$

Pentru $y_0 = -1$ avem $x_0 = -\frac{\pi}{2}$ şi $f'(x_0) = 0$ şi conform observaţiei anterioare, $(\arcsin)'(-1) = \infty$. În mod similar, $(\arcsin)'(+1) = \infty$.

Reţinem, aşadar, formula

$$(28) \qquad \boxed{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ \forall x \in (-1, 1)}$$

Raţionând în mod similar sau aplicând formula $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$, $\forall x \in [-1, 1]$, rezultă

$$(29) \qquad \boxed{(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ \forall x \in (-1, 1)}$$

Fie acum funcţia $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$, care satisface condiţiile teoremei IV.6 pentru $I = -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$, $J = \mathbf{R}$, în orice punct $x_0 \in I$. Inversa ei, $\operatorname{arctg} : \mathbf{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, rezultă derivabilă în orice punct $y_0 \in \mathbf{R}$, $y_0 = \operatorname{tg} x_0$ şi, în plus,

$$(\operatorname{arctg})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x_0}} = \cos^2 x_0 = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x_0} = \frac{1}{1 + y_0^2}.$$

Cu notaţii schimbate, am demonstrat formula

$$(30) \qquad \boxed{(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \ \forall x \in \mathbf{R}}$$

În mod similar, sau aplicând formula $\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$, $\forall x \in \mathbf{R}$, avem $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

2) Fie $I = (0, \infty)$, $J = \mathbf{R}$ şi $f : I \to J$, $f(x) = \ln x$. Conform teoremei IV.6 ale cărei condiţii sunt verificate în orice punct $x_0 \in I$, rezultă că funcţia exponenţială $f^{-1} = \mathrm{EXP}$ este derivabilă pe $\mathbf{R}$ şi, în plus, $\forall y_0 \in \mathbf{R}$, $y_0 = \ln x_0$ avem

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{\frac{1}{x_0}} = x_0 = e^{y_0}.$$

Cu alte cuvinte, am demonstrat formula

$$(31) \qquad \boxed{(e^x)' = e^x, \ \forall x \in \mathbf{R}}$$

3) Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^n (n \geq 1)$ întreg. Notând $I = [0, \infty)$, $J = [0, \infty)$, avem o aplicaţie continuă şi bijectivă $f : I \to J$, derivabilă în orice

punct $x_0 > 0$ și $f'(x_0) = nx_0^{n-1} \neq 0$. Conform teoremei IV.6, f^{-1} este derivabilă în $y_0 = f(x_0) = x_0^n$ și $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{nx_0^{n-1}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{y_0^{n-1}}}$. Așadar, pentru orice $x > 0$ avem $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$.

Conform observației anterioare, funcția $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $g(x) = \sqrt[n]{x}$ nu este derivabilă în punctul $x = 0$ și avem $g_d(0) = \infty$, dacă n este par și $g'(0) = \infty$, dacă n este impar.

2.4. Prezentarea sintetică a derivatelor funcțiilor uzuale și a regulilor de derivare

I. *Reguli de derivare* (fără a mai preciza condițiile în care au loc)

1°. $(f \pm g)' = f' \pm g'$, $(\lambda f)' = \lambda \cdot f'$;

2°. $(fg)' = f'g + fg'$;

3°. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$;

4. $(g(f))' = g'(f) \cdot f'$; $(f^{-1})' = \frac{1}{f'(f^{-1})}$.

II. *Tabloul de derivare al funcțiilor elementare*:

Funcția	Derivata	Domeniul de derivabilitate
c (constantă)	0	$\mathbf{R}$
x	1	$\mathbf{R}$
x^n, $n \geq 1$ întreg	nx^{n-1}	$\mathbf{R}$
x^r, r real	rx^{r-1}	cel puțin $(0, +\infty)$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(0, +\infty)$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$(0, +\infty)$
e^x	e^x	$\mathbf{R}$
a^x, $a > 0$, $a \neq 1$	$a^x \ln a$	$\mathbf{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbf{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbf{R}$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\cos x \neq 0$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\sin x \neq 0$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbf{R}$
$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbf{R}$

Toate aceste derivate au fost calculate anterior, cu excepţia derivatei funcţiei $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = a^x (a > 0,\ a \neq 1$ constant). În acest caz avem $\ln f(x) = x \ln a$ şi, derivând în raport cu x, rezultă $\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \ln a$, deci $f'(x) = f(x) \cdot \ln a$, adică $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Funcţia putere poate fi definită şi astfel: $x^r = e^{r \ln x}$, $x > 0$ şi, ca atare, $(x^r)' = e^{r \ln x} \cdot r \cdot \frac{1}{x} = x^r \cdot r \cdot \frac{1}{x} = r x^{r-1}$; regăsim formula (9).

Teorema de derivare a funcţiilor compuse împreună cu tabloul anterior permite obţinerea următoarelor formule utilizate curent (unde $u = u(x)$ este o funcţie derivabilă).

Tabloul de derivare al funcţiilor compuse

Funcţia	Derivata	Domeniul de derivabilitate
u	u'	
u^n, $n \geq 1$ întreg	$nu^{n-1} \cdot u'$	
u^r, r real $(u > 0)$	$ru^{r-1} \cdot u'$	$(u > 0)$
$\sqrt{u}$ $(u \geq 0)$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$(u > 0)$
$\ln u$ $(u > 0)$	$\frac{u'}{u}$	$(u > 0)$
e^u	$e^u \cdot u'$	
a^u, $a > 0$, $a \neq 1$	$a^u \cdot u' \cdot \ln a$	
$\sin u$	$\cos u \cdot u'$	
$\cos u$	$-\sin u \cdot u'$	
$\operatorname{tg} u$ $(\cos u \neq 0)$	$\frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$	$(\cos u \neq 0)$
$\operatorname{ctg} u$ $(\sin u \neq 0)$	$-\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$	$(\sin u \neq 0)$
$\arcsin u$ $(u^2 \leq 1)$	$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$	$(u^2 < 1)$
$\arccos u$ $(u^2 \leq 1)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$	$(u^2 < 1)$
$\operatorname{arctg} u$	$\frac{u'}{1+u^2}$	
$\operatorname{arcctg} u$	$-\frac{u'}{1+u^2}$	

Adăugăm că dacă u v sunt funcţii derivabile şi $u > 0$, atunci funcţia $u^v = e^{v \ln u}$ are derivata

$$(u^v)' = e^{v \ln u}\left(v' \ln u + v \frac{u'}{u}\right) = u^v\left(v' \ln u + v \frac{u'}{u}\right),$$

formulă care rezultă aplicând teorema de derivare a funcţiilor compuse funcţiei $e^{v \ln u}$ şi ţinând cont că $(v \ln u)' = v' \ln u + v \cdot \frac{u'}{u}$.

Începând din acest moment ar trebui să ştiţi să calculaţi derivata oricărei funcţii elementare!

Prezentăm, pe scurt, noțiunea de *diferențială a unei funcții*.
Fie $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ o funcție derivabilă într-un punct $x_0 \in (a, b)$.
Avem

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

deci are loc formula aproximativă $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \simeq f'(x_0)$, adică

$$f(x) \simeq f(x_0) + (x - x_0) \cdot f'(x_0), \tag{32}$$

sau, echivalent, $\Delta f \simeq f'(x_0) \cdot \Delta x$, în vecinătatea lui x_0.

Se numește *diferențiala lui f în x_0* aplicația $T : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $T(h) = f'(x_0) \cdot h$ și se notează $T = \mathrm{d}f(x_0)$; așadar, $\forall\, h \in \mathbf{R}$, $\mathrm{d}f(x_0)(h) = f'(x_0) \cdot h$.

În cazul particular când $f(x) = x$, avem $f'(x_0) = 1$ și, ca atare, $\mathrm{d}x(x_0)(h) = h$, $\forall\, h \in \mathbf{R}$. Rezultă formula

$$\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0) \cdot \mathrm{d}x(x_0) \text{ (egalitate de aplicații } \mathbf{R} \to \mathbf{R}). \tag{33}$$

Formula (32) se mai scrie: $\Delta f \simeq f'(x_0) \cdot \Delta x = \mathrm{d}f(x_0)(\Delta x)$; se spune că diferențiala lui f aproximează creșterea lui f. Dacă f este derivabilă în orice punct din (a, b), atunci relația (33) se scrie:

$$\mathrm{d}f = f'(x) \cdot \mathrm{d}x, \tag{34}$$

ceea ce explică notația $f'(x) = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, amintită la pagina 123.

Exemple. 1) Diferențiala funcției $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 + 2x^2$ în punctul $x_0 = 1$ este aplicația $T = \mathrm{d}f(1)$ definită prin $T(h) = f'(1) \cdot h$, adică $T(h) = 7h$, $\forall\, h \in \mathbf{R}$.

2) Pentru $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 + \sin 3x$, avem $\mathrm{d}f = (2x + 3\cos 3x)\,\mathrm{d}x$; similar, $\mathrm{d}(x^2) = 2x\,\mathrm{d}x$; $\mathrm{d}(\sin x) = \cos x\,\mathrm{d}x$; $\mathrm{d}(e^x) = e^x\,\mathrm{d}x$.

Regulilor de derivare le corespund reguli de diferențiere. Dacă f și g sunt funcții derivabile pe un interval deschis, atunci:

$$\mathrm{d}(f + g) = (f + g)'\mathrm{d}x = (f' + g')\mathrm{d}x = f'\mathrm{d}x + g'\mathrm{d}x = \mathrm{d}f + \mathrm{d}g;$$

$$\mathrm{d}(f - g) = \mathrm{d}f - \mathrm{d}g;\ \forall\, \lambda \in \mathbf{R},\ \mathrm{d}(\lambda f) = \lambda \mathrm{d}f;$$

$$(\mathrm{d}fg) = (fg)'\mathrm{d}x = (fg' + f'g)\mathrm{d}x = f\mathrm{d}g + g\mathrm{d}f;$$

în punctele unde funcția g este nenulă, avem: $\mathrm{d}\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{g\mathrm{d}f - f\mathrm{d}g}{g^2}$.

Dacă $G = g(u)$ și $u = f(x)$ cu f, g derivabile (ca în teorema IV.5), atunci regula derivării funcțiilor compuse se mai scrie:

$$''(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = g'(u) \cdot u'(x) = \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}, \text{ adică } \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

2.5. Derivate de ordin superior

Fie $f : E \to \mathbf{R}$ o funcție derivabilă pe mulțimea $E \subset \mathbf{R}$. În acest caz este definită derivata $f' : E \to \mathbf{R}$, $x \mapsto f'(x)$ a funcției f. Funcția f se numește *derivabilă de două ori* într-un punct $x_0 \in E$ dacă f este derivabilă într-o veci-

nătate a lui x_0 şi f' este derivabilă în x_0; în acest caz, derivata lui f' în punctul x_0 se numeşte *derivata a doua* (sau *de ordinul doi*) a lui f în x_0 şi se notează $f''(x_0)$. Dacă f' este derivabilă pe E, atunci derivata lui f' se numeşte *derivata a doua* a lui f şi se notează cu f''. În mod similar se definesc $f''' = (f'')'$, $f^{(4)} = (f''')'$ şi, prin inducţie, se defineşte derivata de ordin n, $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$, $n \geqslant 2$. Uneori se mai scrie $\frac{d^n f}{dx^n}$ în loc de $f^{(n)}(x)$. Prin convenţie se defineşte derivata de ordin zero $f^{(0)} = f$ şi derivata de ordin 1, $f^{(1)} = f'$ (se scrie uneori $f^{(2)}$ în loc de f'' şi $f^{(3)}$ în loc de f'''). Dacă pentru orice $n \in \mathbb{N}$, funcţia f este de n ori derivabilă, atunci se spune că f este *indefinit derivabilă*.

Exemple

1) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x^2 - 20x + 4$. Avem $f'(x) = 3x^2 + 2x - 20$, $f''(x) = 6x + 2$, $f'''(x) = 6$, $f^{(n)}(x) = 0$, $\forall\, n \geqslant 4$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Se verifică imediat că toate derivatele unor funcţii polinomiale sunt funcţii polinomiale şi derivatele de ordin strict mai mare decât gradul polinomului sunt identic nule. De asemenea, derivatele unor funcţii raţionale sunt funcţii raţionale.

2) Notând cu D operaţia de derivare, prin care unei funcţii derivabile i se asociază derivata ei, se mai folosesc uneori notaţiile lui A. Cauchy (1789—1857); $Df = f'$, $D^2 f = D(Df) = Df' = f''$, $D^n f = f^{(n)}$, $\forall\, n \geqslant 1$. De exemplu, $Dx^3 = 3x^2$, $D(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n) = a_0nx^{n-1} + a_1(n-1)x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}$, pentru orice constante reale a_k, $0 \leqslant k \leqslant n$, $D^2x^4 = D(4x^3) = 12x^2$, $D^n e^x = e^x$, $\forall\, n \geqslant 1$.

3) Ne propunem să rezolvăm ecuaţia $f''(x) = 0$ pentru funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x^2}$. În acest caz, $f'(x) = -2xe^{-x^2}$, $f''(x) = -2 \cdot e^{-x^2} - 2x \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x) = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ şi soluţiile ecuaţiei date sunt $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

4) Arătăm, prin inducţie după $n \geqslant 1$ natural, că $D^n \sin(\omega x + \varphi) = \omega^n \cdot \sin\left(\omega x + \varphi + \frac{n\pi}{2}\right)$, unde ω şi φ sunt constante. Pentru $n = 1$ avem de probat că $D \sin(\omega x + \varphi) = \omega \sin\left(\omega x + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$, adică $\omega \cos(\omega x + \varphi) = \omega \sin\left(\omega x + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$, ceea ce este evident.

Presupunem afirmaţia dovedită pentru n şi avem de arătat că $D^{n+1} \sin(\omega x + \varphi) = \omega^{n+1} \sin\left(\omega x + \varphi + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)$. Dar $D^{n+1} \sin(\omega x + \varphi) = D(D^n \sin(\omega x + \varphi)) = D\left(\omega^n \sin\left(\omega x + \varphi + \frac{n\pi}{2}\right)\right) = \omega^{n+1} \cdot \cos\left(\omega x + \varphi + \frac{n\pi}{2}\right)$; este deci suficient să observăm că $\sin\left(\omega x + \varphi + \frac{(n-1)\pi}{2}\right) = \cos\left(\omega x + \varphi + \frac{n\pi}{2}\right)$, ceea ce rezultă din faptul că $\sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = \cos a$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$.

5) Calculăm $f^{(n)}(0)$ pentru funcția $f : \mathbf{R} \setminus \{-1\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

Avem $f(0) = f$, $f'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2} = -(x+1)^{-2}$, $f''(x) = (-1)(-2)(x+1)^{-3} = \dfrac{2}{(x+1)^3}$

și, prin inducție, se verifică imediat că $f^{(n)}(x) = (-1)^n \dfrac{n!}{(x+1)^{n+1}}$, $\forall x \neq -1$.

În punctul $x = 0$ avem $f^{(n)}(0) = (-1)^n n!$.

Deci, funcțiile polinomiale, exponențiale, logaritmice, trigonometrice sunt derivabile pe orice interval deschis conținut în domeniul maxim de definiție.

EXERCIȚII (capitolul IV, § 2)

1. Să se calculeze derivata următoarelor funcții $f : E \to \mathbf{R}$ (indicând domeniul maxim de definiție E pentru funcție și mulțimea $F \subset E$ a punctelor unde f este derivabilă):

a) $f(x) = x^2 - x + \dfrac{1}{2}$;

b) $f(x) = x^{100} + \dfrac{1}{25} x^{50} + 1$;

c) $f(x) = \sin x + \cos x$;

d) $f(x) = 5x + \sin x$;

e) $f(x) = 2x^3 + \cos x$;

f) $f(x) = x \cos x$;

g) $f(x) = x + \ln 2 + x \ln 2$;

h) $f(x) = x^3 + \sqrt{x} - \sqrt[3]{x}$;

i) $f(x) = \left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2$;

j) $f(x) = x^2 \ln x$;

k) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$;

l) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+2} + \dfrac{7}{x-1}$;

m) $f(x) = \dfrac{\sin x}{2 + \cos x}$;

n) $f(x) = \sin x \cos x + x$;

o) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$;

p) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$;

q) $f(x) = 3 \operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x$;

r) $f(x) = \dfrac{1}{x^{1987} + 1}$.

2. Să se determine rădăcinile ecuației $f'(x) = 0$ pentru funcțiile următoare $f : E \to \mathbf{R}$ (E fiind mulțimea punctelor unde f este definită și derivabilă):

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$;

e) $f(x) = x \ln x$;

b) $f(x) = \dfrac{x}{2x^2 + 5x + 2}$;

f) $f(x) = x + \cos x$;

c) $f(x) = \dfrac{7x^2 + 20x}{x^2 + 2x - 3}$;

g) $f(x) = \sin x + \cos x$;

d) $f(x) = xe^x$;

h) $f(x) = e^{2x} + e^{-2x}$.

3. a) Presupunem că $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ și că $f(x) = (x+2) \cdot g(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$, unde g este derivabilă în origine și $g(0) = 2$, $g'(0) = -1$. Să se calculeze $f'(0)$.

b) Dacă $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ și $f(x) = x^5 g(x) + \dfrac{1}{x^5 + 1}$, $\forall x \in \mathbf{R}$ și dacă g este derivabilă în $x = 1$, $g(1) = 1$, $g'(1) = 2$, să se calculeze $f'(1)$.

4. Să se indice domeniul maxim de definiție pentru funcțiile f și f' în fiecare din cazurile (vezi enunțul exercițiului 1):

a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$;

b) $f(x) = \sqrt{|x|}$;

c) $f(x) = \sqrt{1 + x}$;

d) $f(x) = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2$;

e) $f(x) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x}}$;

f) $f(x) = \dfrac{1 - x^3}{x^4}$;

g) $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{\sqrt{x}}$;

h) $f(x) = (1 + \sqrt{x} + x)^2$.

5. Se consideră funcțiile $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definite prin $f(x) = x - |x|$, $g(x) = x + |x|$. Să se arate că $f + g$ și fg sunt derivabile pe $\mathbf{R}$, deși f, g nu sunt derivabile în punctul $x = 0$.

6. Să se arate că, deși funcția $g : [0, \infty) \to \mathbf{R}$, $g(x) = \sqrt{x}$ nu este derivabilă în $x = 0$, totuși funcția $f : [0, \infty) - \mathbf{R}$, $f(x) = xg(x)$ este derivabilă în $x = 0$.

7. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$

Să se arate că deși f este derivabilă în punctul $x = 0$, totuși limita $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$ nu există.

8. Să se scrie ecuația tangentei la graficele indicate în punctele respective:

a) $y = x^2$, $x_0 = 1$;

b) $y = x + \sqrt{x}$, $x_0 = 4$;

c) $y = \dfrac{x}{x^3 + 1}$, $x_0 = -2$;

d) $y = \ln x$; $x_0 = 1$;

e) $y = e^x$, $x_0 = 0$;

f) $y = \sin 2x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{8}$.

9. Se consideră funcțiile $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$, $g(x) = -x^2 + 4x + c$ (c constantă). Să se afle c astfel încât graficele lui f și g să aibă o tangentă comună într-un punct comun.

Idem pentru $f, g : [-c, c] \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$, $g(x) = 1 - \sqrt{c^2 - x^2}$, $c > 0$.

10. Folosind regula de derivare a funcțiilor compuse, să se calculeze derivatele funcțiilor următoare (vezi enunțul exercițiului 1):

a) $f(x) = (x^5 - 1)^3$;

b) $f(x) = \sqrt{-4x}$;

c) $f(x) = \sin(2x + 5)$;

d) $f(x) = \sin^2 x + \sin 2x$;

e) $f(x) = \sin^3 x + \cos^4 x$;

f) $f(x) = \sqrt{x^3 - x}$;

g) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$;

h) $f(x) = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^{50}$;

i) $f(x) = \left(\dfrac{x^2 - 1}{x}\right)^{50}$;

j) $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x}$;

k) $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$;

l) $f(x) = \operatorname{tg} 2x$;

m) $f(x) = \ln \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$;

n) $f(x) = \dfrac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x + \dfrac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x$;

o) $f(x) = \sin(\cos x)$;

p) $f(x) = x\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2+1}$;

q) $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} + \operatorname{tg} 2x$;

r) $f(x) = \ln(5x^2 + x)$;

s) $f(x) = \ln \dfrac{1-x}{1+x}$;

t) $f(x) = \ln(\ln x)$;

u) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+16})$;

v) $f(x) = e^{x-x^2}$;

w) $f(x) = e^{\sqrt{x-1}}$;

x) $f(x) = \operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x$;

y) $f(x) = \left(\dfrac{e^x+1}{e^{2x}+1}\right)^2$;

z) $f(x) = 3^{x^2+x+1} + 2^{\sqrt{x^2+1}}$.

11. Să se calculeze derivatele următoarelor funcţii $f : E \to \mathbf{R}$ în punctele indicate (E fiind domeniul maxim de definiţie):

a) $f(x) = \arcsin \dfrac{1}{x+1}$, $x_0 = 1$;

b) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x_0 = \sqrt{3}$;

c) $f(x) = \ln \dfrac{x+1}{\sqrt{x}} + \ln\sqrt{x}$, $x_0 = 1$;

d) $f(x) = (1 + x^2) \cdot \operatorname{arctg} x$, $x_0 = 1$;

e) $f(x) = \dfrac{a \sin x + b}{b \cos x + a}$, $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$ (unde a, b sunt constante, $a \neq 0$);

f) $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$, $x_0 = 0$;

g) $f(x) = x \ln \dfrac{2x+1}{2x-1}$, $x_0 = -1$.

12. Să se arate că funcţiile $f : (1, \infty) \to (0, \infty)$, $g : (0, \infty) \to (1, \infty)$ definite prin $f(x) = \sqrt{x^2-1}$, $g(y) = \sqrt{y^2+1}$ sunt inverse ($g = f^{-1}$) şi să se verifice că $g'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$, $\forall x > 1$, şi $f'(g(y)) \cdot g'(y) = 1$, $\forall y > 0$.

13. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 4$. Să se arate că $f'(x) > 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$ şi că f este bijectivă. Să se calculeze $(f^{-1})'(4)$ şi să se arate că $(f^{-1})'(y) > 0$, $\forall y \in \mathbf{R}$.

14. Să se calculeze: a) diferenţialele $df(x_0)$ pentru funcţiile $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ indicate: $f(x) = x^2 + 5x$, $x_0 = 1$; $f(x) = \sqrt{1+x^2} + 2x$, $x_0 = 0$; $f(x) = e^{2x} - x^2$, $x_0 = 0$.

b) diferenţialele df pentru $f(x) = x^3 - x$; $f(x) = x + \ln(x^2+1)$; $f(x) = \cos 2x - \cos^2 x$.

15. a) Să se arate că funcţia $y : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto y(x) = A \cos \omega x + B \sin \omega x$ (A, B, ω fiind constante) verifică relaţia $y''(x) + \omega^2 y(x) = 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

b) Să se afle $p, q \in \mathbf{R}$ ştiind că funcţia $y(x) = e^{-2x} \sin 3x$ verifică relaţia $y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

c) Pentru ce constantă reală a funcţia $y(x) = e^{ax}$ verifică relaţia $y''(x) + 2y'(x) - 3y(x) = 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$? Idem, $y(x) = x\, e^{ax}$ verifică relaţia $y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = 0$?

16. Să se rezolve (în $\mathbf{R}$) ecuațiile $f'(x) = 0$ și $f''(x) = 0$ pentru fiecare din funcțiile $f : E \to \mathbf{R}$ următoare (unde E este mulțimea punctelor unde f este de două ori derivabilă):

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^3 + 1}$;

b) $f(x) = x \ln x$;

c) $f(x) = x^2 + \ln x$;

d) $f(x) = \sin x - \cos x$;

e) $f(x) = \ln \sin x$;

f) $f(x) = \ln (x^2 + x)$;

g) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x + 1}$;

h) $f(x) = e^{-x} \cdot \sin x$;

i) $f(x) = e^{x - \sqrt{x}}$;

j) $f(x) = 2^{x^2 - 2x}$;

k) $f(x) = \dfrac{1}{2} \sin 2x + \dfrac{1}{3} \sin 3x$;

l) $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{x + 1}{x - 1}$.

17. Să se calculeze derivata de ordin $n (n \geq 1)$ pentru funcțiile $f : E \to \mathbf{R}$ următoare (precizând mulțimea E a punctelor unde f este de n ori derivabilă):

a) $f(x) = x^3 - 3x + 2$;

b) $f(x) = x^n$;

c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$;

d) $f(x) = \sin x$;

e) $f(x) = e^{ax} (a \in \mathbf{R}$ constant);

f) $f(x) = \dfrac{1}{x + a}$;

g) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - a^2}$;

h) $f(x) = \ln \dfrac{2x}{x^2 - 1}$.

18. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere reale, distincte două câte două, $P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $P(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n)$ și $f : E \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x - a_1} + \dfrac{1}{x - a_2} + \ldots + \dfrac{1}{x - a_n}$, unde $E = \mathbf{R} \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

a) Să se arate că funcția f este indefinit derivabilă pe E și că $f'(x) < 0$, $\forall x \in E$.

b) Să se arate că $f(x) = \dfrac{P'(x)}{P(x)}$ și că $P(x) \cdot P''(x) < P'(x)^2$, pentru orice $x \in E$.

19. Fie $f, g : (a, b) \to \mathbf{R}$, $a < b$ două funcții de n ori derivabile pe intervalul (a, b). Să se arate, prin inducție după întregul $n \geq 1$, că $\forall x \in (a, b)$.

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)}(x) \cdot g^{(k)}(x) \quad \textit{(regula lui Leibniz)}.$$

§ 3. Aplicații directe ale derivatelor

a) *Viteza și accelerația unui mobil*

Considerăm o axă Δ pe care au fost fixate o origine, un sens și o unitate de măsură. Fie un mobil (asimilabil cu un punct de pe Δ), notând cu $s(t)$ abscisa punctului unde se află mobilul la momentul t (numită și spațiul parcurs

de mobil) și presupunând că s este o funcție derivabilă într-un punct t_0, atunci se definește *viteza instantanee* $v(t_0)$ a mobilului la momentul t_0 ca fiind derivata spațiului în t_0, adică

$$v(t_0) = s'(t_0).$$

Dacă funcția s este de două ori derivabilă în t_0, atunci $s''(t_0) = v'(t_0)$ se numește *accelerația* mobilului la momentul t_0

Reținem că într-o mișcare rectilinie viteza este derivata de ordin întâi, iar accelerația derivata de ordinul doi, a spațiului în raport cu timpul.

Aceste definiții constituie o aplicare firească a definiției I.1 la modelul fizic considerat.

Exemplu

Presupunem că legea de mișcare a unui mobil pe o axă este exprimată prin relația $s(t) = e^{-t} \cos t$. Vrem să determinăm accelerația mobilului după 2 secunde și să calculăm limita vitezei când t tinde către ∞.

Avem $v(t) = s'(t) = -e^{-t} \cdot \cos t - e^{-t} \cdot \sin t = -e^{-t}(\cos t + \sin t)$ și $a(t) = v'(t) = 2e^{-t} \cdot \sin t$, deci $a(2) = \frac{2 \sin 2}{e^2}$ și $\lim\limits_{t \to \infty} v(t) = -\lim\limits_{t \to \infty} \frac{\cos t + \sin t}{e^t}$ și această limită este nulă, deoarece $\left| \frac{\cos t + \sin t}{e^t} \right| \leqslant \frac{2}{e^t}$, $\forall\, t$ (se mai spune că mișcarea se amortizează pentru $t \to \infty$).

b) *Intensitatea curentului electric*

Notând cu $Q(t)$ sarcina care trece printr-o secțiune a unui conductor în intervalul de timp $[0, t]$, atunci pentru orice momente distincte t_1, t_2, diferența $Q(t_2) - Q(t_1)$ este sarcina care a trecut între momentele t_1, t_2, iar câtul $\frac{Q(t_2) - Q(t_1)}{t_2 - t_1}$ este sarcina medie raportată la intervalul de timp dintre momentele t_1, t_2. În analogie cu modelul mecanic anterior, dacă fixăm un moment t_0 și presupunem că funcția Q este derivabilă în t_0, atunci derivata $Q'(t_0)$ este viteza de variație a sarcinii electrice, la momentul t_0, $Q'(t_0) = \lim\limits_{t \to t_0} \frac{Q(t) - Q(t_0)}{t - t_0}$. Ea primește denumirea specifică de *intensitate* a curentului electric la momentul t_0, $i(t_0) = Q'(t_0)$.

Dacă se consideră un circuit electric constând dintr-o inductanță L, o capacitate C și o rezistență R, tensiunea fiind constantă, atunci din legea a doua a lui Kirchhoff rezultă că intensitatea $i(t)$ a curentului prin acel circuit va verifica relația (numită ecuație diferențială).

$$Li''(t) + Ri'(t) + Ci(t) = 0, \forall\, t.$$

Se pune atunci problema determinării funcției $i(t)$, cunoscând L, R, C, ceea ce necesită dezvoltări ale aparatului analizei matematice.

c) *Densitatea liniară de masă*

Considerăm o masă materială presupusă repartizată pe o bară, asimilată cu un interval $[a, b]$. Pentru orice punct $x \in [a, b]$ notăm cu $m(x)$ masa porțiunii cuprinsă în intervalul $[a, x]$. Fixând un punct $x_0 \in (a, b)$, raportul $\frac{m(x) - m(x_0)}{x - x_0}$, $x \neq x_0$ reprezintă densitatea medie de masă între punctele x, x_0.

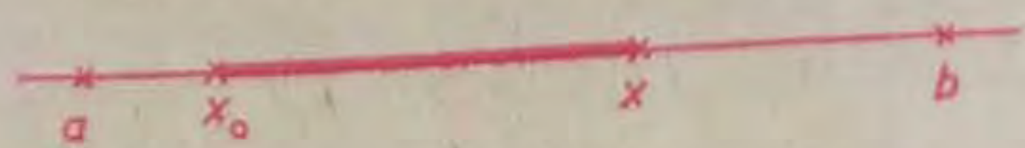


Fig. IV.9

Pe intervale „mici" putem presupune că masa este repartizată omogen și idealizarea acestui fapt o constituie considerarea limitei

$$\rho(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{m(x) - m(x_0)}{x - x_0}$$

(în ipoteza că există). În acest caz se obține o caracteristică importantă, numită *densitatea liniară de masă* în punctul x_0. Așadar, $\rho(x_0) = m'(x_0)$.

Exemplu. Presupunem că pe intervalul $[0, 4]$ este repartizată o masă materială astfel încât $m(x) = x^3 + 3x$; atunci densitatea în punctul $x_0 = 2$ este $\rho(2) = m'(2) = (3x^2 + 3)\,|_{x=2} = 15$. (Uneori în loc de $f(a)$ se scrie $f(x)\,|_{x=a}$).

În toate considerațiile anterioare am omis unitățile de măsură.

d) *Aplicații în economie.* Deși în economie apar de obicei funcții cu valori discrete (costurile și beneficiile fiind exprimate în unități monetare, de pildă în lei), se pot considera funcții continue sau chiar derivabile cu valori în **R** care le prelungesc. Aceasta permite utilizarea metodelor analizei matematice.

1°. Notăm cu $\beta(x)$ beneficiul realizat pentru o cheltuială de x lei. Pentru orice cheltuială suplimentară de h lei, beneficiul suplimentar pe leu cheltuit este egal cu $\frac{\beta(x + h) - \beta(x)}{h}$. Dacă h este „suficient de mic", atunci acest raport dă o indicație dinamică asupra variației beneficiului corespunzător sumei x. Dacă există, limita

$$\beta'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\beta(x + h) - \beta(x)}{h}$$

se numește *beneficiul marginal* corespunzător sumei cheltuite x.

2°. Fie $\gamma(p)$ costul total pentru producerea a p unități dintr-un produs. Pentru a putea controla creșterea sau descreșterea producției, este util de știut cât costă producerea suplimentară a încă h unități din acel produs; atunci costul pe unitatea suplimentară de produs este $\frac{\gamma(p + h) - \gamma(p)}{h}$ și limita acestuia când $h \to 0$ (dacă există), adică $\gamma'(p)$, este un indicator economic important, numit *costul marginal* al producției pentru p unități ale produsului considerat.

Desigur modelele prezentate sunt foarte simplificate, pentru că în realitate funcţiile $\beta(x)$, $\gamma(p)$ pot fi determinate doar empiric, tabelate prin date experimentale şi în mod necesar trebuie să se ţină cont de prezenţa în model a elementelor aleatorii.

Observaţii. Uneori viteza (sau, cum se mai spune, rata) de creştere a unei mărimi fizice sau economice se dovedeşte a fi la fel de importantă ca şi măsura acelei mărimi. (De exemplu, este util de ştiut că ai de parcurs 200 km, dar este important de ştiut şi cu ce viteză te deplasezi). Multe teorii fizice sau prognoze economice sunt exprimate prin legi de creştere care utilizează derivatele unor mărimi alese convenabil.

Considerăm utilă o sinteză a exemplelor anterioare, arătând cum noţiuni din limbajul curent se dovedesc a fi în fond derivate ale anumitor funcţii: viteza este derivata spaţiului, acceleraţia — derivata vitezei, densitatea liniară de masă — derivata masei ca funcţie de lungime, intensitatea unui curent electric — derivata cantităţii de electricitate în raport cu timpul, coeficientul unghiular al tangentei la graficul unei funcţii $y = y(x)$ este $y'(x)$, costul marginal al producţiei — derivata costului total în raport cu cantitatea de produse etc.

e) *Aplicaţii la calcule aproximative*

Dacă f este o funcţie derivabilă într-un punct x_0, am văzut că are loc formula aproximativă

$$f(x) \simeq (f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0), \tag{35}$$

pentru orice x „suficient de apropiat" de x_0. În membrul drept al formulei (35) se află o funcţie de gradul I în x şi, de aceea, se mai spune că (35) este formula de *aproximare liniară* a lui f în jurul punctului x_0.

Exemple

1) Pentru unghiuri θ „mici" se acceptă aproximarea $\sin\theta \simeq \theta$. Aceasta rezultă direct aplicând formula (35) funcţiei $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(\theta) = \sin\theta$ în jurul originii $\theta_0 = \theta$; într-adevăr $f(\theta_0) = \theta$, $f'(\theta_0) = 1$ şi, ca atare, $\sin\theta \simeq \theta$.

2) Indicăm aproximarea liniară a funcţiei $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = e^x$ în jurul punctului $x_0 = 0$. Avem $f(x_0) = e^0 = 1$ şi $f'(x_0) = e^x|_{x=0} = 1$, deci $e^x \simeq 1 + (x - 0)$, adică $e^x \simeq 1 + x$ (fig. IV.10).

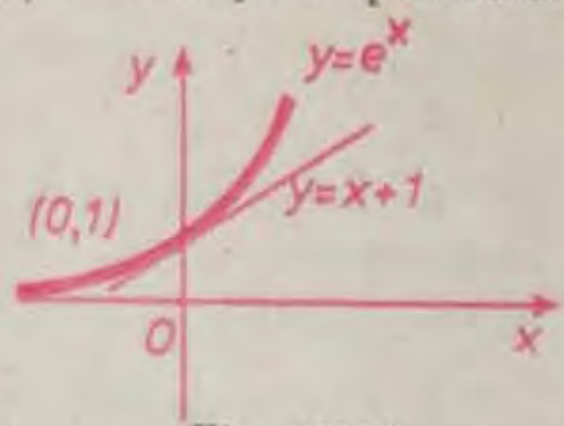


Fig. IV.10

3) Indicăm aproximarea liniară a funcţiei $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 4x^2 + x + \cos x$ în jurul punctului $x_0 = \frac{\pi}{2}$. Aici $f(x_0) = \pi^2 + \frac{\pi}{2}$, $f'(x_0) = 4\pi$, deci $4x^2 + x + \cos x \simeq \pi^2 + \frac{\pi}{2} + 4\pi\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 4\pi x - \pi^2 + \frac{\pi}{2}$.

În general, dacă evoluţia unui proces fizic este descrisă printr-o funcţie derivabilă f, „a liniariza" acest proces la un moment t_0, înseamnă a înlocui $f(t)$ cu aproximarea liniară $f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0)$, pentru orice t dintr-o vecinătate a lui t_0.

4) Calculăm cu aproximaţie $\sqrt{9{,}14}$ şi pentru aceasta considerăm funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ şi punctul $x_0 = 9$. Avem $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, deci $f'(x_0) = \frac{1}{6}$. Formula (35) devine în acest caz $\sqrt{x} \simeq \sqrt{9} + \frac{1}{6}(x - 9)$, adică $\sqrt{x} \simeq \frac{x + 9}{6}$, deci $\sqrt{9{,}14} \simeq \frac{9{,}14 + 9}{6} \simeq 3{,}023$.

5) Calculăm cu aproximație $\sin 47°$ și pentru aceasta considerăm funcția $f:\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sin x$ și $x_0 = \frac{\pi}{4}$. Avem $f'(x_0) = \cos x \Big|_{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ și, ca atare, $\sin x \simeq \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; pentru $x = 47° = 45° + 2° = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{90}$, avem $\sin 47° \simeq \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{90} \simeq 0{,}7317$ (subliniem că în analiza matematică unghiurile se măsoară numai în radiani).

EXERCIȚII (capitolul IV, § 3)

1. Legea de mișcare a unui mobil pe o axă este $s(t) = t^2 - 2t + 1$, $\forall t > 0$. Să se calculeze viteza și accelerația mobilului la momentul $t = 1$. Cum se explică rezultatul obținut?

2. Legea de mișcare a unui mobil pe o axă este $s(t) = e^{kt} \cdot \cos 2t$, $\forall t \in \mathbf{R}$. Să se determine constanta k știind că $s''(t) + 2s'(t) + 5s(t) = 0$, $\forall t$. Apoi să se calculeze viteza și accelerația mobilului la momentele $t = 0$, $t = \frac{\pi}{2}$ și pentru $t \to \infty$.

3. Legea de mișcare a unui mobil pe o axă este $s(t) = t^3 - 12t^2 + 4$. La ce moment accelerația sa este nulă? Care este valoarea minimă a vitezei acelui mobil?

4. Presupunem că masa de repaus a unei particule este m_0. Dacă viteza particulei este v, atunci în teoria relativității se arată că masa particulei este $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ (unde c este viteza luminii). Să se determine $\frac{dm}{dv}$ pentru $v = \frac{1}{3}c$ și $\frac{dm}{dt}$, dacă $v = \frac{1}{3}c$ și $\frac{dv}{dt} = 16\sqrt{2}$ m/s².

5. Presupunem că la fiecare moment t cantitatea de electricitate scursă printr-un conductor este $Q(t) = 2\cos \pi t$. Să se determine intensitatea curentului; la ce momente de timp intensitatea este maximă? Dar minimă?

6. Să se determine aproximările liniare ale funcțiilor $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ următoare, în jurul punctelor indicate:

a) $f(x) = x^2 + 2x + 3$, $x_0 = 0$;
b) $f(x) = x^2 + 2x + 3$, $x_0 = 1$;
c) $f(x) = x^3 + 2\sin x$, $x_0 = 0$;
d) $f(x) = e^x + 2x + \cos x$, $x_0 = 0$;
e) $f(x) = e^{2x+2} - x - 3$, $x_0 = -1$;
f) $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$, $x_0 = 0$.

7. Să se calculeze: a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$; b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{x}$; c) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{3 + x} - 2}{x - 1}$, folosind aproximarea liniară a funcțiilor $f(x)$ de la numărător.

8. Să se calculeze cu aproximație: $\sqrt{4{,}17}$, $\sqrt[3]{29}$, $\ln 1{,}11$, $\sin 33°$, $\cos 56°$.

§ 4. Proprietățile funcțiilor derivabile

După cum am studiat în capitolul III proprietățile generale ale funcțiilor continue, adică proprietățile valabile pentru orice funcție continuă, tot așa vom analiza, în cele ce urmează, unele proprietăți generale ale funcțiilor derivabile. În particular, vom da metode de determinare a punctelor de maxim și minim, a intervalelor de monotonie, a intervalelor de convexitate etc. ale unei funcții, în care rolul derivatelor este esențial.

Unele din teoremele care urmează sunt intuitiv evidente (folosind de regulă interpretarea geometrică a derivatei) și demonstrațiile lor pot fi la început omise, insistând pe înțelegerea enunțurilor.

4.1. Puncte de extrem. Teorema lui Fermat

Într-o serie de probleme tehnice sau economice, și bineînțeles în matematică, este important de știut care sunt maximele și minimele anumitor mărimi variabile. După ce problemele capătă o formulare matematică, adeseori ele se reduc la determinarea punctelor de extrem ale anumitor funcții. Sunt necesare în prealabil câteva definiții precise.

DEFINIȚIA IV.4. **Fixăm o funcție $f : A \to \mathbf{R}$ ($A \subset \mathbf{R}$). Un punct $x_0 \in A$ se numește punct de maxim relativ (respectiv de minim relativ) al lui f dacă există o vecinătate U a punctului x_0 astfel încât pentru orice $x \in U \cap A$ să avem**

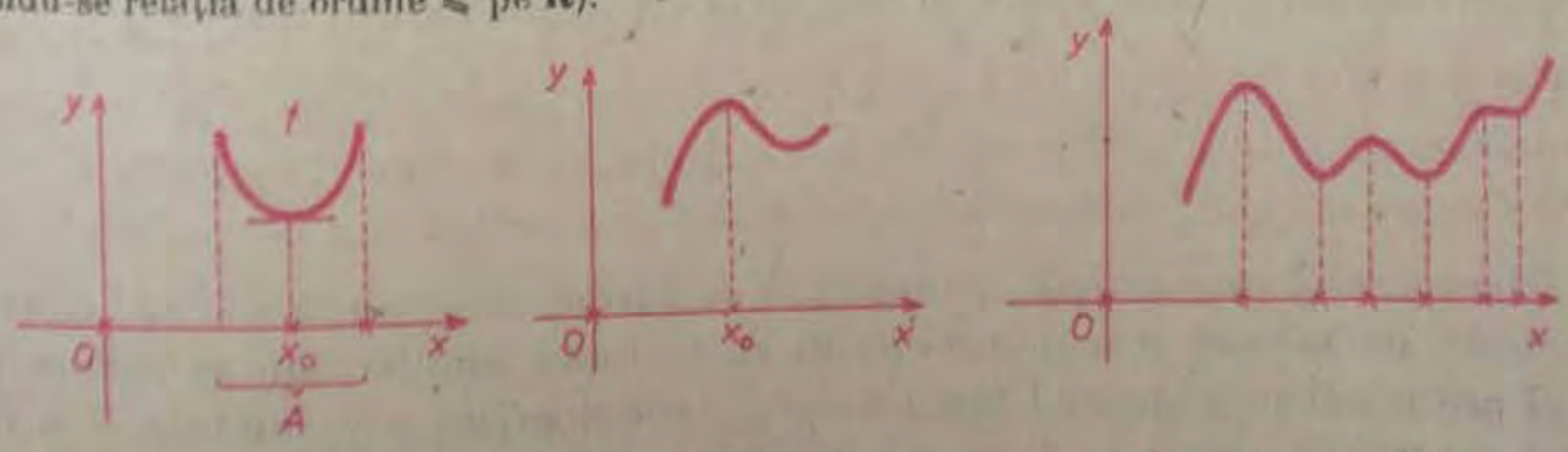
$$f(x) \leqslant f(x_0) \text{ (respectiv } f(x) \geqslant f(x_0)). \tag{36}$$

În acest caz, valoarea $f(x_0)$ se numește un *maxim* (respectiv un *minim*) relativ al lui f.

Punctele de maxim sau de minim relativ se mai numesc *puncte de extrem relativ*. Dacă inegalitățile (36) sunt stricte (pentru orice $x \in U \cap A$, $x \neq x_0$), se spune că x_0 este un punct de extrem strict.

Valorile funcției în punctele ei de extrem relativ se mai numesc *extremele* relative ale funcției.

Observații. 1) Faptul că funcția considerată este cu valori reale este esențial (folosindu-se relația de ordine $\leqslant$ pe $\mathbf{R}$).



a) minim relativ b) maxim relativ c) extreme relative

Fig. IV.11

2) Trebuie remarcat că o funcţie poate să aibă mai multe puncte de maxim şi minim relativ, iar un minim să fie mai mare decât un maxim, ceea ce justifică adjectivul „relativ" (fig. IV.11, c). Valorile $\sup_{x \in A} f(x)$, $\inf_{x \in A} f(x)$ calculate în $\overline{\mathbf{R}}$ se mai numesc *extremele globale* ale lui f pe A.

Punctele de extrem relativ se mai numesc puncte de extrem *local*, deoarece inegalităţile de tipul (36) sunt verificate nu neapărat pe întreg domeniul de definiţie al funcţiei f ci numai în jurul lui x_0.

În cele ce urmează vom renunţa la utilizarea adjectivului „relativ".

3) Dacă marginea $M = \sup_{x \in A} f(x)$ este atinsă, atunci orice punct x astfel încât $f(x_0) = M$ va fi un punct de maxim (nu neapărat strict). Se poate întâmpla ca x_0 să fie un punct de maxim şi totuşi $f(x_0) < M$ (fig. IV.12, *b*). O situaţie analoagă (cu sensul inegalităţii schimbat) are loc pentru marginea inferioară şi pentru punctele de minim.

Dacă marginea superioară $\sup_{x \in A} f(x)$ nu este atinsă pe mulţimea A, atunci se poate ca funcţia să nu aibă puncte de maxim (fig. IV.13). Similar pentru $\inf_{x \in A} f(x)$.

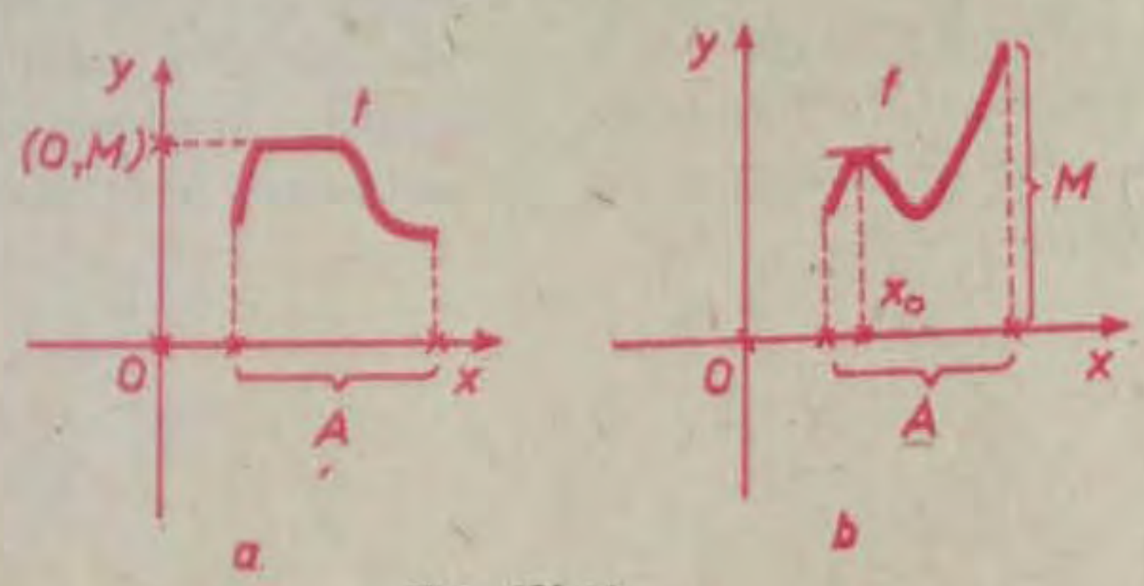


Fig. IV.12

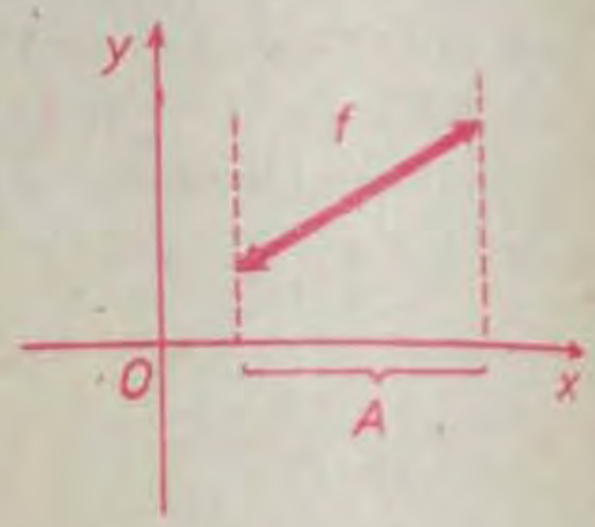


Fig IV.13

Exemple

1) Pentru funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = |x|$, punctul $x_0 = 0$ este punct de minim, deoarece $f(x) \geq f(x_0)$, adică $|x| \geq 0$ în orice vecinătate a originii.

2) Pentru funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sigma(x) \cdot \sin x$, punctele $x_0 \leq 0$, $x_0 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ $(k \in \mathbf{N})$ sunt puncte de minim, iar punctele $x_0 \leq 0$, $x_0 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $(k \in \mathbf{N})$ sunt puncte de maxim.

Utilitatea derivatelor apare în mod evident în următorul rezultat:

TEOREMA IV.7. *(teorema lui P. Fermat, 1601—1665).* **Fie I interval deschis şi $x_0 \in I$ un punct de extrem (relativ) al unei funcţii $f : I \to \mathbf{R}$. Dacă f este derivabilă în punctul x_0, atunci $f'(x_0) = 0$.**

Demonstraţia este simplă. Pentru a fixa ideile, să presupunem că x_0 este un punct de maxim (cazul minimului se tratează similar sau se reduce la cazul precedent considerând funcţia $-f$). Atunci există o vecinătate U a lui x_0 (şi putem presupune că $U \subset I$) astfel încât

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ pentru orice } x \in U. \tag{37}$$

Cum f este derivabilă în x_0, atunci $f'(x_0) = f'_d(x_0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ şi $f'(x_0) = f'_s(x_0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Conform inegalităţii (37) raportul $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ este $\leqslant 0$ (respectiv $\geqslant 0$) pentru $x \in U$, $x > x_0$ (respectiv pentru $x \in U$, $x < x_0$), deci $f'(x_0) \leqslant 0$, $f'(x_0) \geqslant 0$, de unde $f'(x_0) = 0$.

Observaţii. 1) Dacă I nu ar fi fost interval deschis, de exemplu $I = [a, b]$ şi $x_0 = a$ (sau $x_0 = b$), atunci teorema nu ar fi fost adevărată pentru că $f(x)$ nu ar fi fost definită pentru $x < a$, respectiv pentru $x > b$ (fig. IV.14).

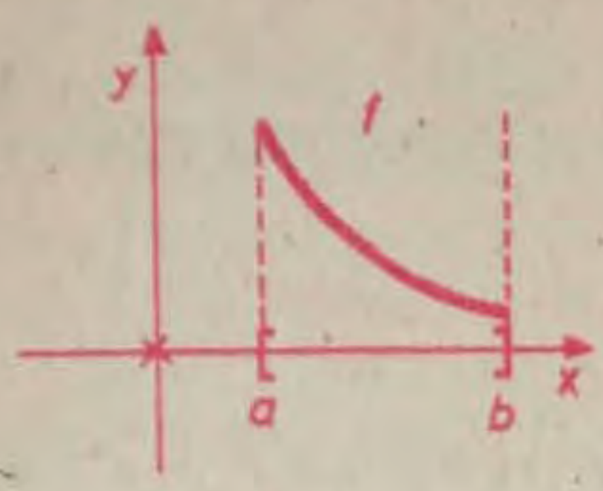


Fig. IV.14

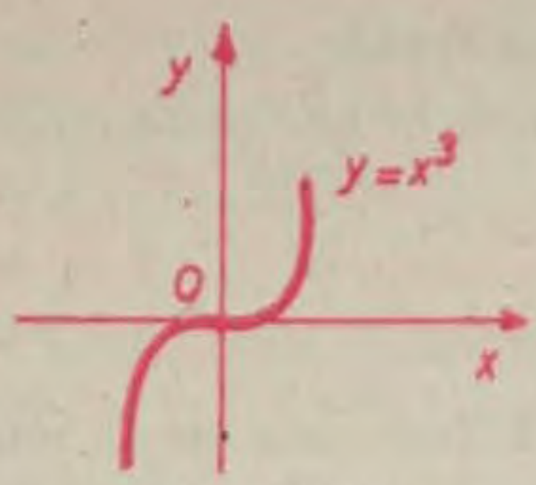


Fig. IV.15

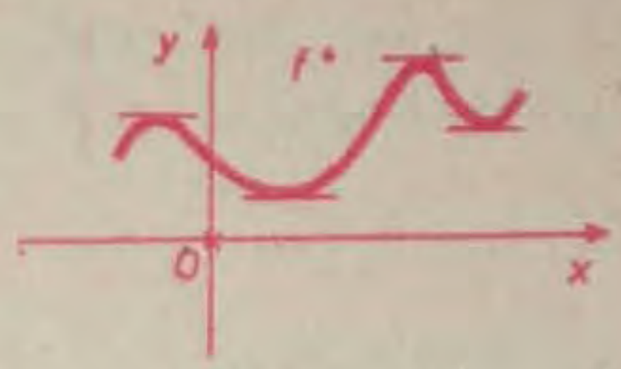


Fig. IV.16

2) Reciproca teoremei lui Fermat este în general falsă: din faptul că f este derivabilă într-un punct x_0 şi $f'(x_0) = 0$ nu rezultă că x_0 este punct de extrem. De exemplu, pentru funcţia $f(x) = x^3$ avem $f'(0) = 0$, dar punctul $x_0 = 0$ nu este punct de extrem local pentru că f este strict crescătoare (fig. IV.15). Se mai spune că teorema lui Fermat dă condiţii necesare de extrem, dar nu şi suficiente.

Teorema lui Fermat are o interpretare geometrică evidentă: în condiţiile enunţului, într-un punct de extrem, tangenta la grafic este paralelă cu axa Ox (fig. IV.16).

Dacă $f : I \to \mathbf{R}$ este o funcţie derivabilă pe un interval deschis I, atunci zerourile derivatei f' pe I sunt numite şi *punctele critice* ale lui f pe I; teorema lui Fermat afirmă că punctele de extrem local sunt printre punctele critice. În practică, pentru determinarea punctelor de extrem ale unei funcţii f derivabile pe un interval deschis sau pe o reuniune de intervale deschise, se rezolvă mai întâi ecuaţia $f'(x) = 0$. Vom vedea mai târziu cum putem decide care din soluţiile acestei ecuaţii sunt puncte de extrem pentru f.

4.2. Teorema lui Rolle

O funcţie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ $(a < b)$ se numeşte funcţie Rolle dacă este continuă pe intervalul compact $[a, b]$ şi derivabilă pe intervalul deschis (a, b).

Teorema care urmează este o consecinţă a rezultatelor privind funcţiile continue şi a teoremei lui Fermat, foarte utilă în aplicaţii.

TEOREMA IV.8 *(teorema lui M. Rolle, 1652—1719).* **Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, $a < b$ o funcţie Rolle astfel încât $f(a) = f(b)$, atunci există cel puţin un punct $c \in (a, b)$ astfel încât $f'(c) = 0$.**

Demonstraţie. Funcţia f fiind continuă (conform teoremei III.5) este mărginită şi îşi atinge marginile în $[a, b]$. Fie $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$, $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$.

Apar trei cazuri:

I. $M > f(a)$. Există un punct $c \in [a, b]$ astfel încât $M = f(c)$ (M fiind atinsă) şi, evident, $c \neq a$, $c \neq b$ (dacă $c = a$ sau b, atunci $M = f(c)$ ar fi egal cu $f(a) = f(b)$, absurd); aşadar, $c \in (a, b)$ şi cum c este maxim local, atunci conform teoremei lui Fermat, $f'(c) = 0$.

II. $m < f(a)$. Se raţionează similar.

III. $m = M$. Atunci funcţia f este constantă pe $[a, b]$, deci $f'(c) = 0$ pentru orice $c \in (a, b)$.

COROLAR. Între două zerouri ale unei funcţii derivabile pe un interval se află cel puţin un zerou al derivatei.

Demonstraţie. Fie $f : I \to \mathbf{R}$ derivabilă pe un interval I şi $a, b \in I$, $a < b$, zerouri ale lui f. Atunci $f(a) = 0 = f(b)$ şi putem aplica teorema lui Rolle pe intervalul $[a, b]$.

Teorema lui Rolle admite o interpretare geometrică evidentă: dacă segmentul determinat de punctele $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ este paralel cu axa Ox, atunci există cel puţin un punct între a şi b în care tangenta la graficul lui f este paralelă cu axa Ox (fig. IV.17).

Observaţii. Toate condiţiile din enunţul teoremei lui Rolle sunt necesare, în sensul că dacă s-ar renunţa la vreuna din ele, atunci concluzia nu ar mai fi întotdeauna adevărată:

a) Dacă f ar fi continuă numai pe intervalul deschis (a, b), exemplul funcţiei $f(x) = \begin{cases} x, \text{ dacă } x \in [0, 1] \\ 1, \text{ dacă } x = 0 \end{cases}$ arată că f' nu se anulează pe intervalul $(0, 1)$ deşi $f(0) = f(1)$ (fig. IV.18)

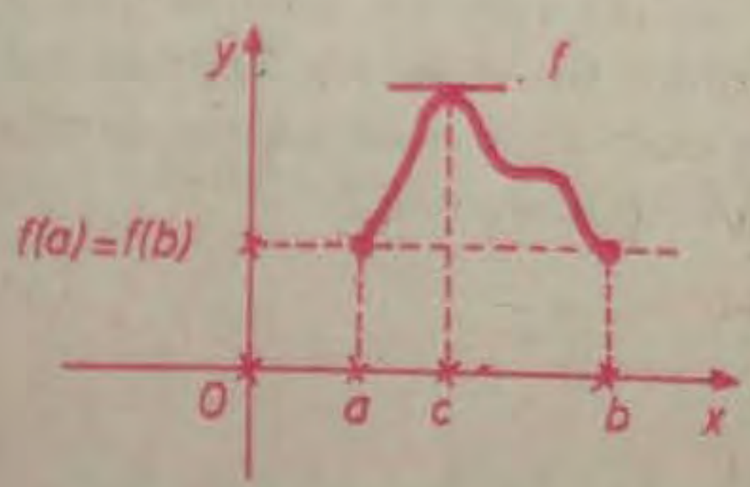


Fig. IV.17

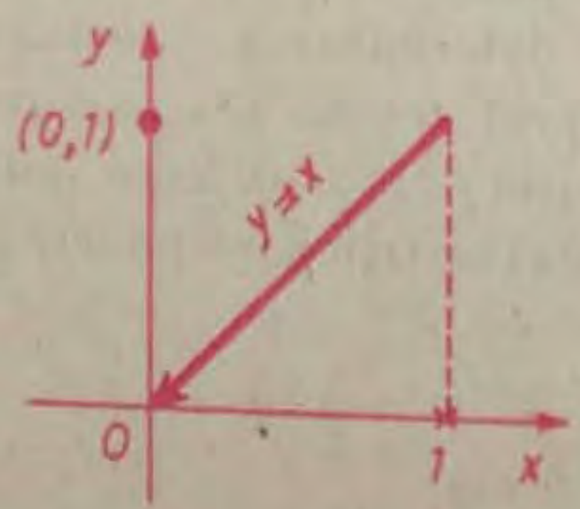


Fig. IV.18

Fig. IV.19

b) Dacă $f(a) \neq f(b)$, este suficient să considerăm funcţia $f(x) = x$ pe $[0, 1]$ (fig. IV.19);

c) Dacă f nu ar fi derivabilă pe întreg intervalul (a, b), concluzia teoremei ar fi falsă, aşa cum arată exemplul funcţiei $f(x) = |x|$ pe intervalul $[-1, 1]$.

4.3. Teorema lui Lagrange şi teorema lui Cauchy

TEOREMA IV.9. *(teorema lui J. Lagrange*, 1736—1813, **a creşterilor finite). Fie f o funcţie Rolle pe un interval compact $[a, b]$. Atunci există $c \in (a, b)$ astfel încât**

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c). \tag{38}$$

Demonstraţie. Vom considera funcţia auxiliară $F(x) = f(x) + kx$, $x \in [a, b]$, cu k o constantă reală, pe care o vom determina din condiţia $F(a) = F(b)$. Aşadar, $f(a) + ka = f(b) + kb$, deci $k = \frac{f(b) - f(a)}{a - b}$. Pentru acest k, funcţia F verifică condiţiile teoremei lui Rolle şi, ca atare, există un punct $c \in (a, b)$ în care $F'(c) = 0$. Pe de altă parte, $F'(x) = f'(x) + k$, $\forall\, x \in (a, b)$ deci $f'(c) + k = 0$, $f'(c) + \frac{f(b) - f(a)}{a - b} = 0$ şi se obţine relaţia (38).

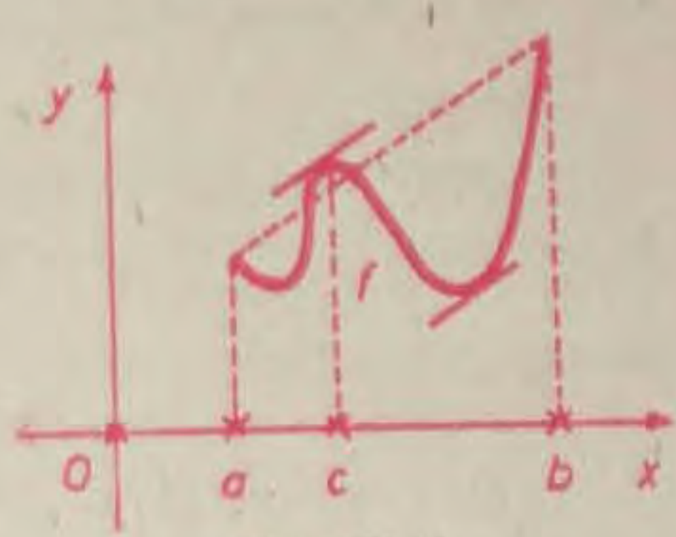


Fig. IV.20

Observaţii. 1) Relaţia (38) se mai numeşte formula creşterilor finite (sau formula de medie pentru derivabilitate). Notând $\theta = \frac{c - a}{b - a}$, rezultă $0 < \theta < 1$ şi $c = a + \theta(b - a)$ şi formula (38) se mai scrie: $f(b) - f(a) = (b - a) \cdot f'(a + \theta(b - a))$, cu $0 < \theta < 1$.

2) Ca şi în cazul teoremei lui Rolle, punctul c nu este unic. Interpretarea geometrică a teoremei lui Lagrange rezultă din interpretarea geometrică a derivatei şi este următoarea: există cel puţin un punct $c \in (a, b)$ pentru care tangenta la graficul lui f în $(c, f(c))$ este paralelă cu „coarda" determinată de punctele $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ (fig. IV.20).

3) Putem aplica teorema lui Lagrange restricţiei lui f la orice subinterval $[a, x] \subset [a, b]$, unde $a < x \leqslant b$. Atunci $f(x) - f(a) = (x - a)\, f'(c)$ cu $c \in (a, x)$ nu neapărat unic, depinzând de x; uneori se scrie $c = c_x$ şi, ca atare, $f(x) - f(a) = (x - a) \cdot f'(c_x)$. Este important de remarcat că dacă $x \to a$, atunci $c_x \to a$.

Iată acum un corolar al teoremei lui Lagrange, care este util în a decide derivabilitatea unei funcţii într-un punct.

COROLAR. Fie f o funcţie definită într-o vecinătate V a punctului x_0 derivabilă pe $V \setminus \{x_0\}$ şi continuă în x_0. Dacă există limita $\lambda = \lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$, atunci $f'(x_0)$ există şi $f'(x_0) = \lambda$. Dacă limita λ este finită, atunci f este derivabilă în x_0.

Demonstraţie. Aplicând teorema lui Lagrange funcţiei f pe un interval $[x, x_0] \subset V$, $x < x_0$, rezultă $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c_x)$ cu $x < c_x < x_0$, deci $f'_s(x_0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f'(c_x) = \lambda$ (căci $c_x \to x_0$, dacă $x \to x_0$, $x < x_0$). În mod similar, $f'_d(x_0)$ există şi este egală cu λ, deci f are derivată în x_0 şi $f'(x_0) = \lambda$.

Exemple

1) Studiem continuitatea și derivabilitatea funcției $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \text{ dacă } x \leqslant 1 \\ \ln x + x, & \text{dacă } x > 1. \end{cases}$$

Pe intervalele $(-\infty, 1)$, $(1, \infty)$ funcția f este evident continuă, chiar derivabilă. Apoi $f(1-0) = f(1+0) = f(1)$, deci f este continuă în $x = 1$. Apoi pentru orice $x \neq 1$ avem

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & , \text{ dacă } x < 1 \\ \dfrac{1}{x} + 1, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}, \text{ deci } \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f'(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} 2x = 2 \text{ și } \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f'(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \left(\frac{1}{x} + 1\right) = 2.$$

Aplicând corolarul anterior, rezultă că f este derivabilă în $x = 1$ și $f'(1) = 2$.

2) Exemplul funcției $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{dacă } x \leqslant 0 \\ x + 1, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$ arată de ce este esențial să cerem în corolar ca f să fie continuă. În acest caz $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f'(x) = 1$ și totuși f nu este derivabilă (căci $f'_s(0) = 1$, $f'_d(0) = \infty$).

Observații

1) Demonstrația corolarului arată ceva mai mult. Dacă f este continuă la stânga în $x = x_0$ și $\lambda = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f'(x)$ există, atunci există $f'_s(x_0)$ și este egală cu λ (și, un rezultat similar, „la dreapta").

Iată două exemple care ilustrează această situație:

a) Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{|x|}$. În acest caz,

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & , \text{ dacă } x \geqslant 0 \\ \sqrt{-x}, & \text{dacă } x < 0 \end{cases} \text{ și } f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & , \text{ dacă } x > 0 \\ -\dfrac{1}{2\sqrt{-x}}, & \text{dacă } x < 0. \end{cases}$$

Deci $$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f'(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \left(-\frac{1}{2\sqrt{-x}}\right) = -\infty \text{ și } \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f'(x) = +\infty.$$

Atunci, conform celor spuse anterior, rezultă că $f'_s(0) = -\infty$, $f'_d(0) = \infty$, deci $x = 0$ este punct de întoarcere pentru graficul lui f.

b) Fie $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{dacă } x \leqslant 0 \\ 3^{-x} & , \text{ dacă } x > 0 \end{cases}$, deci $g'(x) = \begin{cases} 2x & , \text{ dacă } x \leqslant 0 \\ -3^{-x} \ln 3, & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$

Așadar, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} g'(x) = 0$ și $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g'(x) = -\ln 3$ și, conform observației anterioare, $g'_s(0) = 0$, $g'_d(0) = -\ln 3$ și punctul $x = 0$ este punct unghiular pentru graficul lui g.

2) Corolarul ne oferă o condiție suficientă ca f să fie derivabilă în x_0 (anume f să fie continuă în x_0 și să existe în $\mathbf{R}$ limita $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$), dar această condiție nu este și necesară.

Astfel, funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & , \text{ dacă } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ dacă } x = 0 \end{cases}$ este derivabilă în origine, dar $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$ nu există.

Trecem acum la demonstrarea unei alte proprietăţi fundamentale legate de derivabilitate. Fie două funcţii $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ verificând condiţiile teoremei lui Lagrange şi presupunem că $g'(x) \neq 0$, $\forall\, x \in (a, b)$. Ne interesează raportul $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$. Aplicând separat funcţiilor f şi g teorema lui Lagrange, rezultă că există puncte c, c' din (a, b) astfel încât $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{(b - a)f'(c)}{(b - a)g'(c')} = \frac{f'(c)}{g'(c')}$. Nu există nici un motiv să considerăm aici că avem $c = c'$; totuşi se poate demonstra

TEOREMA IV.10 *(teorema lui Cauchy).* **Fie f, g două funcţii Rolle pe intervalul compact $[a, b]$, $a < b$, astfel încât $g'(x) \neq 0$, $\forall\, x \in (a, b)$; atunci există un punct $c \in (a, b)$ astfel încât**

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{39}$$

Demonstraţie. Condiţia $g'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in (a, b)$ implică faptul că $g(a) \neq g(b)$; într-adevăr, dacă $g(a) = g(b)$, aplicând teorema lui Rolle, ar rezulta că există $c \in (a, b)$ astfel ca $g'(c) = 0$, ceea ce contravine ipotezei.

Considerăm funcţia ajutătoare $F(x) = f(x) + kg(x)$, $k \in \mathbf{R}$ şi determinăm constanta k astfel ca $F(a) = F(b)$, deci $k = \frac{f(b) - f(a)}{g(a) - g(b)}$. Aplicând teorema lui Rolle funcţiei F cu k astfel determinat, există $c \in (a, b)$ astfel încât $F'(c) = 0$. Dar $F'(x) = f'(x) + kg'(x)$, $\forall\, x \in (a, b)$, deci $f'(c) + kg'(c) = 0$, $-k = \frac{f'(c)}{g'(c)}$, de unde se obţine relaţia (39).

Observaţie. Am fi putut demonstra mai întâi teorema lui Cauchy şi apoi, particularizând $g(x) = x$, să obţinem teorema lui Lagrange.

Ne putem întreba cum arată funcţiile care apar ca derivate ale unor funcţii derivabile (pe un interval). În clasa a XII-a se va studia în mod sistematic următoarea problemă: dându-se o funcţie f, este ea derivata unei alte funcţii? Cu alte cuvinte, există F derivabilă astfel încât $F' = f$? Dacă o astfel de funcţie F există, ea se numeşte primitivă a lui f. De exemplu, funcţia $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n + 1}$ (n întreg, $n \geqslant 0$) este o primitivă pe $\mathbf{R}$ a funcţiei $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^n$; funcţia $F(x) = -\frac{\cos \omega x}{\omega}$, $\omega \neq 0$ este o primitivă pe $\mathbf{R}$ a lui $f(x) = \sin \omega x$, iar $F(x) = \frac{\sin \omega x}{\omega}$ pentru $f(x) = \cos \omega x$ etc.

În cele ce urmează, vom indica o proprietate importantă a funcţiilor care admit primitive, deci care sunt derivate ale altor funcţii.

TEOREMA IV.11 *(teorema lui Darboux).* **Dacă $f : I \to \mathbf{R}$ este o funcţie derivabilă pe un interval I, atunci derivata sa f' are proprietatea lui Darboux (adică nu poate trece de la o valoare la alta fără a trece prin toate valorile intermediare).**

Demonstraţie. Fie $a < b$ două puncte din I astfel încât $f'(a) \neq f'(b)$. Pentru a fixa ideile, să presupunem că $f'(a) < f'(b)$. Fie $\lambda \in (f'(a), f'(b))$. Trebuie arătat că există un punct $c \in (a, b)$, astfel încât $f'(c) = \lambda$. Pentru aceasta vom considera funcţia auxiliară $F(x) = f(x) - \lambda x$; evident, $F'(a) = f'(a) - \lambda < 0$ şi $F'(b) = f'(b) - \lambda > 0$.

Funcţia F este derivabilă, deci continuă în intervalul $[a, b]$ şi, ca atare, marginea inferioară $m = \inf\limits_{x \in [a, b]} F(x)$ este atinsă într-un punct $c \in [a, b]$. Vom arăta că de fapt m nu poate fi atinsă nici în a, nici în b. Aşadar, $c \in (a, b)$ şi din teorema lui Fermat se obţine atunci $F'(c) = 0$. Dar aceasta arată că $f'(c) - \lambda = 0$, adică $f'(c) = \lambda$, tocmai ceea ce trebuia probat.

Pentru a arăta că punctul c aparţine intervalului (a, b), vom proceda astfel: alegem $\varepsilon > 0$ astfel încât $|F'(a)| > \varepsilon$ şi $F'(b) > \varepsilon$. Din definiţia derivabilităţii lui F în punctele a şi b, există $\delta > 0$ depinzând de ε astfel încât din faptul că $|x - a| < \delta$ (respectiv $|x - b| < \delta$) să rezulte că

$$F'(a) - \varepsilon < \frac{F(x) - F(a)}{x - a} < F'(a) + \varepsilon$$

$$\left[\text{respectiv } F'(b) - \varepsilon < \frac{F(x) - F(b)}{x - b} < F'(b) + \varepsilon\right]$$

Deoarece $F'(a) + \varepsilon < 0$, raportul $\dfrac{F(x) - F(a)}{x - a}$ va fi strict negativ, pentru orice $x > a$, $x - a < \delta$. Deci $F(x) - F(a) < 0$, adică $F(x) < F(a)$. În mod analog, din inegalitatea $F'(b) - \varepsilon > 0$, rezultă că $F(x) < F(b)$ pentru $x < b$, $x - b < \delta$. Aceste inegalităţi arată că marginea inferioară a funcţiei F nu este atinsă nici în a, nici în b.

COROLAR. Fie $f : I \to \mathbf{R}$ o funcţie derivabilă pe un interval I. Dacă derivata f' nu se anulează pe I, atunci f' are semn constant pe I.

Într-adevăr, dacă f' nu ar avea semn constant pe I, atunci f' ar lua valori pozitive şi valori negative pe I, deci, conform teoremei **IV.11**, ar lua şi valoarea zero, ceea ce contravine ipotezei că f' nu se anulează pe I.

Exemple

1) Funcţiile σ, sgn pe $\mathbf{R}$ nu admit primitive (căci dacă ar avea primitive, ele ar fi funcţii derivate şi, conform teoremei IV.11, ar avea proprietatea lui Darboux).

2) Iată un exemplu de funcţie derivată care nu este continuă: luăm $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

Această funcţie este derivabilă pe $\mathbf{R}$ şi $g'(x) = 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}$, dacă $x \neq 0$ şi $g(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} x \sin \dfrac{1}{x} = 0$. Funcţia $f = g'$, adică $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases} \tag{40}$$

este o derivată şi nu este continuă (în punctul 0). În particular, funcţia f are proprietatea lui Dorboux pe $\mathbf{R}$, fără a fi continuă.

3) Arătăm că funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$ nu admite primitivă. Este suficient să arătăm că f nu are proprietatea lui Darboux, dar se poate raționa și direct: dacă $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ar fi o primitivă a lui f, atunci am avea $f(0) = F'(0) = F'_d(0) =$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{(x - 0) \cdot F'(c_x)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(c_x) = \infty,$$ ceea ce este absurd.

EXERCIȚII (capitolul IV, § 4)

1. Aplicând definiția IV.4, să se determine extremele funcțiilor $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ următoare:

a) $f(x) = x^2 + x$;
b) $f(x) = 1 - |x|$;
c) $f(x) = A \sin 2x$ ($A \neq 0$ constant);
d) $f(x) = |x^2 - 4|$;
e) $f(x) = -x^2 + 4x + 7$;
f) $f(x) = x^2 \cdot |x - 1|$.

2. Să se determine punctele critice pentru funcțiile $f : D \to \mathbf{R}$ următoare, D fiind mulțimea punctelor $x \in \mathbf{R}$ unde f este derivabilă:

a) $f(x) = x^3 - 3x$;
b) $f(x) = 2x^2 - 8x + 7$;
c) $f(x) = x^2 - 8 \ln x$;
d) $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$;
e) $f(x) = e^{x^2 - 2x}$;
f) $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{3x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

3*. Fie $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(\lambda) = \dfrac{A}{\lambda^5 \left(e^{\frac{1}{\lambda}} - 1\right)}$ (funcția de radiație a lui Planck, $A > 0$ fiind o constantă reală).

a) Să se arate că $\lim\limits_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda > 0}} f(\lambda) = 0$, $\lim\limits_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda > 0}} f'(\lambda) = 0$, $\lim\limits_{\lambda \to \infty} f(\lambda) = 0$, $\lim\limits_{\lambda \to \infty} f'(\lambda) = 0$.

b) Să se arate că f are un singur punct critic pe intervalul $(0, \infty)$.

4. Să se arate că funcția $f : \left[-1, \dfrac{7}{3}\right] \to \mathbf{R}$, $f(x) = |3x - 2| - 5$ verifică $f(-1) = f\left(\dfrac{7}{3}\right)$ și totuși f' nu se anulează pe intervalul $\left[-1, \dfrac{7}{3}\right]$. Care este explicația?

5. a) Să se arate că derivatele funcțiilor $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$; $g(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$ au numai rădăcini reale.

b) Fie $P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție polinomială neconstantă. Să se arate că între orice două rădăcini reale consecutive ale lui P' există cel mult o rădăcină reală a lui P.

6. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție derivabilă și $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ zerouri ale lui f. Să se arate că f' are cel puțin $n - 1$ zerouri. Aplicând acest rezultat să se arate că o funcție polinomială de grad n are cel mult n zerouri distincte.

7. Fie funcția $f : [-1, 1] \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{dacă } x \in [-1, 0) \\ 1 - x, & \text{dacă } x \in (0, 1] \end{cases}$. Să se arate că f este derivabilă, $f(-1) = f(1) = 0$ și f' nu se anulează. Se contravine corolarului teoremei lui Rolle?

8. Fie $P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție polinomială. Să se arate că:

a) dacă toate rădăcinile lui P sunt reale și distincte, atunci P' are aceeași proprietate;

b) dacă toate rădăcinile lui P sunt reale, atunci P' are toate rădăcinile reale.

9. Să se arate că există $c \in (1, 2)$ astfel încât pentru funcția $f : [1, 2] \to \mathbf{R}$, $f(x) = x + \ln x$ să avem $f(2) - f(1) = f'(c)$ și să se determine efectiv valoarea lui c.

10. Folosind corolarul teoremei lui Lagrange, să se calculeze derivatele laterale ale funcțiilor f următoare în punctele x_0 indicate:

a) $f : [-1, 1] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, \text{ dacă } x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right] \\ 6x - 1, \text{ dacă } x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$, $x_0 = -1$, $x_0 = \frac{1}{2}$, $x_0 = 1$;

b) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, \text{ dacă } x \leqslant 1 \\ \ln x, \text{ dacă } x > 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$;

c) $f : [-2, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{x^3 + 2x^2}$, $x_0 = -2$ și $x_0 = 0$;

d) $f : [0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1 + x}$, $x_0 = 1$.

11. Să se aplice teorema lui Cauchy pentru funcțiile $f, g : [1, e] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \ln x$, $g(x) = 2x - 1$, determinând punctul c corespunzător. Similar, pentru funcțiile $f, g : \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$.

12. Să se arate că dacă m, M sunt valorile extreme ale funcției $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 + ax + b$, $(a, b \in \mathbf{R}, a < 0)$, atunci $m \cdot M = b^2 + \frac{4}{27} a^3$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME REZOLVATE LA CAPITOLUL IV

1. *Să se calculeze derivatele laterale ale funcțiilor $f, g, h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ următoare, în punctele indicate:*

a) $f(x) = x + x \mid x \mid$, $x_0 = 0$;

b) $g(x) = x\sigma(x)$, $x_0 = 0$;

c) $h(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \leqslant 1 \\ x^3 + 1, & x > 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$.

Soluție. a) $f'_s(0) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{x - x^2}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} (1 - x) = 1$;

$$f'_d(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{x + x^2}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (1 + x) = 1.$$

b) $g(x) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } x < 0 \\ x, \text{ dacă } x \geqslant 0 \end{cases}$; avem $g'_s(0) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{0}{x} = 0$ și

$$g'_d(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{x - 0}{x} = 1.$$

c) $h'_s(1) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{h(x)-h(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{x^2-2x+1}{x-1} = 0$ şi

$$h'_d(0) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{h(x)-h(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{x^2+1+1}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{x^2+2}{x-1} = \infty$$

2. *Să se calculeze, pornind de la definiţie:*

a) $f'(1)$ *pentru* $f:[-3,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x) = x\sqrt{x+3}$;

b) $g'(-\pi)$ *pentru* $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $g(x) = x\sin x$.

Soluţie. a) $f'(1) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x\sqrt{x+3}-2}{x-1} =$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^2(x+3)-4}{(x-1)\left(x\sqrt{x+3}+2\right)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x^3-1)+(3x^2-3)}{(x-1)\left(x\sqrt{x+3}+2\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^2+4x+4}{x\sqrt{x+3}+2} = \frac{9}{4}.$$

b) $g'(-\pi) = \lim\limits_{x\to -\pi} \dfrac{g(x)-g(-\pi)}{x+\pi} = \lim\limits_{x\to -\pi} \dfrac{x\sin x}{x+\pi} = \lim\limits_{x\to -\pi} \dfrac{-x\sin(x+\pi)}{x+\pi} =$

$$= \lim_{x\to -\pi} (-x)\cdot \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = \pi.$$

3. *Să se arate că dreapta* $y = 7x-2$ *este tangentă la curba* $y = x^3+4x$.

Soluţie. Fie $f(x) = x^3+4x$, $x\in\mathbf{R}$. Pentru orice punct x_0 ecuaţia tangentei la graficul lui f în punctul $(x_0, f(x_0))$ este $y - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)$, adică $y - x_0^3 - 4x_0 = (3x_0^2+4)(x-x_0)$, deci $y = (3x_0^2+4)x - 2x_0^3$. Se observă că această dreaptă coincide cu dreapta dată pentru $x_0 = 1$.

4. *Să se determine punctele critice ale funcţiilor* $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ *următoare:*

a) $f(x) = \ln(x^2+2)(x^2+3)$; b) $f(x) = \sin^{50} 2x$;

c) $f(x) = e^{2x} + e^{-3x}$; d) $f(x) = \dfrac{x^3}{|x|+1}$.

Soluţie. a) Avem $f'(x) = \dfrac{4x^3+10x}{(x^2+2)(x^2+3)}$, $\forall x\in\mathbf{R}$.

Ecuaţia $f'(x) = 0$ are soluţia $x = 0$.

b) Notăm $u = \sin 2x$, deci $f(x) = u^{50}$, $f'(x) = 50\cdot u^{49}\cdot u' = 50\cdot\sin^{49}2x\cdot(2\cos 2x) = 100\cdot\sin^{49}2x\cdot\cos 2x$. Punctele critice sunt soluţiile ecuaţiilor $\sin 2x = 0$, $\cos 2x = 0$, deci $\dfrac{k\pi}{4}$ $(k\in\mathbf{Z})$.

c) $f'(x) = 2e^{2x} - 3e^{-3x}$, $\forall x\in\mathbf{R}$. Ecuaţia $f'(x) = 0$ se scrie $2e^{2x} = 3e^{-3x}$, $e^{5x} = \dfrac{3}{2}$ şi are unica soluţie $x = \dfrac{1}{5}(\ln 3 - \ln 2)$.

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{-x+1}, & \text{dacă } x\leqslant 0 \\[2ex] \dfrac{x^3}{x+1}, & \text{dacă } x>0 \end{cases}$

Funcţia f este derivabilă în punctul $x = 0$ căci, $f'(0) = f'_d(0) = 0$.

$$\text{Atunci, } f'(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2 - 2x^3}{(1-x)^2}, & \text{dacă } x < 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0. \\ \dfrac{2x^3 + 3x^2}{(x+1)^2}, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$$

Funcţia are un singur punct critic, anume $x = 0$.

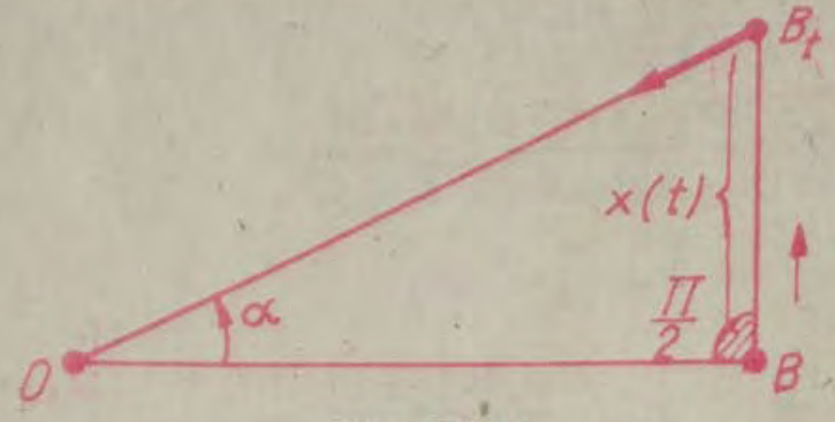


Fig. IV.21

5. *Un balon B (punctual) se înalţă vertical dintr-un loc aflat la 20 m de un observator O (punctual), având viteza 30 m/minut. Care este viteza de variaţie a unghiului α în momentul când balonul va fi la o înălţime de 200 m?* (fig. IV.21).

Soluţie. Notăm cu B_t poziţia balonului şi cu $x(t)$ înălţimea la care se află balonul, la momentul t. Avem $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{x}{20}$, deci $\alpha(t) = \operatorname{arctg} \dfrac{x(t)}{20}$, $\alpha'(t) = \dfrac{1}{1 + \dfrac{x^2(t)}{400}} \cdot \dfrac{x'(t)}{20} = \dfrac{20 \cdot x'(t)}{400 + x^2(t)}$. Viteza cerută în enunţ este

$$\frac{20 \cdot 30}{400 + 200^2} = \frac{600}{101 \cdot 400} = \frac{3}{202} \text{ radiani/minut.}$$

6. *Fie $f : (1, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 - 3x$. Să se determine $J = f(I)$ şi să se arate că $f : I \to J$ este bijectivă. Fie g inversa lui f; să se calculeze $g'(2)$ şi $g''(2)$.*

Soluţie. Funcţia f este injectivă pe I pentru că este strict crescătoare pe I. E clar că $J = (-2, \infty)$, $f : I \to J$ este bijectivă şi avem $f(2) = 2$. Atunci, aplicând formula (26), găsim: $g'(2) = \dfrac{1}{f'(2)} = \dfrac{1}{9}$.

Relaţia $f(x) = x^3 - 3x$ arată că $g^3(y) - 3g(y) = y$, $\forall\, y \in J$, deci, derivând: $3g^2(y)g'(y) - 3g'(y) = 1$, $6g(y)g'^2(y) + 3g^2(y) \cdot g''(y) - 3g''(y) = 0$ în fiecare punct y din J şi înlocuind $y = 2$, rezultă: $6 \cdot 2 \cdot \dfrac{1}{81} + 3 \cdot 4 \cdot g''(2) - 3g''(2) = 0$, de unde $g''(2) = -\dfrac{4}{243}$.

7. *Se consideră funcţia $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$,*

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{\pi}{x}, & \text{dacă } x \in (0, 1] \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

Aplicând lui f teorema lui Rolle pe fiecare interval $\left[\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}\right]$, $n \geq 1$ întreg, să se arate că ecuaţia $\operatorname{tg} x = x$ are soluţii pe fiecare interval $(n\pi, (n+1)\pi)$.

Soluție. Avem $f\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}\sin \pi(n+1) = 0$ și $f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$, deci există $\xi_n \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$ astfel încât $f'(\xi_n) = 0$. Dar $f'(x) = \sin\frac{\pi}{x} - \frac{\pi}{x}\cos\frac{\pi}{x}$, $x \neq 0$, deci $\sin\frac{\pi}{\xi_n} - \frac{\pi}{\xi_n}\cos\frac{\pi}{\xi_n} = 0$, adică $\operatorname{tg}\frac{\pi}{\xi_n} = \frac{\pi}{\xi_n}$ și, ca atare, $\frac{\pi}{\xi_n}$ este soluție a ecuației $\operatorname{tg} x = x$. Cum $\xi_n \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$, avem $\frac{\pi}{\xi_n} \in (n\pi, (n+1)\pi)$, $\forall\, n \geq 1$.

8. *Se consideră funcția $f:[0, 10] \to \mathbf{R}$, definită prin $f(x) = x\sin x$. Să se arate că $|f(x) - f(y)| \leq 11 \cdot |x - y|$, $\forall\, x, y \in [0, 10]$. Generalizare.*

Soluție. Dacă $x = y$ relația este evidentă. Dacă $x \neq y$ aplicăm formula lui Lagrange a creșterilor finite, pe intervalul închis de capete x, y și există ξ între x și y astfel încât $f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y)$, deci $|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)| \cdot |x - y|$. Dar $f'(\xi) = \xi\cos\xi + \sin\xi$, deci $|f'(\xi)| = |\xi\cos\xi + \sin\xi| \leq |\xi| + 1 \leq 11$.

Generalizarea este evidentă: dacă $f:[a, b] \to \mathbf{R}$, $a < b$ este o funcție derivabilă și dacă există $M > 0$ astfel încât $|f'(x)| \leq M$ pentru orice $x \in [a, b]$, atunci $|f(x) - f(y)| \leq M \cdot |x - y|$, $\forall\, x, y \in [a, b]$.

9. *Să se studieze continuitatea și derivabilitatea funcțiilor următoare:*

a) $f:[1, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$;

b) $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \arcsin\frac{2x}{1+x^2}$

c) $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{dacă } x = \frac{1}{n} \text{ și } n \geq 1 \text{ este întreg} \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$

Soluție. a) Dacă $x \geq 1$, atunci $f^2(x) = x + 2\sqrt{x-1} + x - 2\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x^2 - 4(x-1)} = 2x + 2\sqrt{(x-2)^2}$, deci $f(x) = \sqrt{2x + 2|x-2|}$, adică

$$f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x-1}, & \text{dacă } x \geq 2 \\ 2, & \text{dacă } 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

Pe intervalele deschise $(1, 2)$, $(2, \infty)$ funcția f este elementară, deci este continuă și derivabilă. În punctul $x = 1$, avem $f(1+0) = f(1)$, deci f este continuă, iar în punctul $x = 2$, avem $f(2-0) = f(2+0) = f(2) = 2$ și, din nou, f este continuă. Apoi $\forall\, x \in (1, 2) \cup (2, \infty)$,

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x-1}}, & \text{dacă } x > 2 \\ 0, & \text{dacă } 1 < x < 2 \end{cases}$$

și, aplicând corolarul teoremei IV.9, avem $f'(1) = \lim\limits_{x \to 1,\, x > 1} f'(x) = 0$; apoi $f'_s(2) = \lim\limits_{x \to 2,\, x < 2} f'(x) = 0$, $f'_d(2) = \lim\limits_{x \to 2,\, x > 2} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = 1$, deci funcția f nu este derivabilă în punctul $x = 2$. Așadar, funcția f este continuă în $[1, \infty)$ și derivabilă în $[1, \infty) \setminus \{2\}$

b) Considerăm funcția $u:\mathbf{R} \to [-1, 1]$, $u(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ (pentru orice $x \in \mathbf{R}$ avem $\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2 \leq 1$); știm că $\arcsin:[-1, 1] \to \mathbf{R}$ este continuă și atunci funcția

compusă $f = \arcsin u$ va fi continuă pe $\mathbf{R}$. Funcţia $f = \arcsin u$ este derivabilă în punctele unde $u^2 < 1$, adică $\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2 < 1$, $(1-x^2)^2 > 0$, adică $x \neq \pm 1$; în aceste puncte avem

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)' = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)|1-x^2|} = \begin{cases} \frac{2}{1+x^2}, & \text{dacă } 1-x^2>0 \\ -\frac{2}{1+x^2}, & \text{dacă } 1-x^2<0 \end{cases}$$

deci

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{2}{1+x^2}, & \text{dacă } x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \\ \frac{2}{1+x^2}, & \text{dacă } x \in (-1, 1) \end{cases}$$

Atunci $f'_s(-1) = \lim\limits_{x\to -1,\ x<-1} f'(x) = \lim\limits_{x\to -1,\ x<-1} \left(-\frac{2}{1+x^2}\right) = -1$; $f'_d(-1) = \lim\limits_{x\to -1,\ x>-1} f'(x) = 1$; $f'_d(1) = 1$; $f'_s(1) = -1$. Aşadar, f este continuă pe $\mathbf{R}$ şi este derivabilă în $\mathbf{R}\setminus\{-1, 1\}$. Punctele $+1$, -1 sunt puncte unghiulare.

c) Pe mulţimea $A = \mathbf{R}\setminus\left\{0, 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$, care este reuniune de intervale deschise, funcţia este nulă şi, ca atare, continuă şi derivabilă. În punctele $x = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$ întreg funcţia f este discontinuă deoarece limitele laterale sunt nule, iar valoarea funcţiei este $\frac{1}{n}$. Atunci f va fi nederivabilă în aceste puncte. Rămâne să studiem continuitatea şi derivabilitatea lui f în punctul $x = 0$. Aşadar, $f(0) = 0$ şi pentru orice şir $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$ avem $f(x_n) \to 0$, deci f este continuă în punctul $x = 0$. Apoi $f'_s(0) = \lim\limits_{x\to 0,\ x<0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0,\ x<0} \frac{0-0}{x} = 0$. Arătăm, în fine, că $f'_d(0)$ nu există; într-adevăr, dacă $x_n \to 0$, $x_n > 0$ este un şir de numere iraţionale, atunci $\frac{f(x_n)-f(0)}{x_n-0} = \frac{0-0}{x} \to 0$ şi pentru şirul $x_n = \frac{1}{n}$ avem $\frac{f(x_n)-f(0)}{x_n-0} = \frac{\frac{1}{n}-0}{\frac{1}{n}-0} = 1 \to 1$. În concluzie, funcţia f este continuă pe mulţimea $A \cup \{0\}$ şi derivabilă pe A.

10. *Se consideră un interval I. Pentru orice întreg $n \geq 1$ se notează cu C_I^n mulţimea funcţiilor $f : I \to \mathbf{R}$ care sunt de n ori derivabile pe I cu $f^{(n)}$ continuă pe I (numite funcţii de clasă C^n pe I). Se notează, de asemenea, cu C_I^0 mulţimea funcţiilor continue şi cu C_I^∞ mulţimea funcţiilor indefinit derivabile pe I. Să se arate că:*

a) *au loc incluziunile stricte $C_I^\infty \subset C_I^{n+1} \subset C_I^n \subset C_I^0$, pentru orice $n \geq 1$;*

b) *aplicaţia de derivare $\mathrm{D} : C_I^1 \to C_I^0$, $\mathrm{D}(f) = f'$ nu este injectivă.*

Soluţie. a) Incluziunile sunt evidente. Pentru a arăta că ele sunt, în general, stricte, fie $I = R$; pentru orice întreg $n \geq 1$ considerăm funcţia $h_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $h_n(x) = x^n \cdot \sigma(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x < 0 \\ x^n, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$.

Se verifică imediat că $h_n \in C_I^{n-1}$, dar $h_n \notin C_I^n$ pentru orice $n \geq 1$. Astfel $h_1 \in C_I^0 \setminus C_I^1$, $h_2 \in C_I^1 \setminus C_I^2$.

b) Considerăm funcţia $h_2 \in C_I^1$ şi funcţia constantă $g : I \to \mathbf{R}$, $g(x) = 1$. Avem, evident, $(h_2 + g)' = h_2$, adică $D(h_2 + g) = D(h_2)$. Dacă aplicaţia D ar fi injectivă, ar rezulta $h_2 + g = h_2$, adică $g = 0$, absurd.

Notă. În clasa a XII-a se va demonstra că aplicaţia D este surjectivă (adică pentru orice funcţie continuă $f : I \to \mathbf{R}$ există o primitivă, deci o funcţie $F : I \to \mathbf{R}$ derivabilă, astfel încât $F' = f$).

11. *Fie* $a_1 > 0$, $a_2 > 0, \ldots, a_n > 0$ *şi* $a_1^x + a_2^x + \ldots + a_n^x \geq n$ *pentru orice* $x \in \mathbf{R}$. *Să se arate că* $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$.

Soluţie. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = a_1^x + a_2^x + \ldots + a_n^x$. Evident, $f(0) = n$ şi, conform ipotezei, $f(x) \geq f(0)$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Aşadar, punctul $x = 0$ este punct de minim pentru f. Conform teoremei lui Fermat, avem $f'(0) = 0$. Dar $f'(x) = a_1^x \ln a_1 + a_2^x \ln a_2 + \ldots + a_n^x \ln a_n = 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$ şi $f'(0) = \ln a_1 + \ln a_2 + \ldots + \ln a_n$. Relaţia $f'(0) = 0$ devine atunci $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$.

12. *Se consideră* $2n$ *numere reale* $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$. *Să se arate că ecuaţia* $\sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = 0$ *admite cel puţin o soluţie în intervalul* $(0, 2\pi)$.

Soluţie. Dacă notăm cu $g(x) = \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ şi considerăm funcţia $f : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} (a_k \sin kx - b_k \cos kx)$, constatăm că $f'(x) = g(x)$. Deoarece $f(0) = f(2\pi)$, putem aplica teorema lui Rolle şi, ca atare, există $c \in (0, 2\pi)$ astfel încât $f'(c) = 0 = g(c)$ şi c va fi soluţie a ecuaţiei din enunţ.

13. Fie $f_n : [-1, 1] \to \mathbf{R}$, $f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2 x^2}$ $(n \geq 0)$. Să se calculeze $\forall x \in [-1, 1]$, $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ şi $g(x) = \lim_{n \to \infty} f_n'(x)$ şi să se arate că $f' \neq g$.

Soluţie. Evident, $\forall x \in [-1, 1]$, $f(x) = 0$ şi $g(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{1 - n^2 x^2}{(1 + n^2 x^2)^2}$, deci $g(x) = 0$, dacă $x \neq 0$ şi $g(0) = 1$. Aşadar, $f'(0) \neq g(0)$. (Acest exerciţiu arată că $(\lim_{n \to \infty} f_n(x))' \neq \lim_{n \to \infty} f_n'(x)$)

14. Fie $I = [0, 1]$. Se consideră funcţiile $u, v : I \to \mathbf{R}$, $u(x) = \inf_{y \in I} (x - y)^2$, $v(x) = \sup_{y \in I} (x - y)^2$. Să se studieze derivabilitatea lui u, v şi să se calculeze $\sup_{x \in I} u(x)$, $\inf_{x \in I} v(x)$.

Soluţie. $\forall x \in I$, $u(x) = 0$ şi $v(x) = \begin{cases} (1 - x)^2, \text{ dacă } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ x^2, \text{ dacă } \frac{1}{4} < x < 1 \end{cases}$. Funcţia u este derivabilă şi $\sup_{x \in I} u(x) = 0$ iar v nu este derivabilă şi $\inf_{x \in I} v(x) = \frac{1}{4}$. (Acest exerciţiu arată că $\sup_{x \in I} \inf_{y \in I} f(x, y) \neq \inf_{x \in I} \sup_{y \in I} f(x, y)$, adică „sup" şi inf" nu comută între ele).

Capitolul V

APLICAŢII ALE DERIVATELOR ÎN STUDIUL VARIAŢIEI FUNCŢIILOR

Denumirea capitolului ne scuteşte de alte lămuriri asupra conţinutului său. În esenţă, vom urmări sistematic modul cum rezultatele obţinute până în prezent ne permit să studiem o serie de probleme a căror formulare era pe înţelesul vostru, dar a căror rezolvare nu era întotdeauna posibilă cu metode elementare.

§ 1. Rolul primei derivate în studiul funcţiilor

a) Remarcăm mai întâi un rezultat simplu, dar foarte important.

TEOREMA V.1. Fie $f : I \to \mathbf{R}$ o funcţie monoton crescătoare (respectiv descrescătoare) pe un interval I. Dacă f este derivabilă pe I, atunci $f' \geq 0$ pe I (respectiv $f' \leq 0$ pe I).

Demonstraţie. Presupunem f monoton crescătoare. Atunci, pentru orice $x, x_0 \in I$ $(x \neq x_0)$ avem $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ şi, trecând la limită, rezultă $f'(x_0) \geq 0$. Se raţionează similar dacă f este descrescătoare (sau se consideră funcţia crescătoare $-f$).

1.1. Consecinţe ale teoremei lui Lagrange

b) *Intervale de monotonie.* Stabilim un criteriu important pentru demonstrarea monotoniei unei funcţii derivabile pe un interval, care constituie reciproca teoremei V.1.

TEOREMA V.2. Fie $f : I \to \mathbf{R}$ o funcţie derivabilă pe un interval I. Dacă $f' \geq 0$ pe I (adică $f'(x) \geq 0$, $\forall\, x \in I$), atunci funcţia f este monoton crescătoare pe I, iar dacă $f' \leq 0$ pe I, atunci f este monoton descrescătoare pe I.

Demonstraţia este imediată, folosind teorema lui Lagrange. Să presupunem că $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ şi că $f' \geq 0$ pe I. Aplicând funcţiei f teorema creşterilor finite pe intervalul $[x_1, x_2]$, rezultă $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) \cdot f'(c)$ cu $c \in (x_1, x_2)$; aşadar, $c \in I$, deci $f'(c) \geq 0$. Deoarece $x_2 - x_1 > 0$, rezultă că $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, adică $f(x_1) \leq f(x_2)$, deci f este monoton crescătoare pe I.

Dacă $f' \leqslant 0$ pe I, atunci, raţionând ca mai sus deoarece $f'(c) \leqslant 0$, rezultă $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) \cdot f'(c) \leqslant 0$, deci $f(x_1) \geqslant f(x_2)$.

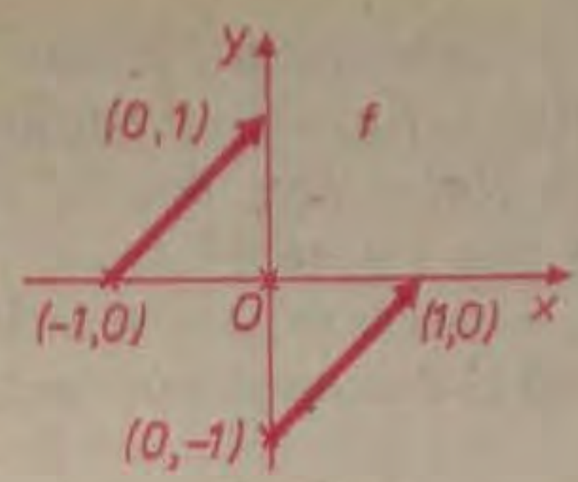


Fig. V.1

Observaţii. 1) Se poate întâmpla ca f să fie strict crescătoare şi f' să se anuleze în unele puncte (de exemplu, $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3$). Dacă f este derivabilă pe un interval I şi f' este strict pozitivă (respectiv strict negativă) pe I atunci f este strict crescătoare (respectiv strict descrescătoare) pe acel interval.

2) Dacă o funcţie f nu este derivabilă pe un întreg interval I (de pildă este derivabilă doar pe $I \setminus \{x_0\}$, $x_0 \in I$) şi dacă $f' > 0$ pe mulţimea pe care este definită, nu putem conchide că f este monotonă (de pildă nu rezultă neapărat monotonă în vecinătatea lui x_0). Iată un exemplu simplu:

$$f: [-1, 1] \to \mathbf{R},\ f(x) = \begin{cases} x + 1, \text{ dacă } x \in [-1, 0) \\ x - 1, \text{ dacă } x \in [0, 1] \end{cases} \quad \text{(fig. V.1)}$$

Exemple

1) Considerăm funcţia $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 - 12x$ şi studiem monotonia pe $\mathbf{R}$. Avem, $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x-2)(x+2)$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Se observă că pe intervalele $I_1 = (-\infty, -2]$, $I_3 = [2, \infty)$ avem $f' \geqslant 0$, deci f este crescătoare, iar pe intervalul $I_2 = (-2, 2)$ avem $f' < 0$, deci f este descrescătoare. Această discuţie poate fi prezentată într-un tablou, în care pe linia întâi apar domeniul de definiţie al lui f şi punctele unde f' îşi schimbă semnul:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	16	$\searrow$	-16	$\nearrow$	$+\infty$

Pe linia a doua sunt indicate semnele lui f', pe intervalele respective, iar pe ultima linie este simbolizată creşterea ($\nearrow$) sau descreşterea ($\searrow$) lui f.

2) Studiem monotonia funcţiei $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x \cdot e^{-x^2}$ pe $\mathbf{R}$. În acest caz, $f'(x) = e^{-x^2} + x \cdot e^{-x^2}(-2x) = (1 - 2x^2)e^{-x^2}$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Tabloul respectiv este:

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{\sqrt{2e}}$	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{2e}}$	$\searrow$	0

3) Pentru funcţia $f: (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 - x - \ln x$ avem $f'(x) = 2x - 1 - \frac{1}{x}$ şi tabloul corespunzător este:

x	0		1		∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Deci f este descrescătoare pe intervalul $(0, 1]$ şi crescătoare pe $[1, \infty)$.

c) *Funcţii având aceeaşi derivată.* Ştim că derivata unei funcţii constante este funcţia nulă. Demonstrăm reciproca acestei afirmaţii.

TEOREMA V.3. Dacă o funcţie $f: I \to \mathbf{R}$ este derivabilă pe un interval şi $f' = 0$ pe I (adică $f'(x) = 0$, $\forall x \in I$), atunci f este constantă pe I.

Demonstrație. Fixăm un punct $a \in I$. Pentru orice $x \in I$, $x \neq a$, avem $f(x) - f(a) = (x - a)f'(c)$ cu c cuprins între a și x. Deoarece $f'(c) = 0$, rezultă că $f(x) = f(a)$, deci în orice punct $x \in I$, f ia valoarea $f(a)$, adică funcția f este constantă pe I.

Putem raționa și astfel: din teorema V.2 rezultă că f este atât crescătoare cât și descrescătoare pe I, deci f este neapărat constantă pe I.

COROLAR. Dacă f și g sunt două funcții derivabile pe un interval I și dacă $f' = g'$ pe I, atunci diferența lor $f - g$ este constantă pe I (se mai spune că funcțiile f și g diferă printr-o constantă).

Demonstrație. Notăm $\varphi = f - g$, deci $\varphi' = f' - g' = 0$ pe I și, aplicând teorema V.3, rezultă că φ este constantă pe I.

Exemple

1) Considerăm funcția $f(x) = \sin^2 x + \frac{1}{2}\cos 2x$ pe $\mathbf{R}$. Avem $f'(x) = 2\sin x \cos x + \frac{1}{2}(-2\sin 2x) = 0$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$. Așadar, f este constantă pe $\mathbf{R}$. De altfel, $f(x) = \sin^2 x + \frac{1}{2}(1 - 2\sin^2 x) = \frac{1}{2}$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$.

2) Funcțiile $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $g(x) = \operatorname{arctg}\frac{x-1}{x+1}$ $(x \neq -1)$ au derivatele egale $f'(x) = g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, deci ele diferă printr-o constantă pe fiecare din intervalele $I_1 = (-\infty, -1)$, $I_2 = (-1, \infty)$.

De altfel, $f(x) - g(x) = -\frac{2\pi}{4}$, $\forall\, x \in I_1$ și $f(x) - g(x) = \frac{\pi}{4}$, $\forall\, x \in I_2$ $\left(\text{pentru că limitele diferenței } f(x) - g(x) \text{ spre } -\infty \text{ și spre } +\infty \text{ sunt egale, respectiv, cu } -\frac{3\pi}{4} \text{ și } \frac{\pi}{4}\right)$.

Observație. Dacă f ar fi definită pe reuniunea a două intervale disjuncte I, J și $f' = 0$ pe $I \cup J$, nu am putea conchide că f este constantă pe $I \cup J$. Teorema V.3 afirmă doar că f este constantă pe I și pe J (dar cu valori eventual distincte). De exemplu funcția $f : (-1, 1) \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{dacă } x \in (-1, 0) \\ 2, & \text{dacă } x \in (0, 1) \end{cases}$$

are derivata nulă în fiecare punct din $A = (-1, 0) \cup (0, 1)$ dar funcția f nu este constantă pe A. (A se vedea și exemplul 2) de mai sus.)

1.2. Regula lui l'Hospital

În capitolul II am dat definiția, proprietățile de bază ale limitelor de funcții și câteva procedee de calcul efectiv al unor limite de funcții. Aceste procedee necesită o anumită îndemânare și mult exercițiu pentru a fi stăpânite. Folosind derivatele se poate stabili o metodă generală care acoperă multe din situațiile întâlnite și face calculul limitelor mai simplu.

a) Începem cu examinarea cazului $\frac{0}{0}$, mai precis al limitelor de forma $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ unde $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$, $x_0 \in \mathbf{R}$. În capitolul II am indicat

câteva situații simple în care, prelucrând convenabil raportul $\frac{f(x)}{g(x)}$ și aplicând teoreme asupra limitelor, putem calcula limita acestuia. Dăm acum

TEOREMA V. 4. (regula lui l'Hospital, 1661—1704). Fixăm două funcții reale f, g definite pe un interval $[a, b]$ și un punct $x_0 \in [a, b]$. Presupunem satisfăcute următoarele condiții:

1°. f și g sunt derivabile pe $[a, b] \setminus \{x_0\}$ și continue în x_0;

2°. $f(x_0) = 0$, $g(x_0) = 0$;

3°. $g'(x)$ nu se anulează într-o vecinătate V a lui x_0 ($\forall x \in V \setminus \{x_0\}$);

4°. există limita $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda$ (în $\overline{\mathbf{R}}$).

În aceste condiții, există $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$.

Demonstrație. Aplicând teorema lui Cauchy rezultă că pentru orice $x \in [a, b] \cap V$, $\frac{f(x)}{g(x)} \overset{\text{cf. } 2°}{=\!=} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$, cu $c = c_x$ situat între x_0 și x. Dacă $x \to x_0$, atunci $c_x \to x_0$ și, folosind ipoteza 4°, rezultă că $\frac{f(x)}{g(x)} \to \lambda$ pentru $x \to x_0$.

Trebuie observat că nu este nevoie ca f și g să fie derivabile și în punctul x_0; subliniem, de asemenea, includerea cazului când $\lambda = +\infty$ sau $\lambda = -\infty$.

Exemple

1) Calculăm $\lambda = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2 \sin x + \cos x - 1}{x}$. Luând $f(x) = 2 \sin x + \cos x - 1$, $g(x) = x$ într-un interval $[-a, a]$, $a > 0$ și $x_0 = 0$, în acest caz, $f'(x) = 2 \cos x - \sin x$, $g'(x) = 1$ și $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2 \cos x - \sin x}{1} = 2$; deci, conform regulii lui l'Hospital, avem $\lambda = 2$.

2) Regula poate fi scrisă succint astfel: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (câtul derivatelor și nu derivata câtului!), în condițiile teoremei V.4. Astfel,

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sin \pi x}{2x - 2} = \lim_{x \to 1} \frac{(\sin \pi x)'}{(2x - 2)'} = \lim_{x \to 1} \frac{\pi \cos \pi x}{2} = -\frac{\pi}{2}.$$

Observații. 1) Se poate întâmpla ca raportul $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ să nu aibă limită și totuși $\frac{f(x)}{g(x)}$ să aibă limită. Iată un exemplu: luăm funcțiile f, g definite prin

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \quad g(x) = \sin x$$

într-o vecinătate a originii. În acest caz, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{x}{\sin x}\right) \left(x \cdot \sin \frac{1}{x}\right) = \left(\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sin x}\right) \left(\lim\limits_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x}\right) = 0$ și, pe de altă parte, $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$

$\left(\text{pentru } x \neq 0,\ g'(x) = \cos x \text{ și } \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x} \text{ nu are limită în punctul } x = 0\right)$.

2) În cazul când f' și g' sunt continue în punctul x_0, avem $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = f'(x_0)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g'(x) = g'(x_0)$ și dacă $g'(x_0) \neq 0$, atunci $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$. În acest caz, $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$. Dacă însă $f'(x_0) = g'(x_0) = 0$, atunci ne găsim într-o situație analoagă celei inițiale, uneori mai favorabilă. Dacă f și g au derivate de ordin superior și derivatele lui g îndeplinesc condițiile teoremei V.4, atunci se poate aplica repetat regula lui l'Hospital câturilor $\frac{f'}{g'}, \frac{f''}{g''}$ etc. Iată un exemplu: fie $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \operatorname{sh} x - x$, $g(x) = x^3$ și presupunem că vrem să calculăm $\lambda = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x - x}{x^3}$. Avem $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x - x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{ch} x - 1}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x}{6x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{ch} x}{6} = \frac{1}{6} \operatorname{ch} 0 = \frac{1}{6}$.

3) Fie $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$. Aici $f(x) = \sin x$, $g(x) = x$. Aplicând mecanic regula lui l'Hospital găsim $f'(x) = \cos x$, $g'(x) = 1$, deci $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{\cos 0}{1} = 1$. Deși rezultatul este corect, aplicarea regulii este incorectă, pentru că pentru a putea demonstra că $(\sin)'(x) = \cos x$ a fost necesară tocmai limita de mai sus.

4) Aplicarea mecanică (fără a verifica dacă sunt îndeplinite ipotezele necesare) poate conduce la rezultate eronate; nu putem aplica regula lui l'Hospital, de pildă, dacă $f(x) \to 0$ și $g(x) \to 1$, când $x \to x_0$. De exemplu, luând $f(x) = x - 1$, $g(x) = (x+1)(x+2)$, $\frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{0}{6} = 0$ când $x \to 1$. Aplicarea (incorectă) a regulii lui l'Hospital ar da: $\frac{1}{2x+3} \to \frac{1}{5}$.

O situație des întâlnită este următoarea. Se cere $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, știind că $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, fără ca funcțiile f și g să fie ambele definite în punctul x_0.

Are loc analogul teoremei V.4 (pentru limite la stânga) și anume

TEOREMA V.4'. Fie $f, g : [a, x_0] \to \mathbf{R}$. Presupunem satisfăcute următoarele condiții:

1°. f și g derivabile pe (a, x_0);

2°. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$;

3°. $g(x)$ și $g'(x)$ nu se anulează într-o vecinătate V a lui x_0, $(\forall x \in V \cap (a, x_0))$;

4°. Există $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda$ (în $\overline{\mathbf{R}}$).

În aceste condiții, $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ există și este egală cu λ.

Demonstrația este imediată, de îndată ce remarcăm că funcțiile $f_1, g_1 : [a, x_0] \to \mathbf{R}$, $f_1(x) = f(x)$, dacă $x \in [a, x_0]$, $f_1(x_0) = 0$; $g_1(x) = g(x)$, dacă $x \in [a, x_0)$ și $g_1(x_0) = 0$ sunt continue pe $[a, x_0]$ (ele sunt prelungirile prin continuitate în punctul $x = x_0$ ale lui f, respectiv g) și că se verifică condițiile teoremei V.4.

Desigur are loc şi o teoremă similară, înlocuind intervalul $[a, x_0]$ cu intervalul $(x_0, b]$, pentru limite la dreapta.

b) Regula lui l'Hospital ne permite să tratăm şi alte cazuri exceptate de pildă cazul $\frac{\infty}{\infty}$. Dacă ne interesează $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ şi dacă $f(x) \to \infty$, $g(x) \to \infty$, atunci putem scrie $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}}$ şi atunci $\frac{1}{g(x)} \to 0$, $\frac{1}{f(x)} \to 0$, reducându-ne astfel la cazul $\frac{0}{0}$, studiat anterior.

c) Este interesant că regula lui l'Hospital se aplică nu numai pentru x_0 finit, dar şi în cazul când x_0 este „aruncat la infinit". Are loc atunci:

TEOREMA V.4''. Fie f şi g funcţii reale definite pe un interval $[a, \infty)$, $a > 0$. Presupunem că

1°. f şi g sunt derivabile pe $[a, \infty)$;

2°. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} g(x) = l$, unde $l = 0$, ∞ sau $-\infty$;

3°. $g'(x) \neq 0$ pentru orice x suficient de mare ($x \geqslant A$, $A \geqslant a$);

4°. există $\lambda = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ în $\overline{\mathbf{R}}$.

Atunci există limita $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$, egală cu λ.

(Un enunţ similar are loc pentru $x \to -\infty$).

Demonstraţie. Presupunem $l = 0$. Facem schimbarea de variabilă $x = \frac{1}{u}$. Intervalul $[a, \infty)$ se transformă în $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ în sensul că, dacă $x \in [a, \infty)$, atunci $u \in \left(0, \frac{1}{a}\right]$ şi reciproc. Notăm $\varphi(u) = f\left(\frac{1}{u}\right)$, $\psi(u) = g\left(\frac{1}{u}\right)$: deoarece $l = 0$, avem $\lim\limits_{\substack{u \to 0 \\ u > 0}} \varphi(u) = \lim\limits_{\substack{u \to 0 \\ u > 0}} \psi(u) = 0$. Derivatele lor vor fi $\varphi'(u) = -\frac{1}{u^2} f'\left(\frac{1}{u}\right)$, $\psi'(u) = -\frac{1}{u^2} g'\left(\frac{1}{u}\right)$. Putem aplica funcţiilor φ, ψ teorema V.4' şi rezultă:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{u \to 0 \\ u > 0}} \frac{f\left(\frac{1}{u}\right)}{g\left(\frac{1}{u}\right)} = \lim_{\substack{u \to 0 \\ u > 0}} \frac{\varphi(u)}{\psi(u)} \overset{\text{V.4'}}{=\!=} \lim_{\substack{u \to 0 \\ u > 0}} \frac{\varphi'(u)}{\psi'(u)} = \lim_{\substack{u \to 0 \\ u > 0}} \frac{-\frac{1}{u^2} f'\left(\frac{1}{u}\right)}{-\frac{1}{u^2} g'\left(\frac{1}{u}\right)} =$$

$$= \lim_{\substack{u \to 0 \\ u > 0}} \frac{f'\left(\frac{1}{u}\right)}{g'\left(\frac{1}{u}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda.$$

Cazul $l = \infty$ sau $-\infty$ rezultă din b) etc.

Trebuie remarcat că în demonstrație am utilizat esențial faptul că în teorema lui Cauchy nu cerem derivabilitatea în capetele intervalului considerat, ci numai continuitatea.

Exemple

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7x^3 + x^2}{2x^3 - 100} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{21x^2 + 2x}{6x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{42x + 2}{12x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{42}{12} = \dfrac{7}{2}$.

2) Nu întotdeauna posibilitatea aplicării corecte a regulii lui l'Hospital ne conduce la situații mai favorabile. De exemplu, calculul limitei $l = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ conduce la „buclă infinită":

$$l = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \text{ etc.}$$

Cu metode elementare, se obține direct

$$l = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}}} = 1.$$

În calculul limitelor de funcții se recomandă combinarea metodelor elementare cu regula lui l Hospital.

Cazurile considerate anterior acoperă multe din situațiile care pot fi întâlnite. Reținem că în condițiile teoremelor V.4, V.4′, V.4″, existența limitei câtului derivatelor asigură existența limitei câtului inițial, limitele respective fiind egale.

Până acum am considerat numai cazurile exceptate $\dfrac{0}{0}$ și $\dfrac{\infty}{\infty}$. În cazurile exceptate $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞, nu există reguli de tip l'Hospital care să fie direct aplicate și sunt necesare unele prelucrări ale funcției de sub limită. De exemplu, dacă $f \cdot g$ corespunde cazului $0 \cdot \infty$, atunci scriind $f \cdot g = \dfrac{f}{\frac{1}{g}}$ se obține cazul $\dfrac{0}{0}$. Similar, în cazurile 0^0, ∞^0, 1^∞, putem scrie $f^g = e^{g \ln f}$ etc.

Exemplu

Calculăm $l = \lim\limits_{x\to\infty} x^n e^{-x}$ $(n \in \mathbf{N},\ n \geq 1)$. Suntem în cazul $\infty \cdot 0$. Scriind $l = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^n}{e^x}$ ne reducem la $\dfrac{\infty}{\infty}$ și atunci putem aplica regula lui l Hospital: $l = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{nx^{n-1}}{e^x} =$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \ldots = \lim_{x\to\infty} \frac{n!}{e^x} = 0.$$

Trebuie remarcat că regula lui l'Hospital se poate folosi și pentru calculul unor limite de șiruri, dar nu direct. Dacă avem o funcție $f : [k, \infty) \to \mathbf{R}$ $(k \in \mathbf{N})$

și dacă $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lambda$ $(\lambda \in \overline{\mathbf{R}})$, atunci $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ n\in\mathbf{N}}} f(n) = \lambda$, adică șirul $(f(n))_{n\geq k}$ converge către λ. De exemplu, pentru șirul $a_n = \dfrac{3n^3+n}{n^3+2}$ avem $a_n = f(n)$, $n \in \mathbf{N}$, unde $f(x) = \dfrac{3x^3+x}{x^3+2}$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$. Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 3$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$.

EXERCIȚII (capitolul V, § 1).

1. Să se determine intervalele de monotonie pentru funcțiile următoare $f\ D \to \mathbf{R}$ (D fiind domeniul maxim de definiție):

a) $f(x) = x^3 + 6x^2$;

b) $f(x) = x^3 - \dfrac{1}{3}x$;

c) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$;

d) $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$;

e) $f(x) = \dfrac{2-x}{2+x}$;

f) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$;

g) $f(x) = x\sqrt{\dfrac{2+x}{x}}$;

h) $f(x) = x^3 \ln x$;

i) $f(x) = x \ln(-x)$;

j) $f(x) = \dfrac{\ln|x|}{x}$;

k) $f(x) = (x+2)e^{-x}$;

l) $f(x) = (x^2+x+1)e^{2x}$;

m) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln x$;

n) $f(x) = |x+2| - |2x+1|$.

2. Să se arate că funcția $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = (2+1)^{\frac{1}{x}}$ este monotonă.

3. Fie $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ o funcție și $x_0 \in (a, b)$ fixat. Să se arate că pentru orice număr real α există cel mult o funcție F derivabilă pe (a, b) astfel încât $F'(x) = f(x)$, $\forall\, x \in (a, b)$ și $F(x_0) = \alpha$.

4. Să se afle extremele locale ale funcțiilor elementare următoare pe domeniul lor maxim de definiție:

a) $f(x) = x^4 - 10x^2$;

b) $f(x) = x - \arcsin x$;

c) $f(x) = 2x + \cos 2x$;

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x}$;

e) $f(x) = x^5 \ln x$;

f) $f(x) = x^2 e^{-x-1}$;

g) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$;

h) $f(x) = 2\,\mathrm{sh}\, x - \mathrm{ch}\, x$.

5. Să se calculeze, folosind regula lui l'Hospital, următoarele limite:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{2x-2}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[5]{1+x}-1}{2x}$;

c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{\sin(x-2)}$;

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{2x-2}$;

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{sh}\, x}{\sin x}$;

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x - \sin 2x}{x^3}$;

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{tg}\, x - x}{x^2}$;

h) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x}{\mathrm{ctg}\, \frac{\pi x}{2}}$;

i) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x\right)$;

j) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x - x^2 \ln \frac{1+x}{x}\right)$;

k) $\lim\limits_{x\to\infty} x(\pi - 2 \operatorname{arctg} x)$;

l) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$;

m) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$;

n) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$;

o) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x e^{-\frac{1}{x}}}{\operatorname{tg}^2 x}$;

p) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)^{3x+2}$;

q) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}\right)^x$;

r) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^x$;

s) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (\sin \pi x)^{x-1}$;

t) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x}^{\frac{1}{2x}}$.

6. Pentru două funcţii f, g definite şi derivabile într-o vecinătate a originii, scriem $f(x) \simeq g(x)$, dacă $f(0) = g(0)$ şi $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Să se arate că

a) $\sin x \simeq x$;

b) $\cos x \simeq 1 - \frac{x^2}{2}$;

c) $x - \operatorname{arctg} x \simeq \frac{1}{3} x^3$;

d) $x - \sin x \simeq \frac{1}{6} x^3$;

e) $\sqrt{1+x} - 1 - \frac{1}{2} x \simeq -\frac{1}{8} x^2$;

f) $\sqrt[3]{1+x} - 1 - \frac{1}{3} x \simeq -\frac{1}{9} x^2$;

g) $2x - \ln(1+2x) \simeq 2x^2$;

h) $a^x - b^x \simeq x \ln \frac{a}{b}$ $(a > 0,\ b > 0)$.

7. Să se arate că, deşi limita $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x - \sin x}{x + \cos x}$ există, regula lui l'Hospital nu poate fi aplicată aici direct.

8. Cum poate fi utilizată regula lui l'Hospital pentru a calcula $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ n\in N}} \frac{n}{e^n}$? Dar $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ n\in N}} (e^n + n)^{\frac{1}{n}}$?

9. Să se determine asimptotele următoarelor funcţii $f : D \to \mathbf{R}$ (D fiind domeniul maxim de definiţie):

a) $f(x) = \frac{x^2}{x^3+8}$;

b) $f(x) = \frac{x^3+8}{x^2}$;

c) $f(x) = x\sqrt{\frac{x}{x+1}}$;

d) $f(x) = x + \frac{4}{x-1}$;

e) $f(x) = x - 1 + \frac{4}{x}$;

f) $f(x) = x e^{\frac{1}{x^2}}$;

g) $f(x) = \ln(1 + x - 2x^2)$;

h) $f(x) = \ln \frac{1-x}{2+x}$.

§ 2. Rolul derivatei a doua în studiul funcţiilor

Am văzut ce informaţii se pot obţine asupra comportării unei funcţii derivabile cunoscând derivata ei, mai precis zerourile şi semnul derivatei. Vom vedea acum că derivata a doua (desigur în ipoteza că există) ne furnizează informaţii suplimentare asupra funcţiei, precizând alura graficului.

2.1. Convexitate, concavitate

DEFINIŢIA V. 1. O funcţie $f : I \to \mathbf{R}$, definită pe un interval I se numeşte **convexă** pe I dacă, pentru orice două puncte $x_1, x_2 \in I$ şi pentru orice $t \in [0, 1]$, avem

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leqslant (1-t)f(x_1) + tf(x_2). \tag{1}$$

Această condiţie admite o interpretare geometrică sugestivă. Anume, să considerăm punctele $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$, $x_1 \neq x_2$ de pe graficul lui f. Atunci punctul $\alpha = (1-t)x_1 + tx_2$, $t \in [0, 1]$ aparţine segmentului de capete x_1, x_2. Coarda AB are ecuaţia $y = f(x_2) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_2)$ şi ordonata punctului de abscisă α de pe această coardă va fi $\beta = f(x_2) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}[(1-t)x_1 + tx_2 - x_2] = f(x_2) + (1-t)[f(x_1) - f(x_2)] = (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$. Condiţia (1) se mai scrie $f(\alpha) \leqslant \beta$ şi se exprimă spunând că graficul lui f este situat sub orice coardă dacă unim două puncte situate pe graficul funcţiei, cu abscisele aparţinând lui I (fig. V.2).

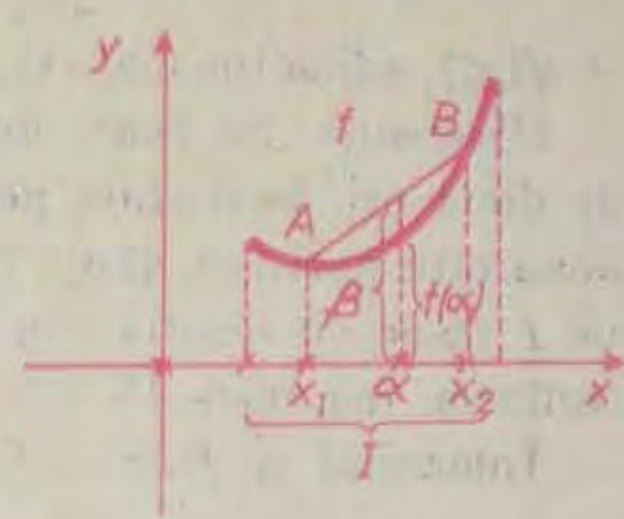


Fig. V.2

Funcţia f se numeşte **concavă** pe I dacă funcţia $-f$ este convexă pe I, adică în (1) are loc inegalitatea inversă. Geometric, aceasta revine la faptul că graficul funcţiei va fi situat deasupra coardei determinate de punctele $(x_1 f(x_1))$ şi $(x_2, f(x_2))$ pe segmentul de capete x_1, x_2; $x_1, x_2 \in I$.

Dacă inegalitatea (1) este strictă, se spune că funcţia f este *strict convexă* pe I (similar se definesc funcţiile strict concave). Uneori se mai spune că funcţiile convexe au „concavitatea în sus" (graficul lor „ţine apa"), iar funcţiile concave au „concavitatea în jos" (sau, în limbaj familiar, graficul lor „nu ţine apa" fig. V.3).

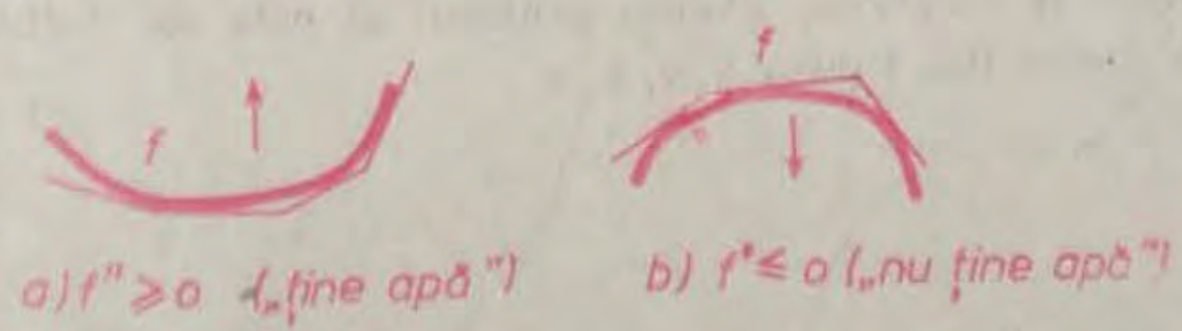


Fig. V.3

Pentru funcții de două ori derivabile pe un interval, putem demonstra un criteriu util de convexitate. Anume, are loc

TEOREMA V.5. Fie $a < b$ două numere reale și $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție continuă. Presupunem că f', f'' există pe intervalul deschis (a, b) și că $f''(x) \geqslant 0$ pentru orice $x \in (a, b)$, atunci funcția f este convexă pe intervalul $[a, b]$.

Demonstrație. Fie $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$. Pentru orice punct $\alpha \in (x_1, x_2)$, aplicând teorema lui Lagrange pe intervalele $[x_1, \alpha]$ și $[\alpha, x_2]$ există $\xi_1 \in (x_1, \alpha)$, $\xi_2 \in (\alpha, x_2)$ astfel încât

$$\frac{f(\alpha) - f(x_1)}{\alpha - x_1} = f'(\xi_1), \quad \frac{f(x_2) - f(\alpha)}{x_2 - \alpha} = f'(\xi_2).$$

Deoarece $\xi_1 < \xi_2$, rezultă $f'(\xi_1) \leqslant f'(\xi_2)$, [deoarece funcția f' este monoton crescătoare pe (a, b); aici intervine ipoteza că $f'' \geqslant 0$ pe (a, b)].

Așadar, $\dfrac{f(\alpha) - f(x_1)}{\alpha - x_1} \leqslant \dfrac{f(x_2) - f(\alpha)}{x_2 - \alpha}$; înlocuind aici $\alpha = (1 - t)x_1 + tx_2$, $t \in (0, 1)$, se obține $\dfrac{f(\alpha) - f(x_1)}{t(x_2 - x_1)} \leqslant \dfrac{f(x_2) - f(\alpha)}{(1 - t)(x_2 - x_1)}$, adică $f(\alpha) \leqslant (1 - t)f(x_1) + tf(x_2)$, adică toc mai (1).

Observație. Se poate demonstra și afirmația reciprocă, anume dacă f este de două ori derivabilă pe un interval I și este convexă, atunci derivata a doua este pozitivă. Dacă f'' nu se anulează pe I, atunci f'' are semn constant pe I (ceea ce rezultă din faptul că $f'' = (f')'$ are proprietatea lui Darboux, conform teoremei IV.11).

Înlocuind pe f cu $-f$ rezultă următorul

COROLAR. O funcție continuă $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, de două ori derivabilă pe (a, b) este concavă pe $[a, b]$ dacă $f'' \leqslant 0$ pe (a, b).

Faptul că derivata a doua a unei funcții este pozitivă (respectiv negativă) pe un interval arată că, de fapt, coeficientul unghiular al tangentei la grafic este crescător (respectiv descrescător), deci că graficul are forma din figura V.3.

2.2. Intervale de convexitate, puncte de inflexiune

Fie $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție de două ori derivabilă pe un interval I. Dacă $f'' \geqslant 0$ (respectiv $f'' \leqslant 0$) pe I, atunci am văzut că I este un interval de convexitate (respectiv de concavitate) al lui f. Reținem deci că semnul derivatei a doua a unei funcții permite determinarea intervalelor pe care funcția respectivă este convexă sau concavă. De exemplu, dacă știm că o funcție este monoton descrescătoare și concavă, atunci graficul ei este de forma din figura V.4, *a* și nu de forma din figura V.4, *b*, *c*.

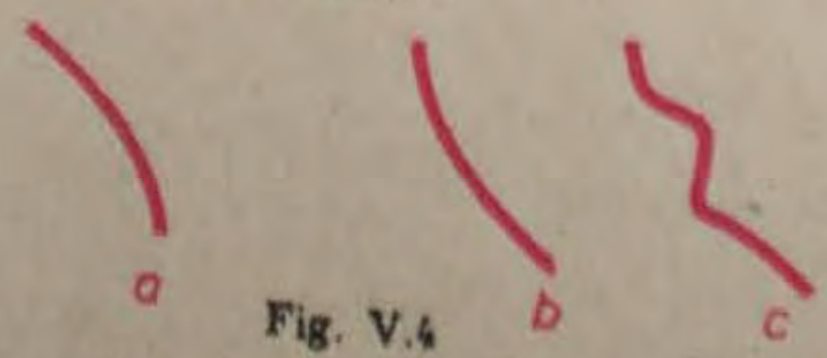


Fig. V.4

Semnul derivatei f'' într-un punct critic ne furnizează un criteriu suficient, de extrem. Are loc

TEOREMA V.6. Dacă $x_0 \in (a, b)$ este un punct critic pentru o funcție $f : (a, b) \to \mathbf{R}$, de două ori derivabilă și dacă $f''(x_0) > 0$ (respectiv $f''(x_0) < 0$), atunci x_0 este punct de minim local (respectiv de maxim local) pentru funcția f.

Demonstrație. Din faptul că $f''(x_0) > 0$, rezultă că există o vecinătate $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ a punctului x_0, pe care f' este crescătoare.

Fig. V.5

Dar $f'(x_0) = 0$ prin ipoteză. Atunci $\forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0)$ avem $f'(x) \leqslant f'(x_0) = 0$, deci (în virtutea teoremei V.2) f este descrescătoare pe acest interval. Analog, pentru $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ avem $0 = f'(x_0) \leqslant f'(x)$, deci f este crescătoare pe intervalul $(x_0, x_0 + \delta)$; în concluzie, x_0 este un punct de minim pentru f. Demonstrația este similară în cazul $f''(x_0) < 0$.

Dacă funcția f este de două ori derivabilă în vecinătatea unui punct x_0, astfel încât $f''(x_0) = 0$ și dacă f'' își schimbă semnul de o parte și alta a lui x_0, atunci funcția își schimbă concavitatea în acel punct. De exemplu, dacă $f''(x) > 0$ pentru $x < x_0$ și $f''(x) < 0$ pentru $x > x_0$, atunci f este convexă la stânga lui x_0 și concavă la dreapta lui (fig. V.5). Dăm acum o definiție precisă.

DEFINIȚIA V.2. Fie $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție continuă definită pe un interval $I \subset \mathbf{R}$. Un punct $x_0 \in I$ distinct de capetele lui I se numește punct de inflexiune pentru f dacă există puncte $\alpha < x_0 < \beta$ în I astfel încât f să fie convexă pe $(\alpha, x_0]$ și concavă pe $[x_0, \beta)$ sau invers (fig. V.6).

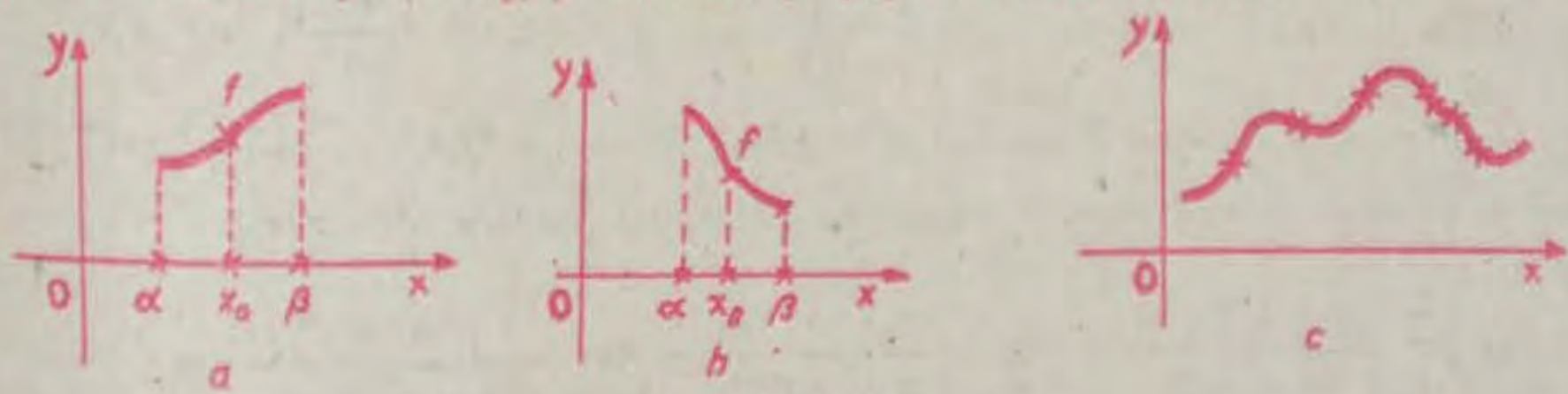


Fig. V.6

TEOREMA V.7. Fie x_0 un punct și f o funcție de două ori derivabilă într-o vecinătate V a lui x_0. Dacă există $\alpha, \beta \in V$ astfel încât

1) $\alpha < x_0 < \beta$;

2) $f''(x_0) = 0$;

3) $f'' < 0$ pe (α, x_0) și $f'' > 0$ pe (x_0, β) sau invers (adică $f'' > 0$ pe (α, x_0) și $f'' < 0$ pe (x_0, β)), atunci x_0 este punct de inflexiune pentru f.

Demonstrația este evidentă din definiția V.2, folosind teorema V.5.

Trebuie remarcat că relația $f''(x_0) = 0$ singură nu implică faptul că x_0 este punct de inflexiune.

Exemple

1) Considerăm funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 4$. Avem $f'(x) = 3x^2 - 12x$, $f''(x) = 6x - 12$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$. Semnul derivatei f'' este indicat în tabloul următor

x	$-\infty$		2		∞
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

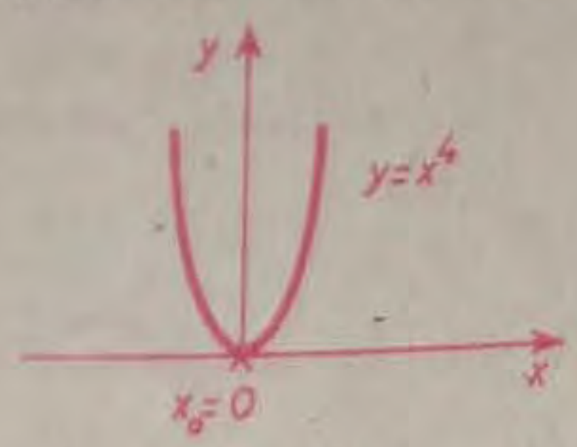


Fig. V.7

Aşadar, f este concavă pe intervalul $(-\infty, 2)$ şi convexă pe $(2, \infty)$, iar punctul $x = 2$ este punct de inflexiune.

2) Pentru funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^4$ avem $f''(x) = 12x^2$ deci $f''(0) = 0$; totuşi $x = 0$ nu este punct de inflexiune, deoarece f este convexă şi la stânga şi la dreapta punctului $x = 0$ (fig. V.7).

Aici punctul $x = 0$ este punct de minim pentru f.

3) Pentru funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = (x^2 - 4x + 6)e^x$ avem $f'(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x$ şi $f''(x) = x^2e^x$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$; ecuaţia $f''(x) = 0$ are soluţia $x = 0$. Punctul $x = 0$ nu este nici punct de extrem pentru f şi nici punct de inflexiune (deoarece $f'(0) \neq 0$ şi $f''(x) > 0$ de o parte şi alta a originii).

2.3. Formula lui Taylor

Am văzut că în jurul unui punct o funcţie derivabilă poate fi aproximată printr-o funcţie de gradul întâi (adică graficul funcţiei este aproximat cu o linie dreaptă) şi se pune problema aproximării „mai bune" (cu eroare mai mică) prin polinoame de grad superior. Astfel, aproximarea pătratică va permite aproximarea graficului printr-o parabolă, în vecinătatea unui punct fixat.

Fie $x_0 \in \mathbf{R}$ un punct fixat şi $f : V \to \mathbf{R}$ o funcţie de n ori derivabilă pe o vecinătate V a punctului x_0 astfel încât $f^{(n)}$ să fie continuă în x_0. În acest caz se poate considera *polinomul Taylor* asociat funcţiei şi punctului x_0

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Se observă că $T_n(x_0) = f(x_0)$, $T_n'(x_0) = f'(x_0)$, $T_n''(x_0) = f''(x_0)$, ..., $T_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$.

Atunci, folosind în mod repetat regula lui l'Hospital (pentru $\frac{0}{0}$), avem:

$$(2)\quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - T_n'(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} = \lim_{x \to x_0} \frac{f''(x) - T_n''(x)}{n(n-1)(x - x_0)^{n-2}} = \ldots$$

$$\ldots = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n)}(x) - T_n^{(n)}(x)}{n!} = 0.$$

Notăm $\theta(x) = f(x) - T_n(x)$, $\forall\, x \in V$, deci $f(x) = T_n(x) + \theta(x)$, $\forall\, x \in V$.

TEOREMA V. 8. *(formula lui B. Taylor, 1685—1731).* **Dacă f este o funcţie de n ori derivabilă într-o vecinătate a punctului x_0 şi $f^{(n)}$ este continuă în x_0, atunci are loc formula aproximativă**

$$(3)\qquad f(x) \simeq f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

pentru orice $x \in V$, în care eroarea absolută $|\theta(x)|$ satisface condiţia $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{|\theta(x)|}{(x - x_0)^n} = 0$.

Demonstrație. Formula (3) revine la $f(x) \simeq T_n(x)$, $\forall\, x \in V$. Eroarea absolută este $|\theta(x)| = |f(x) - T_n(x)|$. Aplicând (2) rezultă

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0, \text{ deci } \lim_{x \to x_0} \frac{\theta(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

COROLARUL 1 (formula de aproximare pătratică). Fie f o funcție de două ori derivabilă într-o vecinătate V a unui punct x_0 cu f'' continuă în x_0. Atunci

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2, \tag{4}$$

unde eroarea $|\theta(x)|$ satisface condiția $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\theta(x)}{(x - x_0)^2} = 0$.

În cazul funcțiilor polinomiale formula (3) este o formulă precisă. Anume, are loc următorul

COROLARUL 2. Dacă $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este o funcție polinomială de gradul n și $x_0 \in \mathbf{R}$ atunci

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

Demonstrație. Cu alte cuvinte, avem de arătat că $f(x) = T_n(x)$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$. Dar f, T_n sunt funcții polinomiale de gradul n și, conform teoremei V.14, avem: $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\theta(x)}{(x - x_0)^n} = 0$; cum θ este funcție polinomială de grad $\leqslant n$, rezultă $\theta(x) = 0$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$.

Exemple

1) Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = e^x$ și $x_0 = 0$. În acest caz $f(0) = 1$, $f'(0) = 1, \dots, f^{(n)}(0) = 1$. Formula (3) devine

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \theta(x), \text{ unde } \lim_{x \to x_0} \frac{\theta(x)}{x^n} = 0. \tag{5}$$

2) Pentru $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sin x$, $x_0 = 1$ și $n = 5$, avem $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$, $f^{(4)}(0) = 0$, $f^{(5)}(0) = 1$ și formula (3) devine

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \theta_1(x), \text{ unde } \lim_{x \to 0} \frac{\theta_1(x)}{x^5} = 0. \tag{6}$$

Similar,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \theta_2(x), \text{ unde } \lim_{x \to 0} \frac{\theta_2(x)}{x^5} = 0. \tag{7}$$

3) Calculăm limita $l = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-x} - \cos x + x}{x^2}$. Folosind (5), (7) avem:

$$l = \lim_{x \to 2} \frac{\left[1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \theta_1(x)\right] - \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \theta_2(x)\right] + x}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{4} + \theta_1(x) - \theta_2(x)}{x^2}, \text{ deci } l = 1, \text{ deoarece } \lim_{x \to 0} \frac{\theta_1(x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\theta_2(x)}{x^2} = 0.$$

4) Aplicăm formula lui Taylor funcției polinomiale $P(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$ în jurul punctului $x_0 = 2$. Avem $P'(x) = 3x^2 - 4x + 1$, $P''(x) = 6x - 4$, $P'''(x) = 6$, ceea ce dă $P(2) = 3$, $P'(2) = 5$, $P''(2) = 8$, $P'''(2) = 6$.

Vom avea deci $P(x) = P(2) + \frac{P'(2)}{1!}(x-2) + \frac{P''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{P'''(2)}{3!}(x-2)^3 =$

$= 3 + 5(x-2) + 4(x-2)^2 + (x-2)^3$.

Reciproc, formula lui Taylor ne permite să constituim un polinom dacă se cunosc derivatele sale succesive într-un punct dat.

EXERCIȚII (capitolul V, § 2)

1. Să se determine intervalele de convexitate și concavitate pentru funcțiile $f : D \to \mathbf{R}$ următoare (D fiind domeniul maxim de definiție):

a) $f(x) = x^3 + 3x^2$;

b) $f(x) = \sin x$;

c) $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$;

d) $f(x) = x + \sqrt[3]{x}$;

e) $f(x) = x^2 \ln x$;

f) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$;

g) $f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$;

h) $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$.

2. Să se determine punctele de inflexiune pentru funcțiile $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ următoare:

a) $f(x) = 4x - \frac{1}{3}x^3$;

b) $f(x) = x^3 - 3x^2$;

c) $f(x) = \frac{3x}{x^2+1}$;

d) $f(x) = \frac{x-9}{|x|+1}$;

e) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$;

f) $f(x) = \sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x+1}$;

g) $f(x) = x + 2\cos\frac{x}{2}$;

h) $f(x) = \cos x - \cos^2 x$;

i) $f(x) = \sin x - \sin^3 x$;

j) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x$.

3. Presupunem că funcția $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ este continuă pe $[a, b]$, de două ori derivabilă pe (a, b) și astfel încât $f'' > 0$ pe (a, b). Să se arate că pentru orice $\alpha \in (a, b)$ tangenta la graficul lui f în punctul $(\alpha, f(\alpha))$ este dedesubtul graficului lui f.

4. Să se arate că dacă o funcție $f : I \to \mathbf{R}$ pe un interval I este o funcție convexă și $a, b \in I$, atunci $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$.

5. Fie $a, b \in \mathbf{R}$ constante, $ab > 0$. Se consideră funcția $f : \mathbf{R}\setminus\{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{x} + \lambda x$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Să se studieze monotonia și convexitatea lui f pe intervalele $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$; discuție.

6. Să se determine o funcție polinomială $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de gradul III astfel încât:

a) $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 2$, $f'''(0) = -3$;

b) $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$;

c) $f(1) = 0$, $f'(1) = 0$, $f''(1) = 0$, $f'''(1) = k$, $k \neq 0$, real dat.

§ 3. Reprezentarea grafică a funcţiilor

În cele ce urmează, vom subînţelege fixat un sistem ortogonal de axe xOy. Am adus, în capitolele anterioare, mai multe motivaţii asupra utilităţii graficelor de funcţii. Subliniem din nou faptul că scopul nostru este studiul funcţiilor, trasarea graficului unei funcţii fiind un mijloc extrem de util pentru a ilustra proprietăţile ei locale şi globale. Acum ne ocupăm de trasarea graficelor de funcţii reale, extinzând cazul funcţiilor elementare. Ca aplicaţie a rezultatelor teoretice stabilite până acum, utilizând în mod esenţial noţiunea de derivată, ştim să indicăm deja anumite puncte importante ale graficelor (puncte de extrem, intersecţii cu axele etc.), intervalele de monotonie, anumite drepte remarcabile (asimptote, semitangente etc.). Odată determinate aceste elemente, ele pot să fie figurate pe sistemul fixat de axe şi permit redarea aproximativă a graficului funcţiei considerate.

Pentru a prezenta mai sistematic modul de lucru în trasarea graficului unei funcţii (notată cu f), recomandăm parcurgerea următoarelor etape de determinare succesivă a unor elemente caracteristice ale funcţiei.

I. *Domeniul D de definiţie al funcţiei.* Acesta este fie indicat în mod explicit de enunţ, fie este subînţeles ca fiind domeniul maxim de definiţie (în cazul funcţiilor elementare).

De pildă, pentru o funcţie de tipul $\sqrt{g(x)}$ se pune condiţia $g(x) \geqslant 0$, pentru $\ln g(x)$ trebuie ca $g(x) > 0$, pentru un cât $\frac{g(x)}{h(x)}$ este necesar ca $h(x) \neq 0$, iar pentru $\arcsin \varphi(x)$ este necesar ca $-1 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$ etc. Dacă funcţia este periodică, atunci este suficient ca funcţia să fie studiată pe un interval de lungime cât perioada principală; trebuie atunci făcută distincţia între domeniul de studiu şi cel de definiţie. De asemenea, în probleme cu conţinut fizic, se poate întâmpla să apară restricţii suplimentare pentru domeniul de studiu.

De îndată ce este indicat D se determină intersecţiile graficului funcţiei f cu axele de coordonate. Dacă $0 \in D$, atunci graficul intersectează axa Oy în punctul $(0, f(0))$, iar eventualele intersecţii cu axa Ox sunt punctele $(a, 0)$, $a \in D$ unde $f(a) = 0$ şi se obţin deci prin rezolvarea ecuaţiei $f(x) = 0$.

II. *Semnul funcţiei şi eventualele simetrii ale graficului.*

Dacă $f \geqslant 0$ (respectiv $f \leqslant 0$), atunci graficul lui f este situat deasupra (respectiv dedesubtul) axei Ox. Este util de a determina mulţimile de puncte unde graficul este situat deasupra, respectiv dedesubtul axei Ox. Dacă f este pară, atunci graficul lui f este simetric faţă de axa Oy, iar dacă f este impară, atunci graficul lui f este simetric faţă de origine. (Pentru o funcţie pară sau impară, domeniul de studiu D poate fi restrâns, făcându-se studiul restricţiei funcţiei f la mulţimea $D \cap [0, \infty)$.)

III. *Limite la capete, continuitatea funcţiei, asimptote.*

Dacă mulţimea D este nemărginită, atunci este necesar studiul limitei lui f spre $+\infty$ (sau spre $-\infty$), determinându-se totodată asimptotele orizon-

tale (eventuale) ale lui f. Dacă D este o reuniune de intervale, atunci se calculează valorile sau limitele lui f la capetele fiecărui interval.

Se determină asimptotele verticale (eventuale), adică dreptele $x = x_0$, unde în punctul x_0 cel puțin una din limitele laterale $f(x_0 - 0)$ sau $f(x_0 + 0)$ este infinită.

În cazul când nu există asimptotă orizontală, de exemplu spre $+\infty$, se poate studia existența asimptotei oblice $y = mx + n$, dacă limitele $m = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$, $n = \lim\limits_{x\to\infty} [(fx) - mx]$ există și sunt finite (similar pentru $-\infty$).

Deja din parcurgerea acestor trei etape ne putem da seama într-o oarecare măsură de alura generală a graficului. De asemenea, trebuie determinată mulțimea punctelor din domeniul de definiție în care f este continuă. Pasul următor este esențial.

IV. *Derivata întâi.* La acest punct se stabilește mai întâi mulțimea punctelor în care funcția f este derivabilă; se calculează derivata f'. Se rezolvă ecuația $f'(x) = 0$ și astfel se determină punctele critice ale lui f și intervalele pe care f' are semn constant. Din studiul punctelor critice, combinat cu cel al intervalelor de monotonie, putem decide care din acestea sunt puncte de maxim sau minim local pentru f. Mai precis, dacă x_0 este un punct critic și dacă într-o vecinătate a lui x_0 avem $f'(x) \geqslant 0$, pentru $x < x_0$ și $f'(x) \leqslant 0$ pentru $x > x_0$, atunci este evident că x_0 este un punct de maxim local pentru f (deoarece f crește până în x_0 și descrește după x_0); similar, dacă într-o vecinătate a lui x_0, $f'(x) \leqslant 0$ pentru $x < x_0$ și $f'(x) \geqslant 0$ pentru $x > x_0$, atunci x_0 va fi un punct de minim local pentru f. Nu trebuie uitat că dacă f este definită pe un interval închis, se poate ca funcția să aibă extreme la capetele intervalului, fără ca f' să se anuleze, după cum se poate întâmpla ca f să admită extrem în punctele unde f' nu există (de exemplu, $f(x) = |x|$ are un minim în punctul $x = 0$, deși f nu este derivabilă în $x = 0$). În general, trebuie studiată funcția și pe mulțimea punctelor în care nu este derivabilă (puncte unghiulare, puncte de întoarcere, semitangente etc.).

Dacă funcția f este de două ori derivabilă, atunci, pentru trasarea ceva mai precisă a graficului lui f se adaugă etapa:

IV'. *Studiul derivatei a doua.* Calculul rădăcinilor reale ale ecuației $f''(x) = 0$ și semnul lui f'' permit determinarea intervalelor de convexitate și a punctelor eventuale de inflexiune. În particular, semnul derivatei a doua în punctele critice permite a se decide care dintre acestea sunt puncte de extrem, cf. teoremei V.6.

V. *Tabloul de variație.*

Rezultatele obținute pot fi sintetizate într-un tablou având trei rubrici orizontale sau patru (dacă funcția este de două ori derivabilă și forma derivatei secunde permite determinarea semnului, respectiv a rădăcinilor sale): prima este pentru valorile remarcabile ale lui x, în a doua se trec valorile corespunzătoare ale lui f' și semnul lui f', iar în rubrica a treia se trec valorile lui f, limitele la capete și semnele indicând creșterea sau descreșterea funcției f.

Asimptotele verticale se marchează prin linii verticale punctate în acest tablou, trecându-se în linia a treia limitele laterale corespunzătoare. În a patra rubrică se trece semnul lui f''. Menţionăm că în practică la această rubrică pot apărea mari dificultăţi de calcul şi, în acest caz, ea se poate omite.

Trebuie remarcat că apariţia unor contradicţii în tabloul de variaţie (de exemplu creştere spre $-\infty$, descreştere spre $+\infty$, creştere de la $+\infty$ încolo etc.) indică greşeli de calcul la determinarea limitelor funcţiei sau în expresia derivatei f', în rezolvarea ecuaţiei $f'(x) = 0$, la intersecţiile cu axele, asimptote etc.

VI. *Trasarea graficului.*

Pe sistemul ortogonal de axe xOy fixat se figurează elementele determinate la etapele anterioare. Graficul funcţiei va fi o submulţime a mulţimii $D \times \mathbf{R}$ (haşurându-se complementara mulţimii $D \times \mathbf{R}$ din $\mathbf{R}^2$). Punctele remarcabile ale graficului se unesc printr-o linie curbă, ţinându-se cont de monotonia funcţiei, de asimptote şi în general de rezultatele sintetizate în tabloul de variaţie. Pentru a trasa cât mai corect graficul funcţiei se recomandă a cunoaşte mai multe valori ale funcţiei şi ale derivatei. În fapt, ceea ce facem este o „interpolare" ţinând seama de valorile remarcabile găsite.

În continuare vom da mai multe exemple de reprezentări grafice, cu parcurgerea sistematică a etapelor I—VI menţionate.

EXEMPLE

1) $\boxed{f(x) = x^3 + x^2}$.

I. Domeniul maxim de definiţie este $D = \mathbf{R}$. Intersecţiile cu axele sunt $(0, 0)$, $(-1, 0)$.

II. Funcţia nu este pară, nici impară. Ea este pozitivă ($f(x) \geqslant 0$) pentru $x^3 + x^2 \geqslant 0$, adică pentru $x \geqslant -1$.

III. Limitele la capete sunt $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x^3 + x^2) = -\infty$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} (x^3 + x^2) = \infty$. Nu există asimptote. Funcţia f este continuă pe $\mathbf{R}$.

IV. Derivata întâi este $f'(x) = 3x^2 + 2x$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$. Ecuaţia $f'(x) = 0$ are soluţiile $x_1 = -\frac{2}{3}$, $x_2 = 0$ (punctele critice ale lui f). Evident $f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{27}$ şi $f(0) = 0$.

V. Tabloul de variaţie este

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		0		∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{4}{27}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	∞

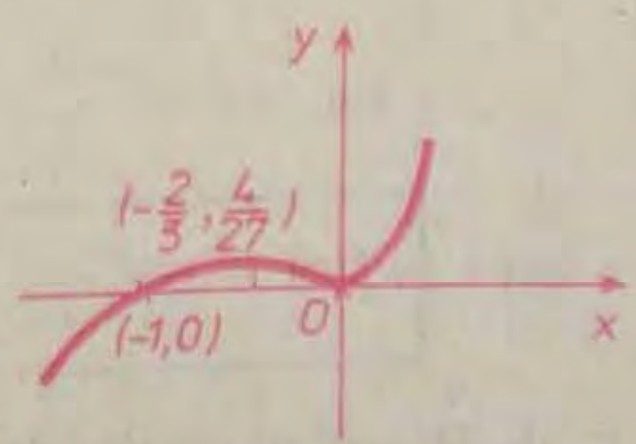


Fig. V.8

VI. Graficul (fig. V.8).

(Se observă că pentru $x \geqslant -1$ graficul este situat deasupra axei Ox.)

2) $$\boxed{f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$$

I. Domeniul maxim de definiție este $D = \mathbf{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Graficul nu taie axa Oy (pentru că $0 \notin D$). Intersecțiile cu axa Ox se determină rezolvând ecuația $f(x) = 0$, adică $x + 1 = 0$; există o singură intersecție cu axa Ox, anume punctul $A(-1, 0)$.

II. Funcția nu este pară și nici impară; avem $f(x) \geqslant 0$, dacă și numai dacă $\frac{x+1}{x^2} \geqslant 0$, adică $x \geqslant -1$, $x \neq 0$.

III. Limitele la capete: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = 0$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) =$

$= \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{x+1}{x^2} = \infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{x+1}{x^2} = \infty$ și $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = 0$

Așadar, dreapta $y = 0$ este asimptotă orizontală (spre $-\infty$ și spre $+\infty$); apoi $x = 0$ este asimptotă verticală. Funcția f este continuă pe $\mathbf{R} \setminus \{0\}$.

IV. Avem $f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} = \frac{-x-2}{x^3}$, $\forall\, x \in D$; de obicei se recomandă ca numitorul să fie pozitiv, pentru a determina mai ușor semnul derivatei, deci $f'(x) = -\frac{x(x+2)}{x^4}$, $\forall\, x \neq 0$. Ecuația $f'(x) = 0$ are o singură soluție, anume $x = -2$, dar derivata f' își schimbă semnul în punctele $x = -2$, $x = 0$ (chiar dacă în punctul $x = 0$ ea nu este definită).

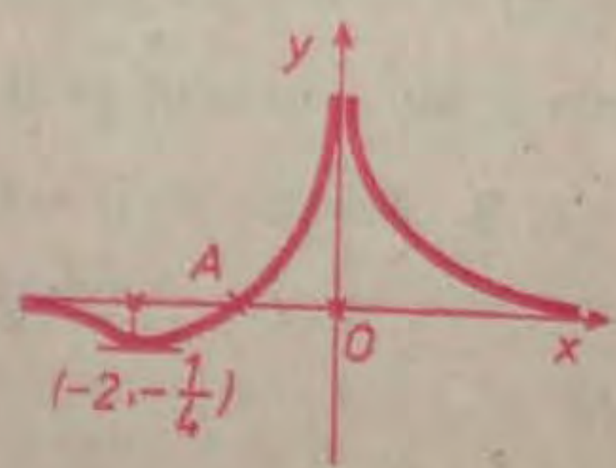


Fig. V.9

V. Tabloul de variație:

x	$-\infty$		-2		-1		0		∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	1	$+$		$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	∞ ¦ ∞	$\searrow$	0

VI. Graficul (fig. V.9).

3) $$\boxed{f(x) = \frac{|x|}{x^2 + 1}}.$$

I. Domeniul maxim de definiție este $D = \mathbf{R}$; graficul are o singură intersecție cu axele, anume originea.

II. Funcția este pozitivă pe întreg **R**, deci graficul este situat deasupra axei Ox. Apoi funcția este pară, deoarece $f(-x) = f(x)$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$. Este suficient să facem studiul restricției lui f la mulțimea $D_1 = [0, \infty)$.

III. Avem $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x}{x^2+1} = 0$ și $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$ (gradul numărătorului fiind mai mic decât gradul numitorului). Așadar, $y = 0$ este asimptotă spre $+\infty$. Graficul nu admite asimptote verticale sau oblice. De asemenea, funcția f este continuă pe întreg domeniul de definiție.

IV. Pentru $x \geqslant 0$ avem $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$, deci $f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$, $\forall x > 0$ și ecuația $f'(x) = 0$ are rădăcinile $x = \pm 1$ (pentru $x > 0$ se consideră numai $x = 1$). Apoi $f'_d(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x) = 1$, conform obs. 1, pag. 156, și semitangenta la grafic în origine face unghiul $\frac{\pi}{4}$ cu axa Ox.

V. Tabloul de variație:

x	0		1		∞
$f'(x)$		+ + +	0	— — —	
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{2}$	↘	0

VI. Graficul pe intervalul $[0, \infty)$ este indicat în figura V.10, *a*. Deoarece funcția f este pară, ea are pe **R** graficul din figura V.10, *b*. Punctul $x = 0$ este punct unghiular.

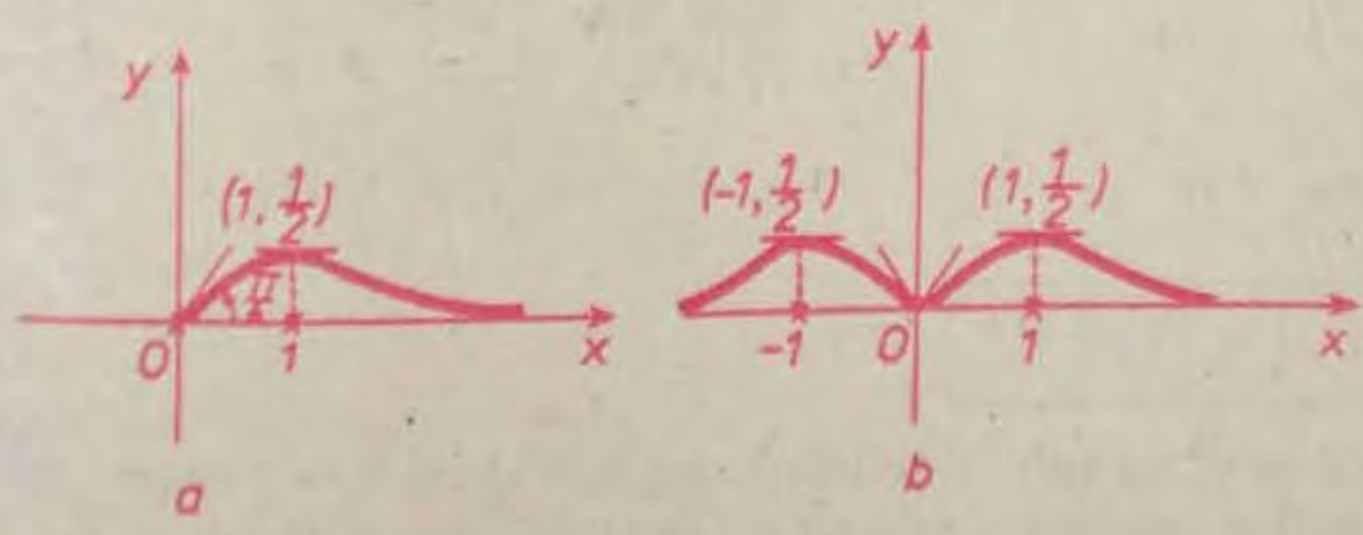


Fig. V.10

4) $\boxed{f(x) = \frac{\sqrt{x}}{(x-1)^2}}$.

I. Domeniul maxim de definiție este $D = [0, \infty) \setminus \{1\} = [0, 1) \cup (1, \infty)$ Graficul are o singură intersecție cu axele, anume originea.

II. Avem $f(x) \geqslant 0$, $\forall\, x \in D$. Graficul nu admite simetrii (față de Oy sau față de origine).

III. Limitele la capete: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\sqrt{x}}{(x-1)^2} = 0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \infty$,

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2-2x+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} \cdot \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = 0 \cdot 1 = 0.$

Axa Ox este asimptotă orizontală (spre $+\infty$), iar $x = 1$ este asimptotă verticală.

IV. $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x-1)^2 - \sqrt{x}\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \dfrac{(x-1)^2 - 4x(x-1)}{2\sqrt{x}\,(x-1)^4} =$

$= \dfrac{-(x-1)\cdot(3x+1)}{2\sqrt{x}\,(x-1)^4}$, $\forall\, x \in (0, 1) \cup (1, \infty)$.

Funcția f nu este derivabilă în punctul $x = 0$ și $f'_d(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} =$

$= \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{\sqrt{x}\,(x-1)^2} = \infty$; de altfel $f'_d(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x) = \infty$. Atunci graficul are ca semitangentă în origine semiaxa pozitivă Oy.

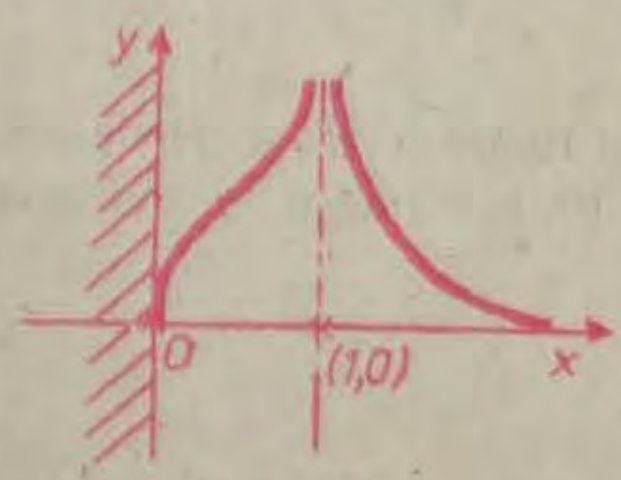


Fig. V 11

V. Tabloul de variație:

x	0		1		∞
$f'(x)$	▪	∞ +		—	
$f(x)$	▪	0 ↗	∞ | ∞	↘	0

VI. Graficul (fig. V.11).

5) $\boxed{f(x) = 3^x - 3^{-x}}$

I. Domeniul maxim de definiție este **R**. Pentru $x = 0$ avem $f(0) = 3^0 - 3^0 = 1 - 1 = 0$ și originea este unicul punct de intersecție al graficului cu axele.

II. Avem $f(x) \geqslant 0$, dacă și numai dacă $3^x \geqslant 3^{-x}$, adică $x \geqslant 0$. Funcția este impară, deoarece $f(-x) = 3^{-x} - 3^x = -f(x)$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$, deci graficul este simetric față de origine și ar fi suficient studiul pentru $x \geqslant 0$.

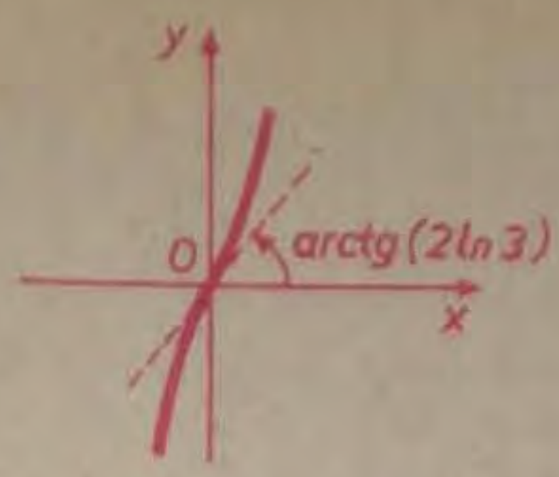
III. Avem $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 3^x - \lim\limits_{x\to-\infty} 3^{-x} = 0 - \infty = -\infty$ și $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty - 0 = \infty$. Graficul nu are asimptote și funcția este continuă pe **R**.

IV. $f'(x) = 3^x \cdot \ln 3 + 3^{-x} \cdot \ln 3 = (3^x + 3^{-x}) \cdot \ln 3$.

Deoarece ecuația $f'(x) = 0$ nu are soluții, derivata f' are semn constant; de altfel $f'(x) > 0$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$, deci f este strict crescătoare pe întreg **R**. Se observă că $f'(0) = 2 \ln 3$.

V. Tabloul de variaţie:

x	$-\infty$		0		∞
$f'(x)$		$+$	$2\ln 3$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	∞



VI. Graficul (fig. V.12).

Fig. V.12

6) $\boxed{f(x) = x + \sqrt{x^2 + 2x}}$.

I. Domeniul maxim de definiţie D este definit prin $x^2 + 2x \geqslant 0$, deci $D = (-\infty, -2] \cup [0, \infty)$. Pentru $x = 0$ avem $f(0) = 0$; apoi ecuaţia $f(x) = 0$ $x + \sqrt{x^2 + 2x} = 0$ are unica soluţie $x = 0$. Aşadar, graficul lui f are o singură intersecţie cu axele, anume originea.

II. Dacă $x \geqslant 0$, este evident că $f(x) \geqslant 0$, iar dacă $x \leqslant -2$, atunci $f(x) < 0$. Graficul nu admite simetrii.

III. Avem $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \overset{x=-z}{=} \lim\limits_{z\to\infty} (-z + \sqrt{z^2 - 2z}) = \lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{z^2 - 2z - z^2}{\sqrt{z^2 - 2z} + z} =$

$$= \lim_{z\to\infty} \frac{-2z}{z\left(\sqrt{1 - \frac{2}{z}} + 1\right)} = \lim_{z\to\infty} \frac{-2}{\sqrt{1 - \frac{2}{z}} + 1} = -1.$$

Apoi $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f(x) = -2$, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = 0$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty + \infty = \infty$.

Graficul admite asimptota orizontală $y = -1$ spre $-\infty$ şi nu are asimptote verticale. Determinăm asimptota oblică (eventuală) şi pentru aceasta, calculăm

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + 2x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2}{x}}\right) = 2,$$

$$n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty} [(x + \sqrt{x^2 + 2x}) - 2x] = \lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 2x - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x\left(\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 1} = \frac{2}{2} = 1.$$

Aşadar, dreapta $y = 2x + 1$ este asimptotă oblică spre $+\infty$.

IV. Derivata este $f'(x) = 1 + \dfrac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x}} = \dfrac{x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x}}{\sqrt{x^2 + 2x}}$.

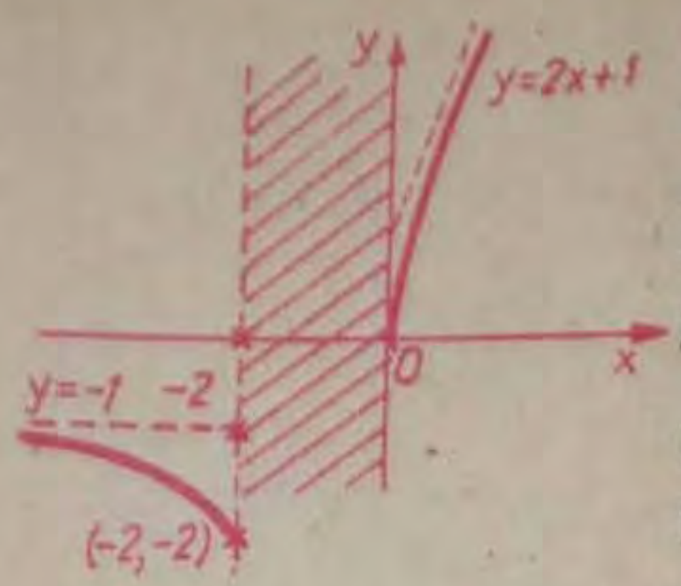


Fig. V.13

Ecuaţia $f'(x) = 0$ devine $\sqrt{x^2 + 2x} = -x - 1$ şi nu admite soluţii.

Aşadar derivata f' are semn constant pe fiecare din intervalele $(-\infty, -2)$ şi $(0, \infty)$. Se observă că $f'_s(-2) = \lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} f'(x) = -\infty$ şi $f'_d(0) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f'(x) = \infty$.

Punctele $x = -2$, $x = 0$ sunt puncte de minim pentru f.

V. Tabloul de variaţie este:

x	$-\infty$		-2		0		∞
$f'(x)$		$-$ $-$	$-\infty$	▪▪▪	∞	$+$ $+$	
$f(x)$	-1	$\searrow$	-2	▪▪▪	0	$\nearrow$	∞

VI. Graficul este indicat în figura V.13.

7) $\boxed{f(x) = 1 - \sqrt{|x^2 - 1|}}$.

I. Domeniul maxim de definiţie este $D = \mathbf{R}$.

II. Avem $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq |x^2 - 1| \Leftrightarrow -1 \leq x^2 - 1 \leq 1 \Leftrightarrow x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Funcţia f fiind pară, este suficient de studiat comportarea ei pe intervalul $[0, \infty)$.

III. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} (1 - \sqrt{x^2 - 1}) = -\infty$.

Funcţia nu admite asimptote verticale şi nici asimptotă orizontală spre $+\infty$.

Apoi, $m = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x} - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right) = -1$,

$$n = \lim_{x \to \infty} [f(x) + x] = \lim_{x \to \infty} [1 + x - \sqrt{x^2 - 1}] = \lim_{x \to \infty} \frac{(1 + x)^2 - (x^2 - 1)}{1 + x + \sqrt{x^2 - 1}} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{2x + 2}{1 + x + \sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \to \infty} \frac{x\left(2 + \frac{2}{x}\right)}{x\left(\frac{1}{x} + 1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right)} = 1,$$

deci $y = -x + 1$ este asimptotă oblică spre $+\infty$. Funcţia f este continuă pe $\mathbf{R}$.

IV. Pentru orice $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{1 - x^2}, \text{ dacă } x \in [-1, 1] \\ 1 - \sqrt{x^2 - 1}, \text{ dacă } x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \end{cases}$

Deci, $f'(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}, \text{ dacă } x \in (-1, 1) \\ -\frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}, \text{ dacă } x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \end{cases}$

(în punctele $x = \pm 1$ funcția f nu este derivabilă; aplicând corolarul teoremei IV.10, este important de observat că $f'_s(-1) = \infty$, $f'_d(-1) = -\infty$, $f'_s(1) = \infty$, $f'_d(1) = -\infty$, deci punctele -1, 1 sunt puncte de întoarcere și simultant puncte de maxim).

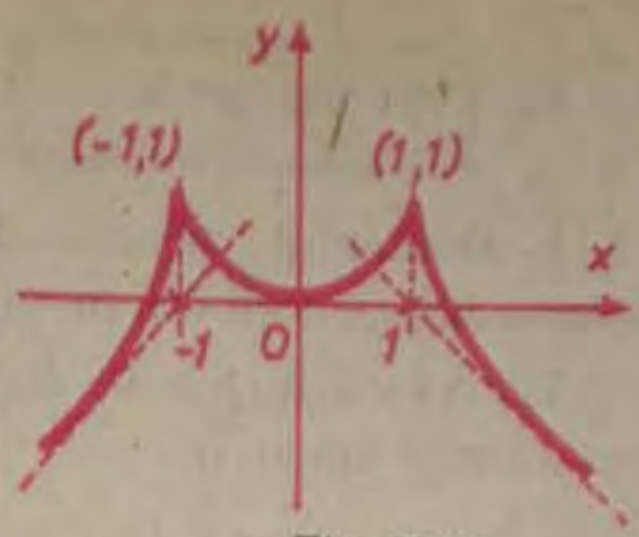


Fig. V.14

V. Tabloul de variație pe intervalul $[0, \infty)$ este:

x	0			1			∞
$f'(x)$	0	+	∞	|	$-\infty$	—	
$f(x)$	0	↗		1		↘	$-\infty$

VI. Graficul (fig. V.14).

8) $\boxed{f(x) = x \cdot e^{-x} \cdot \sigma(x)}$.

I. Așadar $f(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & \text{dacă } x \geqslant 0 \\ 0, & \text{dacă } x < 0. \end{cases}$

Domeniul maxim de definiție este $D = \mathbf{R}$. Domeniul de studiu efectiv este $D_1 = [0, \infty)$, deoarece pentru $x < 0$ avem $f(x) = 0$.

II. Dacă $x \geqslant 0$ este evident că $f(x) = xe^{-x} \geqslant 0$, deci graficul este situat deasupra axei Ox.

III. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{e^x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{e^x} = 0$ (aplicând regula lui l'Hospital). Funcția nu admite asimptote verticale și are $y = 0$ asimptotă orizontală spre $+\infty$ (și spre $-\infty$). De asemenea, funcția f este continuă pe întreg $\mathbf{R}$ (căci este continuă pentru $x < 0$, pentru $x > 0$, iar în origine $f(0-0) = f(0+0) = f(0) = 0$).

IV. Pentru $x < 0$ avem $f'(x) = 0$ și pentru $x > 0$ avem $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1 - x) \cdot e^{-x}$. Funcția f nu este derivabilă în $x = 0$ (căci $f'_s(0) = 0$, $f'_d(0) = 1$). Apoi f' se anulează pentru $x = 1$. Evident, $f(1) = \frac{1}{e}$.

V. Tabloul de variație.

x	$-\infty$	0		1		∞
$f'(x)$	0	0	+	0	—	
$f(x)$	0	0	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

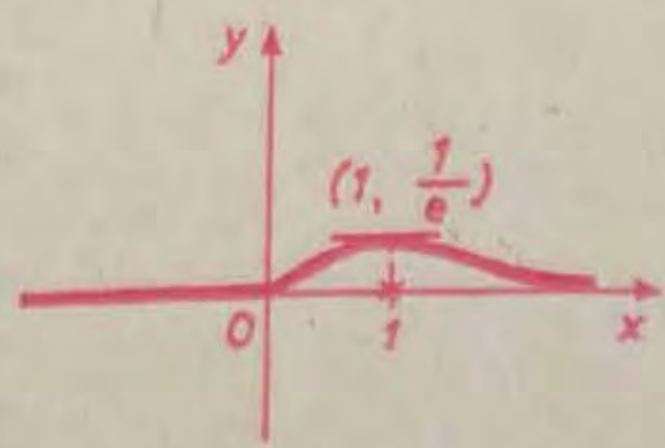


Fig. V.15

VI. Graficul (fig. V.15).

9) $\boxed{f(x) = x^2 \ln x}$.

I. Domeniul maxim de definiție este $D = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}$. Graficul intersectează axa Ox în punctul $A(1, 0)$.

II. Avem $f(x) \geqslant 0$, dacă și numai dacă $\ln x \geqslant 0$, adică $x \geqslant 1$. Graficul nu admite simetrii.

III. Limitele la capete: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x^2}} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{2}{x^3}} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(-\dfrac{x^2}{2}\right) = 0$

(folosind regula lui l'Hospital); apoi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} x^2 \ln x = \infty \cdot \infty = \infty$.

Funcția nu admite asimptote.

IV. $f'(x) = 2x \ln x + x^2 \cdot \dfrac{1}{x} = x\,(2 \ln x + 1)$, $\forall\, x > 0$.

Ecuația $f'(x) = 0$ devine $2 \ln x + 1 = 0$, deci $x = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

V. Tabloul de variație:

x	0		$\frac{1}{\sqrt{e}}$		∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2e}$	$\nearrow$	∞

[se observă că $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\dfrac{1}{2e}$ și că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x(2 \ln x + 1) =$

$= \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{2 \ln x + 1}{\dfrac{1}{x}} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\dfrac{2}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (-2x) = 0$].

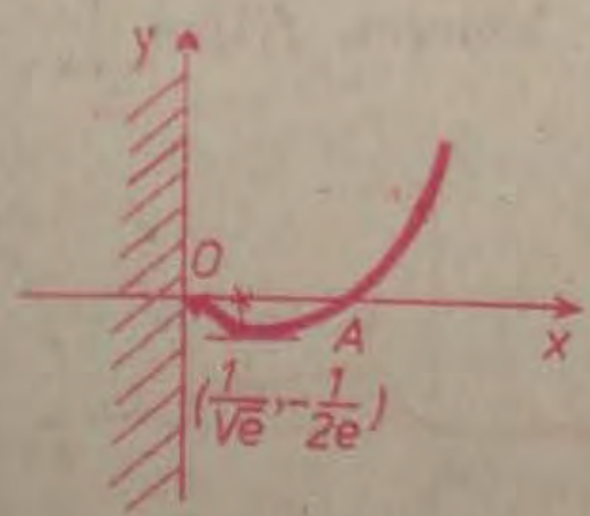


Fig. V.16

VI. Graficul (fig. V.16).

(Săgeata semnifică faptul că funcția f nu este definită în $x = 0$, dar are limită la dreapta în punctul $x = 0$).

Observație. Pentru studiul și reprezentarea grafică a funcțiilor exponențiale și logaritmice se utilizează următoarele fapte. Pentru orice $n \geqslant 1$ întreg, avem

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{\ln x} = \infty.$$

(se mai spune că exponențiala „crește mai repede" spre infinit decât orice putere x^n, care la rândul ei crește mai repede decât logaritmul lui x). Din faptul că $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \infty$, prin logaritmare rezultă $\lim\limits_{x\to\infty} (x - \ln x) = \infty$.

De asemenea, $\lim\limits_{x\to-\infty} x\, e^x \overset{x=-z}{=} \lim\limits_{z\to\infty} (-z\, e^{-z}) = -\lim\limits_{x\to\infty} \frac{z}{e^z} = 0$ și analog,

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} \overset{x=-\frac{1}{z}}{=} \lim\limits_{z\to\infty} (-z\, e^{-z}) = 0$. Apoi $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} \overset{x=\frac{1}{z}}{=} \lim\limits_{z\to\infty} z\, e^z = \infty$;

de asemenea, $\lim\limits_{x\to\infty} (5x - \ln x) = \lim\limits_{x\to\infty} \ln \frac{e^{5x}}{x} = \ln \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^{5x}}{x} = \infty$.

10) $\boxed{f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x}$.

I. Domeniul maxim de definiție este $D = \mathbf{R}$. Deoarece funcția f este periodică de perioadă principală 2π, este suficient de studiat comportarea funcției pe intervalul $I = [-\pi, \pi]$. Avem $f(0) = 0$ și dacă $f(x) = 0$, atunci $\sin x + \sin x \cos x = 0$, de unde $x \in \{-\pi, 0, \pi\}$ (zerourile situate în I). Așadar, intersecțiile graficului cu axele sunt $A_1(-\pi, 0)$, $A_2(0, 0)$, $A_3(\pi, 0)$.

II. Graficul este simetric față de origine (deoarece funcția f este impară). Am fi putut reduce studiul funcției la intervalul $[0, \pi]$.

III. Deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to-\pi\\ x>-\pi}} f(x) = f(-\pi) = 0$, $\lim\limits_{\substack{x\to\pi\\ x<\pi}} f(x) = f(\pi) = 0$, rezultă că funcția f este continuă în punctele $x = -\pi$, $x = \pi$, deci în I (și chiar pe întreg $\mathbf{R}$). Funcția nu admite asimptote (de altfel orice funcție periodică neconstantă nu admite asimptote orizontale sau oblice).

IV. Avem $f'(x) = \cos x + \cos 2x = 2 \cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2}$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$. Soluțiile din I ale ecuației $f'(x) = 0$ sunt $-\pi, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \pi$.

V. Tabloul de variație:

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{3}$		0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	2	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0

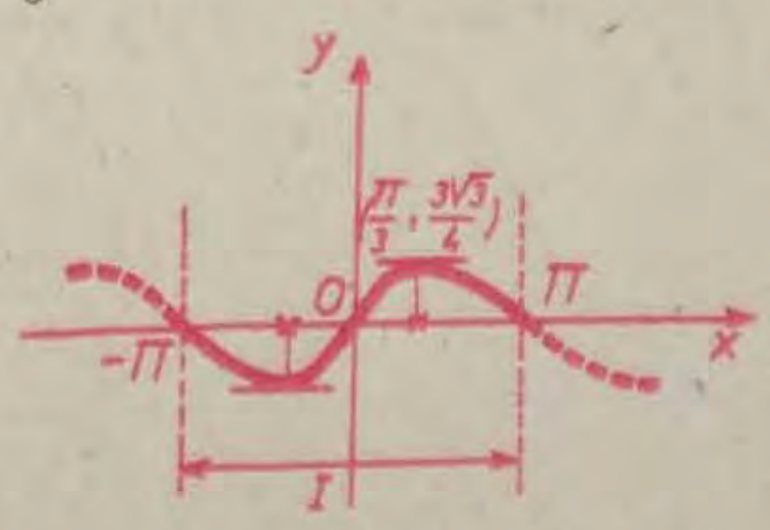


Fig. V.17

VI. Graficul (fig. V.17).

11) $\boxed{f(x) = \ln(1 + \sin x + |\sin x|)}$.

I. Aşadar, $f(x) = \begin{cases} \ln(1 + 2\sin x), & \text{dacă } \sin x > 0 \\ 0, & \text{dacă } \sin x \leqslant 0 \end{cases}$.

Domeniul maxim de definiţie este $D = \mathbf{R}$. Avem $f(0) = 0$, iar ecuaţia $f(x) = 0$ are ca soluţii toate punctele unde $\sin x \leqslant 0$.

II. Funcţia este periodică de perioadă principală 2π şi este suficient să fie studiată pe intervalul $I = [-\pi, \pi]$. Avem

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \in [-\pi, 0] \\ \ln(1 + 2\sin x), & \text{dacă } x \in (0, \pi], \ \forall x \in I \end{cases}$$

III. $\lim\limits_{\substack{x \to -\pi \\ x > -\pi}} f(x) = \ln 1 = 0$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 0$, $\lim\limits_{\substack{x \to \pi \\ x < \pi}} f(x) = \ln 1 = 0$.

Graficul nu admite asimptote.

IV. Avem $f'(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \in [-\pi, 0) \\ \dfrac{2\cos x}{1 + 2\sin x}, & \text{dacă } x \in (0, \pi] \end{cases}$.

În punctul $x = 0$, $f'_s(0) = 0$ şi $f'_d(0) = 2$, deci $x = 0$ este punct unghiular.

V. Tabloul de variaţie:

x	$-\pi$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$		0	0 | 2	$+$	0	$-$	-2
$f(x)$		0	0 | 0	$\nearrow$	$\ln 3$	$\searrow$	0

VI. Graficul (fig. V.18).

12) $\boxed{f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1 + x}{\sqrt{1 - x}}}$.

I. Domeniul maxim de definiţie este $D = (-\infty, 1)$. Apoi $f(0) = \operatorname{arctg} 1 = \dfrac{\pi}{4}$, iar ecuaţia $f(x) = 0$ are unica soluţie $x = -1$.

Fig. V.18

Deci intersecţiile cu axele sunt $A\left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$, $B(-1, 0)$.

II. Graficul nu admite simetrii. Apoi el este situat deasupra axei Ox, dacă şi numai dacă $f(x) \geqslant 0$, adică $\dfrac{1 + x}{\sqrt{1 - x}} \geqslant 0$, $-1 \leqslant x < 1$.

III. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} \frac{1+x}{\sqrt{1-x}} = \operatorname{arctg} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1+x}{\sqrt{1-x}} = \operatorname{arctg}(-\infty) =$
$= -\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = \operatorname{arctg}\infty = \frac{\pi}{2}$. Dreapta $x = 1$ nu este asimptotă verticală, iar dreapta $y = -\frac{\pi}{2}$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$.

IV. $$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{\sqrt{1-x}}\right)^2} \cdot \frac{\sqrt{1-x} + \frac{1+x}{2\sqrt{1-x}}}{1-x} = \frac{3-x}{2(x^2+x+2)\sqrt{1-x}},$$

pentru orice $x < 1$. Ecuația $f'(x) = 0$ nu are soluții (deoarece punctul $x = 3$ nu aparține lui D). Așadar, f' are semn constant pe D, anume $f' > 0$. Se observă, de asemenea, că $f'_s(1) = \lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f'(x) = \infty$.

V. Tabloul de variație:

x	$-\infty$		-1		0		1
$f'(x)$		$+$		$+$		$+$	∞
$f(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{4}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

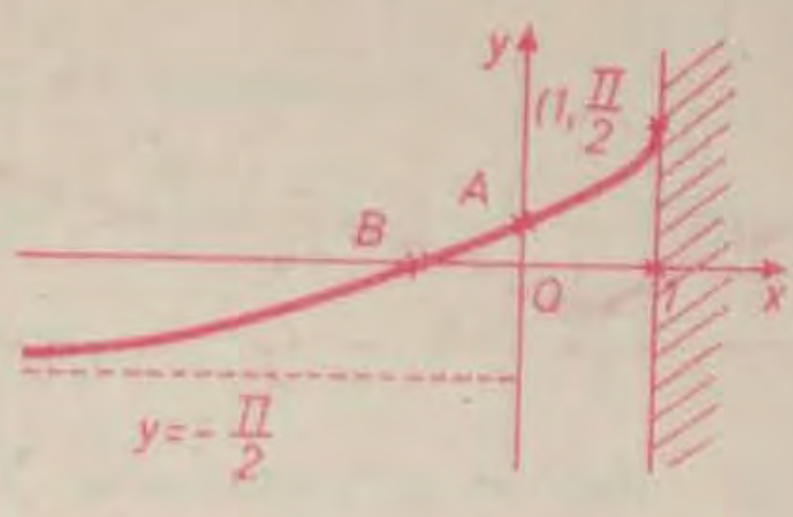


Fig. V.19

VI. Graficul este cel din figura V.19.

Ne oprim aici cu prezentarea exemplelor de reprezentări grafice. Vă recomandăm fiecăruia dintre voi nu numai înțelegerea acestor exemple, ci și rezolvarea a cât mai multor exerciții cu reprezentări grafice, până la obținerea unei experiențe suficiente care să vă permită să folosiți graficele ca un mijloc curent de ilustrare a variației unor mărimi sau a evoluției unor procese.

În unele aplicații se utilizează așa-numitele „grafice cu parametri". Fie $f : D \times P \to \mathbf{R}$ o funcție reală de două variabile reale; așadar, pentru orice $x \in D$, $k \in P$ este definit numărul real $f(x, k)$. Pentru fiecare k fixat, $k \in P$ este definită câte o funcție $D \to \mathbf{R}$, $x \mapsto f(x, k)$, al cărei grafic are ecuația $y = f(x, k)$. Se mai spune că avem o familie de funcții pe D, cu parametrul k.

Exemple

1) Fie $D = \mathbf{R}$, $P = [0, \infty)$ și $f : D \times P \to \mathbf{R}$, $f(x, k) = x^2 - k^2$. Aceasta reprezintă o familie de parabole (pentru fiecare k câte o parabolă, fig. V.20).

2) Trasăm graficul familiei de funcții $D = \mathbf{R}$, $P = \mathbf{R}$, $f : D \times P \to \mathbf{R}$, $f(x, k) = \frac{x^2+k}{x^2+1}$.

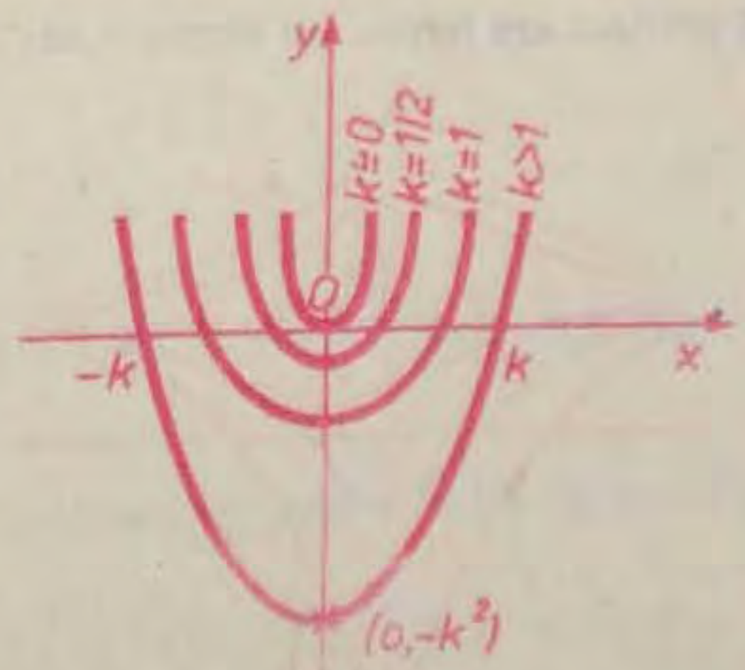


Fig. V.20

Presupunem mai întâi $k \geq 0$. Atunci graficul nu intersectează axa Ox. Pentru orice k, dreapta $y = 1$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ şi spre $+\infty$ şi nu avem asimptote verticale. Apoi

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+1) - 2x(x^2+k)}{(x^2+1)^2} = \frac{2(1-k)x}{(x^2+1)^2}, \ \forall\, x \in \mathbf{R},$$

deci derivata se anulează în origine.

Dacă $0 \leq k < 1$, atunci tabloul de variaţie este

x	$-\infty$		0		∞
$f'_x(x, k)$		$-$	0	$+$	
$f(x, k)$	1	$\searrow$	k	$\nearrow$	1

şi graficul corespunzător este indicat în figura V.21, *a*.

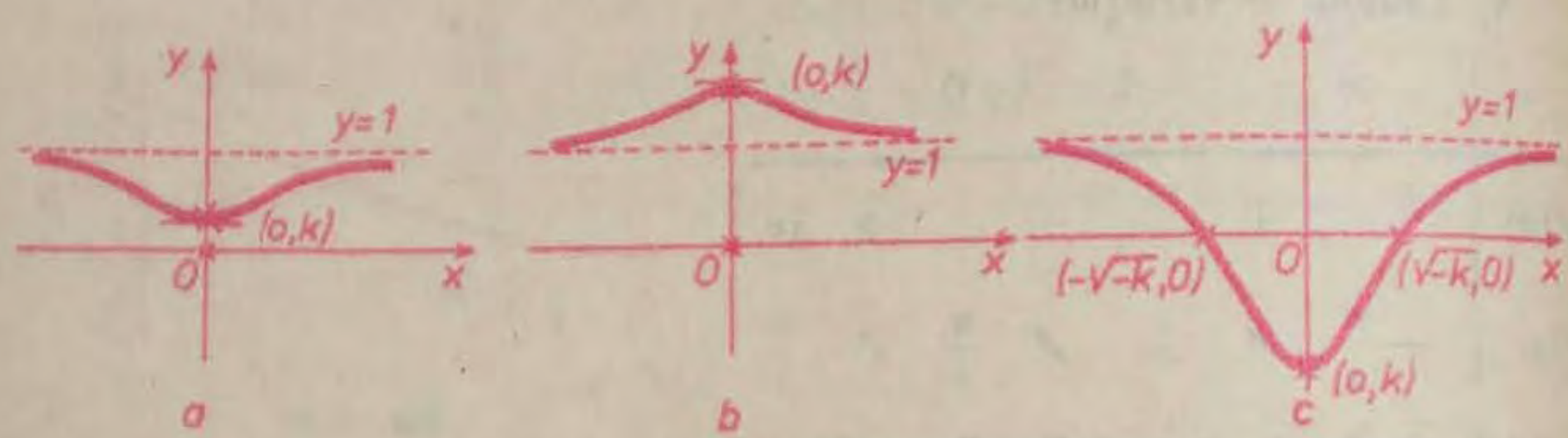


Fig. V.21

Dacă $k = 1$, atunci, de la început, $f(x, 1) = 1$, $\forall\, x$, adică graficul este dreapta $y = 1$.

Dacă $k > 1$, atunci tabloul de variaţie este

x	$-\infty$		0		∞
$f'_x(x, k)$		$+$	0	$-$	
$f(x, k)$	1	$\nearrow$	k	$\searrow$	1

şi graficul are forma din figura V.21, *b*.

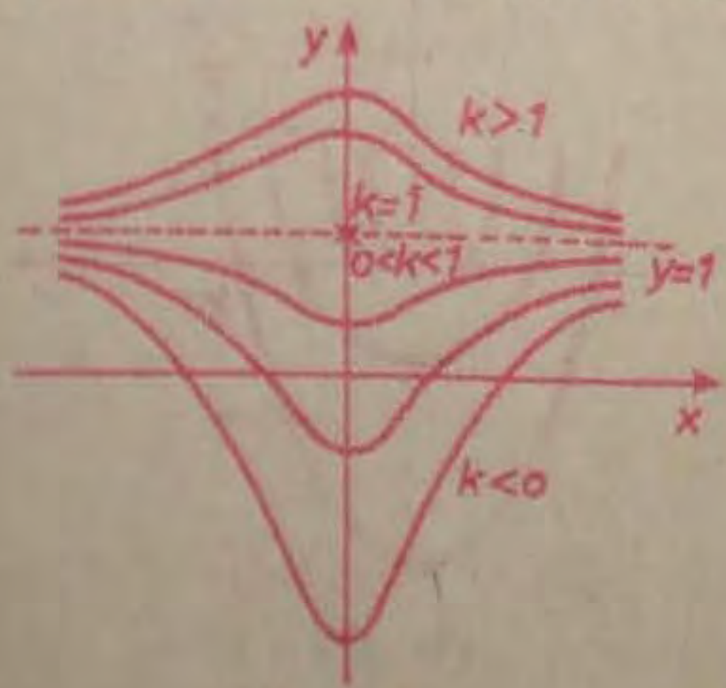


Fig. V.22

Presupunem acum $k < 0$. În acest caz graficul intersectează axa Ox în punctele $\pm\sqrt{-k}$. Tabloul de variaţie este

x	$-\infty$		$-\sqrt{-k}$		0		$\sqrt{-k}$		∞
$f'_x(x, k)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x, k)$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	k	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

şi graficul este de forma din figura V.21, *c*.

Întreaga discuţie poate fi rezumată în cadrul unui singur desen (fig. V.22).

În exemplele precedente am omis studiul derivatei a doua. Iată acum două exemple în care se folosește și derivata a doua.

13) $\boxed{f(x) = x^2 + \frac{8}{x}}$

I. Domeniul maxim de definiție este $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Graficul nu intersectează axa Oy. Ecuația $f(x) = 0$, adică $x^3 = -8$, are o unică soluție reală, anume $x = -\sqrt[3]{8} = -2$.

II. Graficul nu are simetrii. Apoi $f(x) \geqslant 0$ dacă și numai dacă $x \in (-\infty, -2] \cup [0, \infty)$.

III. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$. Dreapta $x = 0$ este o asimptotă verticală și nu există alte asimptote.

IV. Pentru orice $x \neq 0$, avem $f'(x) = 2x - \frac{8}{x^2} = \frac{2}{x^2}(x^3 - 4)$ și $f''(x) =$

$$= 2 + \frac{16}{x^3} = \frac{2(x^3 + 8)}{x^3} = \frac{2(x^3 - 2x + 4)}{x^4}(x + 2)x.$$

Ecuația $f'(x) = 0$ are unica soluție $x = \sqrt[3]{4}$, iar ecuația $f''(x) = 0$ are soluția $x = -2$. Semnul lui f'' este același cu semnul produsului $x(x + 2)$. Punctul $x = -2$ este punct de inflexiune.

V. Tabloul de variație:

x	$-\infty$		-2		0		$\sqrt[3]{4}$		∞
$f'(x)$		$-$	-6	$-$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$		$+$		$+$	
$f(x)$	∞	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ | ∞	$\searrow$	$6\sqrt[3]{2}$	$\nearrow$	∞

VI. Graficul (fig. V.23).

14) $\boxed{f(x) = e^{-x^2}}$.

I. Domeniul de definiție este $D = \mathbf{R}$; graficul intersectează axa Oy în punctul $A(0, 1)$.

II. Funcția f este pară și $f \geqslant 0$, deci graficul este simetric față de axa Oy și este situat deasupra axei Ox.

III. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = e^{-\infty} = 0$; $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = e^{-\infty} = 0$.

Graficul are asimptota orizontală $y = 0$ spre $+\infty$ și spre $-\infty$.

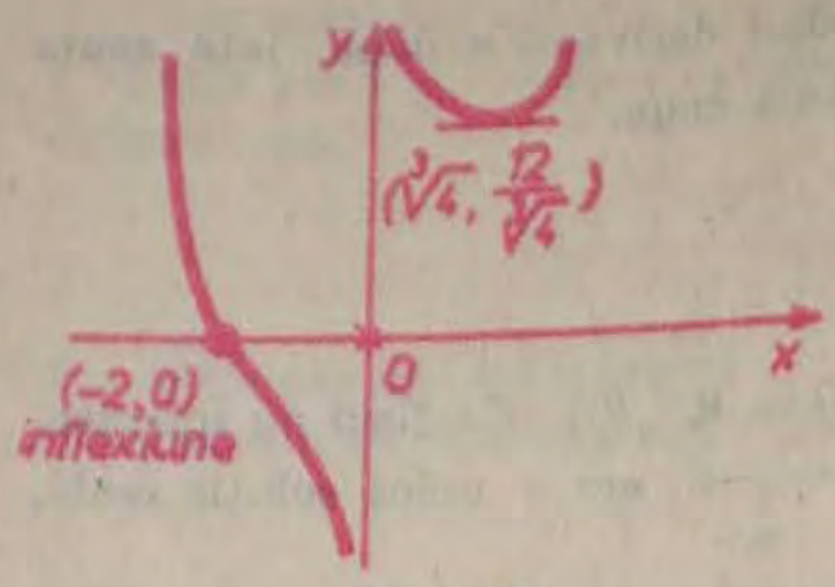


Fig. V.23

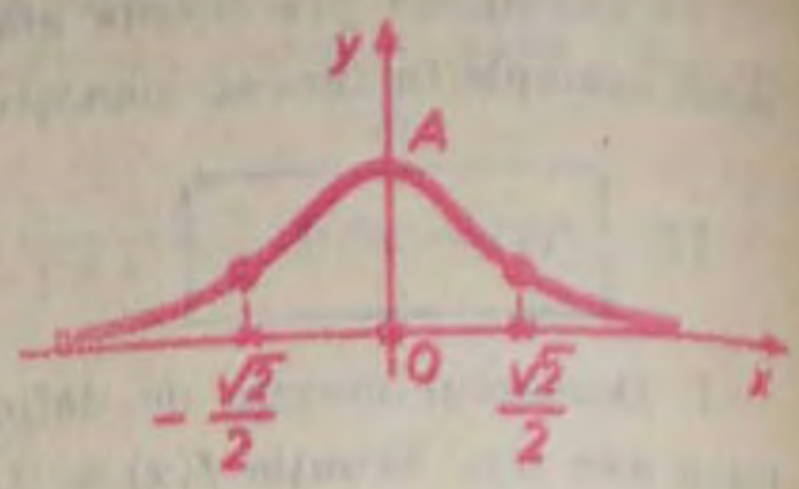


Fig. V.24

IV. $f'(x) = -2xe^{-x^2}$, $f''(x) = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$.

V. Tabloul de variaţie:

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		∞
$f'(x)$		$+$	$\sqrt{\frac{2}{e}}$	$+$	0	$-$	$-\sqrt{\frac{2}{e}}$	$-$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\searrow$	0
		$\smile$		$\frown$		$\frown$		$\smile$	

VI. Graficul corespunzător are forma celui din figura V.24.
Acest grafic poartă numele de *clopotul lui K.F. Gauss* (1777—1865).

EXERCIŢII (capitolul V, § 3)

1. Să se reprezinte grafic următoarele funcţii polinomiale (folosind numai derivata întâi):

a) $f(x) = -x^2 + 3x^2$;
b) $f(x) = 3x^3 - 27$;
c) $f(x) = x^4 - 8x^2$;
d) $f(x) = x^5 - 5x^4$;
e) $f(x) = x^2 - 3x + 2$;
f) $f(x) = x^2(x+1)^2$;
g) $f(x) = (1 - x^2)(1 - x^2)$;
h) $f(x) = x^n - nx$ ($n \geq 1$ natural).

2. Să se reprezinte grafic următoarele funcţii raţionale:

a) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$;
b) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$;
c) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2}$;
d) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^4}$;
e) $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)^2}$;
f) $f(x) = \dfrac{x^2-16}{x}$;
g) $f(x) = \dfrac{7x^2+20x}{x^2+2x-3}$;
h) $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$;
i) $f(x) = \dfrac{x}{4-x^2}$;
j) $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x^2}$;
k) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$;
l) $f(x) = \dfrac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$.

3. Să se reprezinte grafic următoarele funcţii:

a) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$;

b) $f(x) = \frac{|x|}{x+1}$;

c) $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$;

d) $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$;

e) $f(x) = x\sqrt{\frac{x+1}{x+4}}$;

f) $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$;

g) $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$;

h) $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$;

i) $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$;

j) $f(x) = \sqrt[3]{x^3-3x+2}$;

k) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x-1}, & \text{dacă } x < 1; \\ x, & \text{dacă } x \geq 1; \end{cases}$

l) $f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & \text{dacă } x \leq 0; \\ \frac{1}{x^2}, & \text{dacă } x > 0; \end{cases}$

m) $f(x) = 2 + \sqrt[3]{(x-1)^2}$;

n) $f(x) = x + 2\sqrt{-x}$.

4. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^3+3x^2-4}$. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - x]$, să se arate că $\forall x \in \mathbf{R}\setminus(-2, 1)$ avem $xf(x)f'(x) \geq 0$ şi să se traseze graficul lui f.

5. Să se reprezinte grafic următoarele funcţii:

a) $f(x) = e^x - 1$;

b) $f(x) = e^x - x$;

c) $f(x) = xe^{-\frac{1}{x}}$;

d) $f(x) = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$;

e) $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$;

f) $f(x) = \ln\frac{1+x}{1-x}$;

g) $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$;

h) $f(x) = (x^2+x)e^{-x}$;

i) $f(x) = |\ln x + x|$;

j) $f(x) = \frac{\ln|x|}{1+\ln|x|}$;

k) $f(x) = \ln(4-x^2)$;

l) $f(x) = \ln\sqrt{1+x^2} - \operatorname{arctg} x$.

6. Să se reprezinte grafic următoarele funcţii:

a) $f(x) = 3\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$;

b) $f(x) = \frac{1}{2+\sin x}$;

c) $f(x) = \sin x - \cos x$;

d) $f(x) = \ln(2 + \sin x)$;

e) $f(x) = x + \sin x$;

f) $f(x) = 2x - \cos 2x$;

g) $f(x) = x + 2 \operatorname{arctg} x$;

h) $f(x) = 2 \arcsin \frac{1}{x} - \arccos \frac{1}{x}$;

i) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$;

j) $f(x) = x + \ln (\cos x)$.

7. Să se reprezinte grafic următoarele funcţii: $f : D \to \mathbf{R}$ (D fiind domeniul maxim de definiţie), folosind şi derivata a doua:

a) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$;

b) $f(x) = xe^{-x^2}$;

c) $f(x) = \frac{x}{x + 1}$;

d) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x - 1}$;

e) $f(x) = \sin x - \cos x$;

f) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$;

g) $f(x) = \sin x \cdot \cos^2 x$;

h) $f(x) = (x - 1)^2(x + 2)$;

i) $f(x) = \ln \frac{x + 1}{x - 2}$;

j) $f(x) = \operatorname{tg} x - x$.

8. Se consideră funcţia $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + ax + a}$, a fiind un parametru real, $a > 0$. Să se determine a astfel încât graficul lui f să aibă o singură asimptotă verticală şi să se reprezinte apoi graficul funcţiei f pentru a astfel găsit.

9. Se consideră funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x + k}{\sqrt{x}}$, k fiind un parametru real. Să se determine parametrul k astfel încât $f'(1) = -1$ şi apoi să se reprezinte grafic funcţia f.

10. Să se reprezinte graficele funcţiilor următoare ce depind de parametri:

a) $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x + k}{x}$, $k > 0$;

b) $f : [-k, k] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{k^3 - x^3}$, $1 \leq k \leq 2$;

c) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = (x + 2)e^{kx}$, $k \in \mathbf{R}$.

§ 4. Probleme de maxim şi minim ; optimizări

Acest paragraf cuprinde aplicaţii directe ale rezultatelor teoretice anterioare privind determinarea punctelor de extrem ale unor funcţii reale de o variabilă reală. În acelaşi timp, avem aici un prilej deosebit de a exemplifica forţa metodelor analizei matematice în rezolvarea unor probleme de mode-

lare a realității fizice. Citându-l pe matematicianul și pedagogul G. Polya, „problemele de maxim și minim idealizează o inclinație a naturii și a noastră înșine de a obține efecte optime cu eforturi minime".

1) *Dintre toate numerele reale $x > 0$, să se determine cel pentru care diferența $x - x^3$ este maximă.*

Soluție. Notăm $f(x) = x - x^3$. Trebuie să determinăm maximul lui f pe intervalul $(0, \infty)$. Aplicând teorema lui Fermat, rezolvăm mai întâi ecuația $f'(x) = 0$, adică $1 - 3x^2 = 0$. Se obține soluția $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Din tabloul de variație

x	0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	$-\infty$

rezultă că punctul $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ este un punct de maxim pentru funcția f și totodată soluția problemei puse.

(Se putea observa și direct că $f''(x) = -6x$, deci că $f''(x_0) < 0$, adică x_0 este punct de maxim cf. teoremei V.6).

2) *Să se determine extremele locale și extremele globale ale funcției $f(x) = 2x + \cos 2x$ pe intervalul $I = [-2, 1]$.*

Soluție. Avem $f'(x) = 2 - 2\sin 2x$, $x \in \mathbf{R}$. Punctele critice ale lui f sunt date de ecuația $f'(x) = 0$, deci $\sin 2x = 1$, $2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbf{Z})$. Tabloul de variație a lui f pe intervalul I este

x	-2		$\frac{\pi}{4}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-4 + \cos 4$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$2 + \cos 2$

Funcția f nu are extreme locale în I, deoarece f este monoton crescătoare pe I; rezultă $\inf_{x \in I} f(x) = f(-2) = -4 + \cos 4$ și $\sup_{x \in I} f(x) = f(1) = 2 + \cos 2$.

3) *Presupunem că puterea $P(t)$ emisă la descărcarea unui dispozitiv electronic la fiecare moment $t > 0$ este $P(t) = t^3 \cdot e^{-0,2t}$ (puterea fiind măsurată în wați și timpul în secunde). Să se afle:*

a) *la ce moment puterea va fi maximă;*

b) *între ce limite (margini) variază puterea $P(t)$ în intervalul de timp $t \in [10, 20]$*

Soluție. a) $P'(t) = 3t^2 \cdot e^{-0,2t} - 0,2t^3 \cdot e^{-0,2t} = t^2 \cdot e^{-\frac{1}{5}t}\left(3 - \frac{t}{5}\right)$; ecuația $P'(t) = 0$ are soluțiile $t = 0$, $t = 15$. Tabloul de variație al funcției P este

t	0		15		∞
$P'(t)$		+	0	−	
$P(t)$	0	↗	$\left(\frac{15}{e}\right)^3$	↘	0

Așadar, după 15 secunde puterea respectivă va fi maximă.

b) Notăm $I = [10, 20]$. Atunci $\sup\limits_{t \in I} P(t) = P(15) = \left(\frac{15}{e}\right)^3$ și $\inf\limits_{t \in I} P(t) = \min(P(10), P(20)) = \min\left(\frac{10^3}{e^2}, \frac{20^3}{e^4}\right) = \frac{10^3}{e^2}$.

Așadar $\frac{10^3}{e^3} \leqslant P(t) \leqslant \frac{15^3}{e^3}$ pentru orice $t \in [10, 20]$.

Observație. În toate problemele precedente s-au cerut extremele unor funcții date. Pentru determinarea acestora s-a folosit teorema lui Fermat, împreună cu o parte din tabloul de variație (pentru precizarea extremelor).

Există situații unde în enunțul problemei nu apare explicit o funcție ale cărei extreme se cer determinate. În cele ce urmează, tocmai astfel de probleme vor fi analizate. Există aici o anumită libertate în alegerea variabilei și în exprimarea explicită a funcției care se cere extremată; de aceea este necesară obținerea unei oarecari îndemânări din partea rezolvitorului.

4) Putem da, în sfârșit, *soluția completă la problema pusă la începutul acestui manual* (pagina 4). Anume, în condițiile indicate, am văzut că volumul cisternei era

$$V(x) = \frac{1}{6}(3Ax - 4\pi x^3), \quad x > 0,$$

A fiind o constantă pozitivă. Trebuie aflat maximul funcției V pe intervalul $(0, \infty)$.

Dar $V'(x) = \frac{1}{6}(3A - 12\pi x^2)$, deci ecuația $V'(x) = 0$, adică $4\pi x^2 = A$, are soluția $x_0 = \sqrt{\frac{A}{4\pi}}$; apoi $V''(x_0) = -4\pi x_0 < 0$, deci x_0 este punct de maxim. În acest caz înălțimea cilindrului este $h = \frac{A - 4\pi x_0^2}{2\pi x_0} = 0$ și iată răspunsul la problema pusă: cisterna de forma considerată (fig. I.1) are volum maxim în cazul când ea este sferică (fără cilindru).

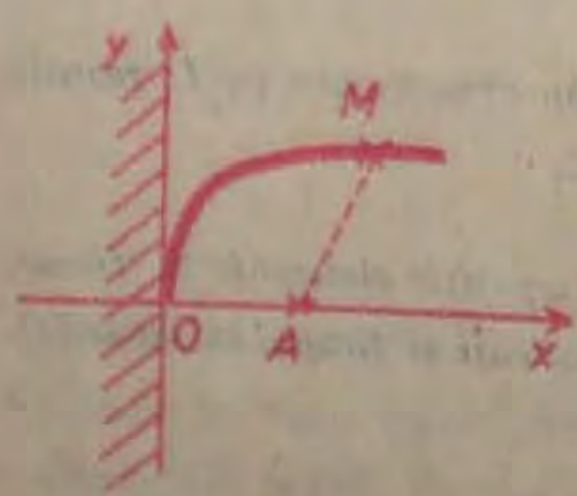


Fig. V.25

5) *Să se determine punctul de pe graficul funcției $f(x) = 2\sqrt{x}$ aflat la distanța minimă de punctul $A(2, 0)$* (fig. V.25).

Soluție. Orice punct de pe grafic are coordonatele $M(t, 2\sqrt{t})$, $t \geqslant 0$. Notăm cu $\varphi(t)$ distanța dintre punctele A și M, deci $\varphi(t) = \sqrt{(t-2)^2 + (2\sqrt{t} - 0)^2} = \sqrt{t^2 + 4}$ și minimul lui φ este atins pentru $t = 0$

6) *Se consideră o emisferă de centru O și rază R. Dintre conurile circulare drepte circumscrise emisferei și având centrul bazei în O, să se determine conul de volum minim* (fig. V.26).

Fig. V.26

Soluție. Notăm cu $2x$ măsura unghiului $\widehat{AVB}$. Atunci $OV = \frac{R}{\sin x}$, $OB = \frac{R}{\cos x}$ și volumul conului va fi $W = \frac{\pi \cdot OB^2 \cdot OV}{3} = \frac{\pi R^3}{3} \cdot \frac{1}{\sin x \cdot \cos^2 x}$.

Condiția geometrică impune $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Determinăm minimul funcției $W(x) = \frac{\pi R^3}{3} \cdot \frac{1}{\sin x \cdot \cos^2 x}$ pentru $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Dar $W'(x) = \frac{\pi R^3}{3} \cdot \left(-\frac{\cos^3 x - 2\sin^2 x \cdot \cos x}{\sin^2 x \cos^4 x}\right) = \frac{\pi R^3}{3} \cdot \frac{2\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}$; ecuația $W'(x) = 0$ are soluțiile date de $2\sin^2 x - \cos^2 x = 0$, deci $\operatorname{tg} x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. Se reține soluția $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\operatorname{tg} x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, adică $x_0 = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2}$; în acest caz $W''(x_0) > 0$, deci x_0 este punct de minim.

7) *Un camion trebuie să parcurgă 100 km cu o viteză constantă de v km/h (cu condiția $40 \leq v \leq 70$), consumând $\left(8 + \frac{v^2}{300}\right)$ litri/h de benzină. Care este viteza optimă dacă șoferul este retribuit cu 1 500 lei/h, iar benzina costă 600 lei litrul?*

Soluție. Timpul total al parcursului este $\frac{100}{v}$ ore și consumul de benzină va fi $\left(8 + \frac{v^2}{300}\right) \cdot \frac{100}{v} = \frac{v^2 + 2\,400}{3v}$ litri. Atunci costul pentru întregul parcurs va fi $C(v) = 1\,500 \cdot \frac{100}{v} + 600 \cdot \frac{v^2 + 2\,400}{3v} = \frac{200v^2 + 630\,000}{v}$.

Viteza optimă este cea pentru care acest cost este minim.

Avem $C'(v) = \frac{200v^2 - 630\,000}{v^2}$, deci $v_{optim} = \sqrt{3\,150} = 15\sqrt{14} \simeq 56{,}125$ (km/h).

8) *Fie o dreaptă (D) care împarte un plan în două regiuni R_1, R_2* (figura V.27). *Fie A un punct fixat în regiunea R_1 și B un punct fixat în R_2. Ne propunem ca dintre toate punctele M situate pe (D) să determinăm pe cel pentru care expresia $\frac{AM}{v_1} + \frac{MB}{v_2}$ (v_1, v_2 fiind numere strict pozitive date) să fie minimă.*

Alegem axele ca în figura V.27 și notăm cu x abscisa punctului M (am presupus $b \geq 0$). Atunci avem $OM = |x|$, $MB_1 = |b - x|$ și expresia dată este de forma

$$g(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(b - x)^2 + c^2}}{v_2}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Condiția necesară de minim pentru funcția g este $g'(x) = 0$, adică

$$(*) \quad \frac{x}{v_1\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{b - x}{v_2\sqrt{(b - x)^2 + c^2}} = 0,$$

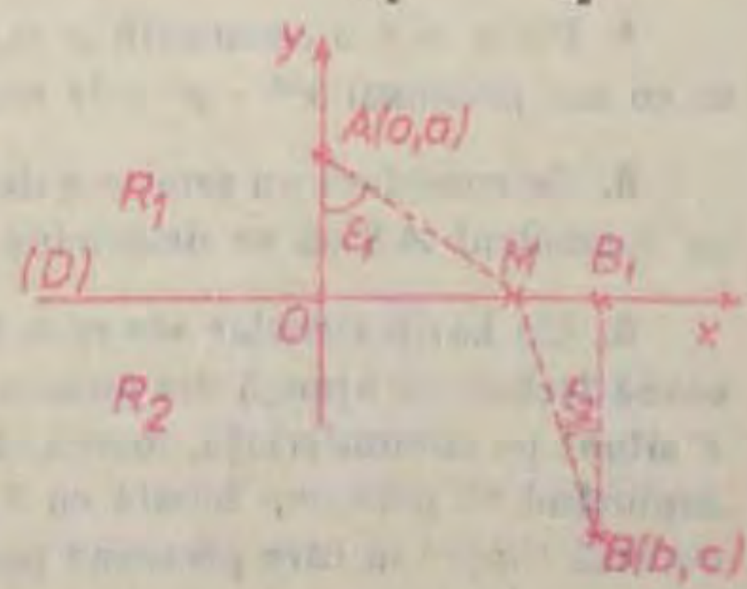


Fig. V.27

de unde se află x. Un calcul ușor arată că în acest punct avem $g'(x) > 0$. Condiția (*) se scrie, în mod echivalent,

$$\frac{\sin \varepsilon_1}{v_1} = \frac{\sin \varepsilon_2}{v_2}.$$

Acest exemplu a jucat un rol important din punct de vedere istoric și are o interpretare fizică remarcabilă.

Presupunem că R_1 și R_2 reprezintă două medii omogene și că lumina se propagă rectilniu cu viteza v_1 în R_1, respectiv v_2 în R_2. Fie, ca mai sus, A un punct fixat în regiunea R_1 și B un punct fixat în regiunea R_2. Ne propunem să determinăm punctul M_0 situat pe (D) prin care trece o rază de lumină plecând din A și care se propagă până în punctul B, știind că, în conformitate cu *principiul lui Fermat*, o rază de lumină se propagă pe acea traiectorie pe care o parcurge în timpul cel mai scurt. Timpul necesar luminii pentru a parcurge sgmentul AM (respectiv MB) va fi $\frac{AM}{v_1}$ $\left(\text{respectiv } \frac{MB}{v_2}\right)$ și timpul minim necesar pentru a ajunge din A în B se determină ca mai sus. Notând cu ε_1 (respectiv ε_2) unghiurile făcute de razele de lumină AM_0 (respectiv M_0B) cu normala la (D) în M_0 (fig. V.28), relația $\frac{\sin \varepsilon_1}{\sin \varepsilon_2} = \frac{v_1}{v_2}$ demonstrată anterior este tocmai legea refracției, demonstrată deci pe baza principiului lui Fermat.

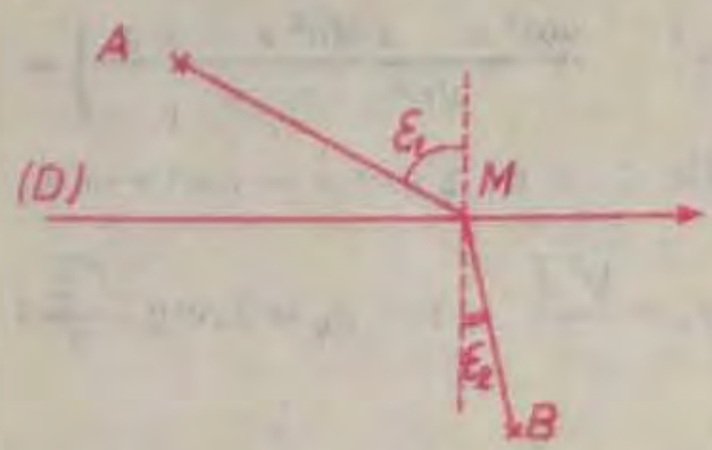


Fig. V.28

EXERCIȚII (capitolul V, § 4)

1. Să se afle $x > 0$ astfel încât suma $x + \frac{1}{x}$ să fie minimă.

2. Să se determine extremele absolute ale funcției $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ pe fiecare din intervalele $I_1 = [-2, 3]$, $I_2 = [0{,}9; 1{,}1]$, $I_3 = [1, \infty)$.

3. Costul fabricării pe zi a n unități dintr-un produs este $C(n) = 10\,000 + 30n - 0{,}001\,n^3$. Să se afle pentru ce n acest cost este maxim (presupunând funcția $n \mapsto C(n)$ prelungită prin formula precedentă la întreg intervalul $(1, \infty)$).

4. Fie $a > 0$ o constantă și $m, n \in \mathbf{N}$. Dacă x și y sunt strict pozitive și $x + y = a$, în ce caz produsul $x^m \cdot y^n$ este maxim?

5. Se consideră un semicerc de diametru $AB = 2R$. Dintre toate coardele PQ paralele cu diametrul AB să se determine cea pentru care aria trapezului $APQB$ este maximă.

6. Un bazin circular are raza 100 m și fie A, B două puncte diametral opuse. O persoană trebuie să ajungă din punctul A în punctul B, cu condiția să treacă printr-un punct P situat pe circumferință, mergând înot pe coarda AP și apoi alergând pe arcul PB. Presupunând că persoana înoată cu 3 km/h și aleargă cu 12 km/h, să se afle între ce limite variază timpul în care persoana poate să ajungă din A în B.

7. Se consideră un con circular drept cu raza bazei R și înălțimea I. Să se înscrie în con un cilindru: a) având volumul maxim; b) având aria laterală maximă.

§ 5. Aplicații ale analizei matematice la studiul ecuațiilor

5.1. Rezolvarea grafică a unor ecuații

Dacă $f, g : D \to \mathbf{R}$ sunt două funcții, a rezolva grafic ecuația $f(x) = g(x)$ revine la a determina abscisele punctelor de intersecție ale graficelor funcțiilor f și g (fig. V.29).

În aplicarea acestei metode, se recomandă ca graficele să fie trasate cu cât mai mare precizie (pe hârtie milimetrică, alegând puncte suplimentare pe grafice etc.).

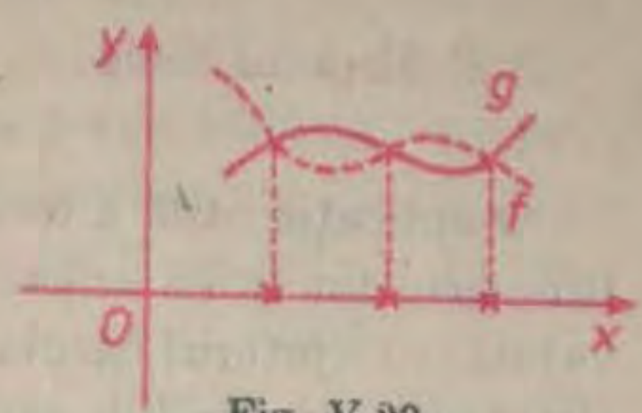


Fig. V.29

Să considerăm acum o ecuație de forma $m = \varphi(x)$, unde m este un parametru real și φ o funcție având graficul (C). A rezolva grafic această ecuație revine la a intersecta graficul (C) cu drepte $y = m$, $m \in \mathbf{R}$, paralele cu axa Ox. Pentru valorile lui m, pentru care nu există astfel de puncte de intersecție, ecuația $\varphi(x) = m$ nu admite soluții reale.

Exemple

1) Rezolvăm grafic ecuația $3^x - 3x = 0$. Ecuația se scrie $3^x = 3x$ și soluțiile ei sunt tocmai abscisele ξ și ξ' ale punctelor de intersecție ale graficelor $y = 3^x$, $y = 3x$ (fig. V.30).

2) Discutăm numărul de soluții reale ale ecuației $x^3 - mx^2 + 1 = 0$, după valorile parametrului real m. Deoarece $x = 0$ nu este soluție, ecuația se scrie echivalent $m = \frac{x^3 + 1}{x^2}$. Trasăm graficul funcției $\varphi(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2}$. Domeniul de definiție este $\mathbf{R} \setminus \{0\}$, $x = 0$ este asimptotă verticală, iar $y = x$ este asimptotă oblică. Apoi $\varphi'(x) = \frac{x^4 - 2x}{x^4} = \frac{x^3 - 2}{x^3}$ și tabloul de variație este

x	$-\infty$		0		$\sqrt[3]{2}$		∞
$\varphi'(x)$		$+$	|	$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	∞ | ∞	$\searrow$	$\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$	$\nearrow$	∞

Graficul lui φ este trasat în figura V.31.

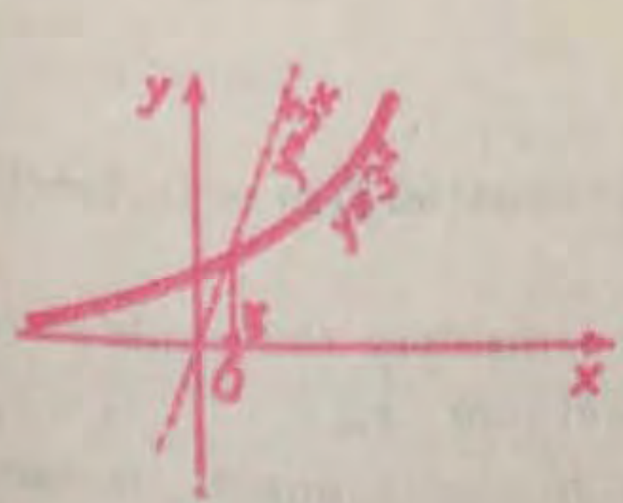


Fig. V.30

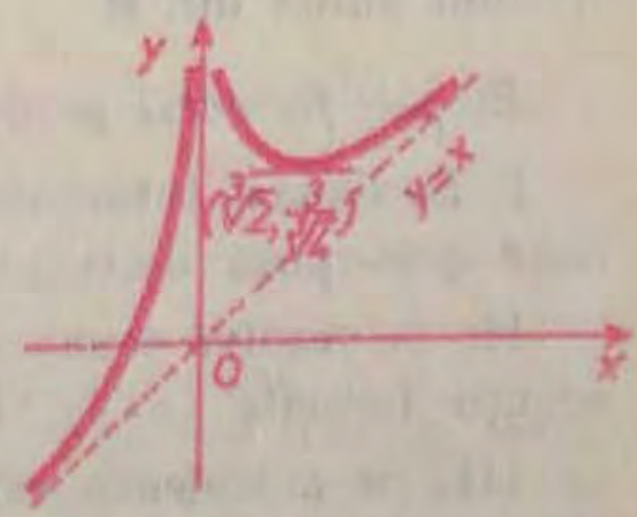


Fig. V.31

Dacă $m < \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$, atunci ecuația are o singură rădăcină reală (și negativă), deoarece în acest caz dreapta $y = m$ intersectează graficul într-un singur punct de abscisă $x_1 < 0$.

Dacă $m = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$, atunci $x_{2,3} = \sqrt[3]{2}$ este rădăcină dublă și ecuația are încă o rădăcină $x_1 < 0$.

Dacă $m > \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$, atunci ecuația dată are trei rădăcini reale ($x_1 < 0$, $0 < x_2 < \sqrt[3]{2}$, $x_3 > \sqrt[3]{2}$).

5.2. Șirul lui Rolle

O aplicație utilă a teoremelor lui Rolle (IV.9) și Darboux (III.6) o constituie șirul lui Rolle asociat unei ecuații de forma $f(x) = 0$ cu f funcție derivabilă, cu ajutorul căruia se poate decide numărul rădăcinilor reale ale ecuației, indicându-se totodată intervalele unde se află aceste rădăcini. De fapt, cu ajutorul șirului lui Rolle căpătăm informații despre „liniile de nivel" ale lui f, adică mulțimile de puncte unde f ia valori fixate $\{x \mid f(x) = a\}$, $a \in \mathbf{R}$. Studiul lui f poate fi restrâns la un interval.

Stabilim mai întâi o consecință simplă a teoremei lui Rolle, anume:

TEOREMA V.9. Fie $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție derivabilă pe un interval I. Dacă $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ sunt două rădăcini consecutive ale lui f' (adică $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$ și între x_1 și x_2 nu există alte rădăcini ale lui f'), atunci în intervalul (x_1, x_2) există cel mult o rădăcină a ecuației $f(x) = 0$.

Demonstrație. Raționăm prin reducere la absurd. Dacă în intervalul (x_1, x_2) ar exista cel puțin două rădăcini $\xi < \eta$ ale ecuației $f(x) = 0$, atunci aplicând teorema lui Rolle pentru intervalul $[\xi, \eta]$, ar rezulta că există $u \in (\xi, \eta)$ astfel încât $f'(u) = 0$. Atunci $x_1 < u < x_2$, și x_1, x_2 nu ar mai fi rădăcini consecutive ale lui f'.

Cu aceeași demonstrație se arată că dacă x_m (respectiv x_M) este cea mai mică (respectiv cea mai mare) rădăcină a lui f' în intervalul I, atunci la stânga lui x_m (respectiv la dreapta lui x_M) există cel mult o rădăcină a lui f.

Observație. Se mai spune pe scurt că zerourile derivatei separă zerourile funcției (termenii de rădăcină și zerou sunt aici sinonimi).

Facem ipoteza suplimentară că rădăcinile lui f' nu se acumulează în jurul vreunui punct din $\mathbf{R}$.

Etapele formării șirului lui Rolle

I. Se fixează intervalul de studiu I al ecuației $f(x) = 0$, funcția $f : I \to \mathbf{R}$ fiind presupusă derivabilă.

II. Se rezolvă ecuația $f'(x) = 0$ și se consideră rădăcinile reale ale acestei ecuații (situate în I), în ordine crescătoare $x_m < \ldots < x_1 < x_2 < \ldots < x_M$.

III. Se calculează valorile funcției f în aceste puncte, la care se adaugă limitele lui f, notate α și β, la capetele din stânga și respectiv din dreapta,

ale intervalului I. Se obține un șir de valori asociat funcției f (sau echivalent, ecuației $f(x) = 0$), anume

$$\alpha, f(x_m), \ldots, f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_M), \beta.$$

IV. Datele anterioare pot fi organizate într-un tablou cu rubrici pentru x, $f'(x)$, $f(x)$. Șirul lui Rolle este șirul semnelor acestor valori (putând apărea valoarea 0) în ordinea indicată la etapa a III-a. Concluzia rezultă astfel:

a) Dacă în șirul lui Rolle apar două semne alăturate identice, de exemplu $f(x_1) \cdot f(x_2) > 0$, atunci în intervalul (x_1, x_2) nu există rădăcini reale ale ecuației $f(x) = 0$. Într-adevăr, două sau mai multe astfel de rădăcini nu pot exista conform teoremei V.9 (x_1, x_2 fiind zerouri consecutive ale lui f'). Iar dacă ar exista exact o rădăcină $\xi \in (x_1, x_2)$, atunci, cum $f(x_1) \cdot f(x_2) > 0$, în mod necesar ξ este punct de extrem pentru f, adică $f'(\xi) = 0$, absurd.

b) Dacă în șirul lui Rolle apar două semne alăturate diferite, de exemplu $f(x_1) < 0$, $f(x_2) > 0$, atunci, conform teoremei lui Darboux și respectiv teoremei V.9, f are cel puțin (respectiv cel mult) o rădăcină în intervalul (x_1, x_2), deci ecuația $f(x) = 0$ are exact o rădăcină în intervalul (x_1, x_2).

c) Dacă în șirul lui Rolle apare 0 (de exemplu $f(x_k) = 0$, sau $f(x_{k+1}) = 0$), atunci x_k sau x_{k+1} este o rădăcină multiplă a ecuației $f(x) = 0$ și în intervalul (x_k, x_{k+1}) nu va exista altă rădăcină a acestei ecuații.

Prin *rădăcină multiplă* $x_0 \in \mathbf{R}$ a unei funcții derivabile în x_0 înțelegem un număr x_0 astfel încât $f(x_0) = f'(x_0) = 0$. Dacă f este polinomială, aceasta revine la $f(x) : (x - x_0)^2$.

În acest mod, numărând schimbările de semn și zerourile se determină numărul de rădăcini reale (fără a determina ordinele de multiplicitate ale acestora) ale ecuației considerate și, totodată, intervale în care aceste rădăcini sunt situate.

Exemple

1) Determinăm numărul rădăcinilor reale ale ecuației $x^3 + 3x^2 - 9 = 0$. Parcurgem sistematic etapele anterioare.

I. Intervalul de studiu este $I = (-\infty, \infty)$; notăm $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9$.

II. Ecuația $f'(x) = 0$ este $3x^2 + 6x = 0$ și are rădăcinile $x_1 = -2$, $x_2 = 0$.

III. $\alpha = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 + 3x^2 - 9) = -\infty$, $f(-2) = -8 + 12 - 9 = -5$, $f(0) = -9$, $\beta = \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

IV. Considerăm tabloul

x	$-\infty$	-2	0	∞
$f'(x)$		0	0	
$f(x)$	$-\infty$	-5	-9	∞

Șirul lui Rolle este șirul semnelor valorilor cuprinse în ultima rubrică, anume $-, -, -, +$. Există o singură schimbare de semn, deci ecuația inițială are o singură rădăcină reală, situată în intervalul $(0, \infty)$. Acest interval corespunde în prima rubrică schimbării de semn din șirul lui Rolle.

2) Ne propunem să determinăm numărul de rădăcini reale ale ecuației $2x^5 - 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 - 40x + 1 = 0$. Notând $f(x) = 2x^5 - 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 - 40x + 1$, $I = \mathbf{R}$, avem $f'(x) = 10x^4 - 20x^3 + 30x^2 + 20x - 40 = 10(x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 2x - 4) = 10[x^4 - x^3 - 2(x^3 - x) + 4(x^2 - 1)] = 10[x^3(x^2 - 1) - 2x(x^2 - 1) + 4(x^2 - 1)] = 10(x^2 - 1)(x^2 - 2x + 4)$, $\forall x \in I$. Rădăcinile reale ale ecuației $f'(x) = 0$ sunt $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Tabloul asociat este următorul:

x	$-\infty$		-1		1		∞
$f'(x)$			0		0		
$f(x)$	$-\infty$		$f(-1) = 34 > 0$		$f(1) = -22 < 0$		∞

iar șirul lui Rolle este $-, +, -, +$. Așadar, ecuația considerată are trei rădăcini reale, situate respectiv în intervalele $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, \infty)$.

3) Considerăm acum ecuația $x^2 - 2\ln x + m = 0$, unde m este un parametru real. În acest caz, luăm $I = (0, \infty)$ și notăm $f(x) = x^2 - 2\ln x + m$. Ecuația $f'(x) = 0$, adică $2x - \frac{2}{x} = 0$, are în I soluția $x = 1$. Deoarece $\alpha = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (x^2 - 2\ln x + m) = 0 - 2\ln 0 + m = \infty$ și $\beta = \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} x^2\left(1 + \frac{m - 2\ln x}{x^2}\right) = \infty \cdot 1 = \infty$, tabloul asociat este

x	0		1		∞
$f'(x)$			0		
$f(x)$	∞		$m + 1$		∞

Dacă $m + 1 > 0$, atunci șirul lui Rolle este $(+, +, +)$ și nu există nici o schimbare de semn, deci ecuația nu are soluții reale. Dacă $m = -1$ șirul lui Rolle este $(+, 0, +)$, deci $x = 1$ este rădăcină multiplă, iar dacă $m < -1$, atunci șirul lui Rolle este $+, -, +$ și, ca atare, ecuația are două rădăcini reale, situate în intervalele $(0, 1)$ și respectiv $(1, \infty)$.

Observație. Metoda șirului lui Rolle se bazează pe posibilitatea rezolvării efective a ecuației $f'(x) = 0$, ceea ce limitează aplicarea ei. De asemenea, metoda grafică are și ea anumite limite de aplicabilitate și nu se pot da indicații generale asupra utilizării uneia sau alteia din cele două metode. Numai prin exercițiu veți putea căpăta singuri priceperea de a decide care metodă trebuie aplicată de la caz la caz.

5.3. Obținerea unor inegalități

Rezultatele teoretice ale analizei permit obținerea unor inegalități care cu ajutorul metodelor elementare ar fi fost greu de probat. Demonstrăm mai întâi un rezultat general.

TEOREMA V.10. **Dacă f și g sunt funcții derivabile pe un interval $I = [x_0, \infty)$ astfel încât $f(x_0) = g(x_0)$ și $f'(x) \geq g'(x)$ pentru orice $x \in I$, atunci $f(x) \geq g(x)$, pentru orice $x \in I$ (rezultate similare au loc și pentru alte tipuri de intervale).**

Demonstrație. Intuitiv situația este destul de clară: graficele lui f și g pornesc din același punct, iar coeficientul unghiular al tangentei în graficul lui f este mai mare și, ca atare, $f \geqslant g$. Este însă necesar un raționament. Notăm $h = f - g$. Așadar, $h(x_0) = 0$, $h'(x) \geqslant 0$ pentru orice $x \geqslant x_0$. Atunci funcția h este monoton crescătoare pe intervalul I (conform teoremei V.2) și, în particular, $h(x) \geqslant h(x_0) = 0$ pentru orice $x \geqslant x_0$, deci $f(x) \geqslant g(x)$ pentru orice $x \geqslant x_0$.

Exemple

1) Arătăm că pentru orice $x > 0$ au loc inegalitățile

$$\frac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x.$$

Notăm $f(x) = x$, $g(x) = \ln(1+x)$, $h(x) = \dfrac{x}{1+x}$, $\forall x \in I$, unde $I = [0, \infty)$. Avem $f(0) = 0$, $g(0) = 0$, $h(0) = 0$, $f'(x) = 1$, $g'(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $h'(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$, $\forall x \in I$ și este evident că $f'(x) > g'(x) \geqslant h'(x)$, $\forall x \in I$. Atunci, conform teoremei V.10, rezultă că $f(x) \geqslant g(x) \geqslant h(x)$, $\forall x \in I$.

2) Arătăm că pentru orice $x > 0$ avem $x - \dfrac{x^3}{3} \leqslant \operatorname{arctg} x$. Notăm $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $g(x) = x - \dfrac{x^3}{3}$. Atunci $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $g'(x) = 1 - x^2$. Deoarece $f''(x) \geqslant g''(x)$, $\forall x \geqslant 0$ și $f'(0) = g'(0)$, rezultă că $f'(x) \geqslant g'(x)$; aplicând încă o dată teorema V.10, rezultă că $f(x) \geqslant g(x)$, $\forall x \geqslant 0$.

Demonstrăm acum o inegalitate importantă.

TEOREMA V. 11 *(inegalitatea lui O. Hölder, 1859–1937).* **Dacă**

$$a_1, \ldots, a_n \geqslant 0,\ b_1, \ldots, b_n \geqslant 0;\ p > 1,\ q > 1 \text{ și } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \text{ atunci}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{8}$$

Demonstrație. Să considerăm funcția $\varphi(x) = x^\alpha - \alpha x$, $x > 0$, unde $\alpha \in (0, 1)$ este un parametru. Din tabloul de variație a lui φ

x	0		1		∞
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	
$\varphi(x)$	0	$\nearrow$	$1-\alpha$	$\searrow$	$-\infty$

rezultă că $\varphi(x) \leqslant 1 - \alpha$, adică $x^\alpha - \alpha x \leqslant 1 - \alpha$ pentru orice $x > 0$. Atunci pentru orice $A > 0$, $B > 0$, punând $x = \dfrac{A}{B}$ și $\alpha = \dfrac{1}{p}$, rezultă că $1 - \alpha = 1 - \dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{q}$, deci $\left(\dfrac{A}{B}\right)^{\frac{1}{p}} - \dfrac{1}{p}\left(\dfrac{A}{B}\right) \leqslant \dfrac{1}{q}$, de unde $A^{\frac{1}{p}} \cdot B^{\frac{1}{q}} \leqslant \dfrac{A}{p} + \dfrac{B}{q}$.

Punând aici $A = \frac{a_i^p}{\sum_{i=1}^{n} a_i^p}$, $B = \frac{b_i^q}{\sum_{i=1}^{n} b_i^q}$ și adunând inegalitățile astfel obținute, rezultă

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leqslant \frac{1}{p} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^p}{\sum_{i=1}^{n} a_i^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i^q}{\sum_{i=1}^{n} b_i^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

și inegalitatea (2) este probată.

Pentru $p = 2$, $q = 2$ se obține o inegalitate care joacă un rol important în matematică (și care de altfel se poate demonstra direct), anume:

$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$ *(inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwartz).*

EXERCIȚII (capitolul V, § 5)

1. Să se rezolve grafic (cu aproximație) ecuațiile:

a) $2^x + x - 1 = 0$;
b) $2^x - 2x = 0$;
c) $2^x - 3x + 2 = 0$;
d) $\sin x + 2x - 1 = 0$;
e) $\ln x + x - 1 = 0$;
f) $\sin x - x = 0$.

2. Să se arate că ecuația $x = 2(1 - \cos x)$ are 3 soluții reale.

3. Să se discute, după valorile parametrului real m numărul soluțiilor reale ale ecuațiilor:

a) $m = \frac{x}{x^2 + 1}$;
b) $m = \frac{x^2}{x^2 + 1}$;
c) $m = 2x - x \ln 2$;
d) $x^2 + x - m \cdot |x| = 0$;
e) $\sin x + m \cos x = 0$;
f) $m = e^x - x$.

4. Folosind metoda șirului lui Rolle să se discute numărul de soluții reale ale ecuațiilor următoare după valorile parametrului real m:

a) $x^2 + 2x + m = 0$;
b) $x^3 + 3x + m = 0$;
c) $x^3 + 3x^2 + m = 0$;
d) $2 \ln x + x^2 - 4x + m = 0$;
e) $x^4 - 4x^3 + m = 0$;
f) $\operatorname{ch} x + m = 0$.

5. Să se determine numărul soluțiilor reale ale ecuației:

$$xe^{-x} + e^{-x} + \frac{1}{2} x^2 - 1 = 0.$$

6. Să se determine numărul de soluții reale ale ecuațiilor:

a) $2 \sin x = x$;
b) $5 \sin x = x$;
c) $e^x = 1 + x$;
d) $\ln x = x - 1$.

7*. a) Să se arate, folosind șirul lui Rolle, că ecuația $x^n + px + q = 0$ ($p, q \in \mathbb{R}$) are cel mult două soluții reale, dacă n este par, și cel mult trei, dacă n este impar;

b) Să se arate că ecuația $x^{p+q} - A(x^p - 1) = 0$ ($p, q \in \mathbb{N}$ impare, $A > 0$) are două rădăcini reale și pozitive dacă $p^p \cdot q^q \cdot A^p < (p + q)^{p+q}$.

8. Fie $a, b > 0$ și $\varphi : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = x + a + b - 3\sqrt[3]{abx}$. Să se arate că $\varphi(x) \geqslant 0$ pentru $x > 0$ și să se deducă apoi că media aritmetică a trei numere reale pozitive este mai mare decât media lor geometrică. Generalizare.

9. Să se arate că

$$1 \leqslant \frac{x}{\sin x} \leqslant \frac{\pi}{2} \text{ pentru orice } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right].$$

10. a) Să se arate că ecuația $e^x = ax$ are cel puțin o soluție, pentru orice $a \in (-\infty, 0) \cup [e, \infty)$.

b) Să se discute numărul de soluții reale ale ecuației $e^x = ax^2$ după valorile parametrului real a.

11. Să se arate că:

a) $e^x \geqslant x^e$, pentru orice $x > 0$;

b) $x^\alpha \cdot |\ln x| \leqslant \frac{1}{\alpha e}$ (dacă $0 < x < 1$ și $\alpha > 0$);

c) $e^x \geqslant 1 + \ln(1 + x)$, pentru orice $x > -1$;

d) $\frac{\ln x}{x - 1} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}$, $\forall x \in (0, 1) \cup (1, \infty)$.

§ 6. Aplicații ale analizei matematice în cinematică

6.1. Noțiunea de curbă

După cum am văzut, pentru orice funcție elementară se poate reprezenta graficul ei (relativ la un sistem ortogonal de axe). În vorbirea curentă un astfel de grafic este numit curbă. Dar definiția riguroasă, într-un cadru mai general, a noțiunii de curbă ridică dificultăți.

Începem cu următorul exemplu:

Să considerăm cercul (C) cu centrul în originea axelor cu raza 1, având deci ecuația $x^2 + y^2 = 1$ (fig. V.32).

Așadar, $(C) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Mulțimea (C) nu este graficul vreunei funcții reale; ea poate fi reprezentată ca reuniunea graficelor funcțiilor $f_1(x) = \sqrt{1 - x^2}$ și $f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}$, $x \in [-1, 1]$. Așadar, deși cercul este o entitate geometrică bine definită, pentru a-l încadra în teoria anterioară, trebuie considerate două funcții ale căror grafice se racordează în punctele $x = -1$ și $x = 1$. Un alt dezavantaj al reprezentării explicite ($y = \pm\sqrt{1 - x^2}$) a cercului este acela că inițial variabilele x și y au rol simetric și acesta este deteriorat prin explicitarea uneia din variabile, mai ales că funcțiile f_1, f_2 sunt nederivabile în punctele $x = -1$, $x = 1$. Se pune atunci întrebarea: nu există alt mod de a reprezenta curbele (cercul în cazul de față)?

Să considerăm intervalul $I = [0, 2\pi)$. Pentru orice punct $M(x, y)$ situat pe cercul (C) există și este unic $t \in I$ astfel încât $x = \cos t$, $y = \sin t$ (t este unghiul măsurat în radiani dintre versorul $\vec{i}$ al axei Ox și vectorul $\overrightarrow{OM}$; v. fig. V.32). Se mai scrie

$$(C) \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, t \in I$$

și se mai spune că este indicată o reprezentare parametrică a cercului (C) (o altă reprezentare parametrică a cercului (C) este:

$$x = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}, \; y = \frac{2u}{1 + u^2}, \; u \in \mathbf{R},$$

obținută din cea anterioară punând $\operatorname{tg} \frac{t}{2} = u$; evident,

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{1 - u^2}{1 + u^2}\right)^2 + \left(\frac{2u}{1 + u^2}\right)^2 = 1, \; \forall u \in \mathbf{R}).$$

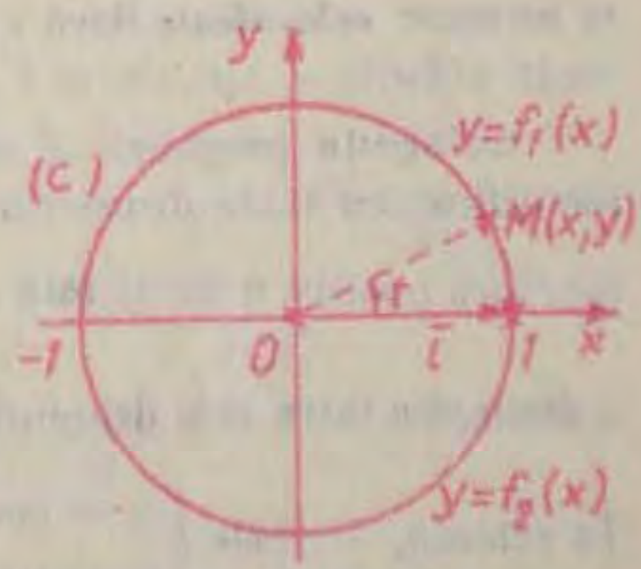


Fig. V.32

Pentru o elipsă (E) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ $(a>0, b>0)$, se poate indica reprezentarea parametrică:

$$(E)\ \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases},\ t\in[0, 2\pi).$$

Această discuție sugerează următoarea definiție: se numește *drum parametrizat plan* orice aplicație

$$\gamma : I \to \mathbf{R}^2,\ t \longrightarrow (x(t),\ y(t)) \tag{9}$$

astfel încât funcțiile $x(t)$, $y(t)$ să fie continue pe I. Se mai spune că drumul parametrizat γ are reprezentarea parametrică

$$\gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases},\ t\in I.$$

Această definiție este foarte generală și a condus la exemple ciudate de drumuri parametrizate (de exemplu, curba lui G. Peano, 1858—1932, care trece prin toate punctele unui pătrat), care contrazic intuiția noastră asupra noțiunii de curbă. În aplicațiile analizei este util de presupus că funcțiile $x(t)$, $y(t)$ sunt de două ori derivabile pe I. Această ipoteză face ca fenomene precum cel relevat de curba lui Peano să fie eliminate.

Submulțimea (γ) a lui $\mathbf{R}^2$ a tuturor punctelor $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ când t parcurge intervalul I, se numește *imaginea* drumului γ. Așadar,

$$(\gamma) = \{(x(t),\ y(t)) \mid t\in I\}.$$

Trebuie făcută distincția între un drum γ și imaginea (γ) a lui. De ce? Să considerăm pentru orice întreg $n \geqslant 1$ drumul $\gamma_n : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2$, $\gamma_n(t) = (\cos nt, \sin nt)$, numit *cercul unitate parcurs de n ori în sens pozitiv*. Este evident că $(\gamma_n) \to \{x^2+y^2=1\} = (C)$ pentru orice n, dar γ_2 și γ_3, de exemplu, sunt drumuri distincte. Iată și un argument euristic. Să ne închipuim un mobil care se mișcă într-un plan raportat la un sistem ortogonal de axe xOy. Atunci, la fiecare moment t coordonatele poziției mobilului $x(t)$, $y(t)$ depind de t și mobilul descrie o anumită traiectorie. El poate reveni acolo de unde a plecat, poate să repete parcursul de mai multe ori etc. Putem să ne imaginăm un al doilea mobil care trece prin aceleași puncte cu primul, dar având viteză diferită sau alt sens de parcurs. Deși mulțimile de puncte ocupate de cele două mobile sunt aceleași, nu putem spune că drumurile corespunzătoare sunt aceleași. Este însă natural să considerăm că dacă traiectoriile coincid ca mulțimi de puncte, sunt parcurse în același sens, diferind doar prin viteza cu care sunt parcurse, atunci drumurile celor două mobile sunt echivalente. Definiția precisă este următoarea:

Două drumuri parametrizate $\gamma : I \to \mathbf{R}^2$, $\lambda : J \to \mathbf{R}^2$

$$\gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases},\ t\in I\ ;\ \lambda : \begin{cases} x = x(u) \\ y = y(u) \end{cases},\ u\in J$$

se numesc *echivalente* dacă există o funcție $\theta : I \to J$ bijectivă, strict crescătoare, astfel încât $\lambda(\theta)(t)) = \lambda(t)$, $\forall t\in I$.

Cu aceste pregătiri, se numește *curbă plană parametrizată*, orice drum parametrizat, identificat cu toate drumurile echivalente cu el. De exemplu, semicercul superior unitate (parcurs pozitiv o dată) este drumul parametrizat $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$, $t\in[0, \pi]$ și nu se face nici o distincție între el și drumurile $\begin{cases} x = \cos 2u \\ y = \sin 2u \end{cases}$, $u\in\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\begin{cases} x = -v \\ y = \sqrt{1-v^2} \end{cases}$, $v\in[-1, 1]$. În schimb, curbele $\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin 2t \end{cases}$, $t\in[0, 2\pi]$, $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$, $t\in[0, 2\pi)$ sunt distincte.

Vedeți, așadar, câte precauții au fost luate pentru a defini o noțiune simplă intuitivă

Pentru a rezuma discuţia anterioară, curbele plane pot fi reprezentate:

a) prin ecuaţie carteziană de forma $F(x, y) = 0$;

b) ca grafice de ecuaţie $y = f(x)$ sau $x = g(y)$;

c) parametric $\gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in I.$

În cadrul geometriei diferenţiale se analizează mai adânc legătura între aceste moduri de reprezentare şi se extinde conceptul de curbă (considerându-se curbe în spaţiul $\mathbf{R}^3$, suprafeţe în $\mathbf{R}^3$ şi, mai în general, varietăţi multidimensionale).

6.2. Câteva noţiuni de cinematică

Cinematica este în esenţă studiul matematic al mişcării în timp a mobilelor. Studiem aici mişcări într-un plan (raportat la un sistem ortogonal de axe xOy de versori $\vec{i}, \vec{j}$).

Presupunem că la fiecare moment t, dintr-un interval de studiu I, un mobil M se află în punctul de coordonate $(x(t), y(t))$ astfel încât funcţiile $x(t)$, $y(t)$ să fie de două ori derivabile în I. Este astfel definit în mod firesc un drum parametrizat.

$$\gamma : I \to \mathbf{R}^2, \gamma(t) = (x(t), y(t)), \forall t \in I.$$

Imaginea ei (γ) se numeşte *traiectoria mobilului*.

Notând $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}$, vectorul de poziţie al lui M, avem

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}, \forall t \in I.$$

Se numeşte *vector-viteză* (respectiv *vector-acceleraţie*) al mobilului la un moment $t_0 \in I$

$$\vec{r}'(t_0) = x'(t_0)\vec{i} + y'(t_0)\vec{j} \text{ (respectiv } \vec{r}''(t_0) = x''(t_0)\vec{i} + y''(t_0)\vec{j}).$$

Numărul real şi pozitiv $v(t_0) = \|\vec{r}'(t_0)\| = \sqrt{x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2}$ se numeşte viteza la momentul t_0 a mobilului M pe traiectoria (v). Dacă $x'(t_0) = 0$ şi $y'(t_0) = 0$, se mai spune că punctul corespunzător pe traiectorie este *singular*; în acest caz viteza $v(t_0)$ este nulă. Într-un punct nesingular, vectorul $\vec{r}'(t_0)$ are următoarea interpretare geometrică: deoarece

$$x'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}, \quad y'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0},$$

rezultă că

$$\vec{r}'(t_0) = x'(t_0)\vec{i} + y'(t_0)\vec{j} = \lim_{t \to t_0} \frac{[x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}] - [x(t_0)\vec{i} + y(t_0)\vec{j}]}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0} =$$

$$= \lim_{t \to t_0} \frac{\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0}}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{\overrightarrow{M_0M}}{t - t_0},$$ deci $\vec{r}'(t_0)$ este coliniar cu limita vectorului $\overrightarrow{M_0M}$,

adică $\vec{r}'(t_0)$ *este tangent la* (γ) *în punctul* M_0 (fig. V.33).

Am definit deja noţiunile de viteză, acceleraţie în cazul unei mişcări rectilinii (pe o axă) a mobilelor şi acum am extins aceste noţiuni la cazul mişcării plane.

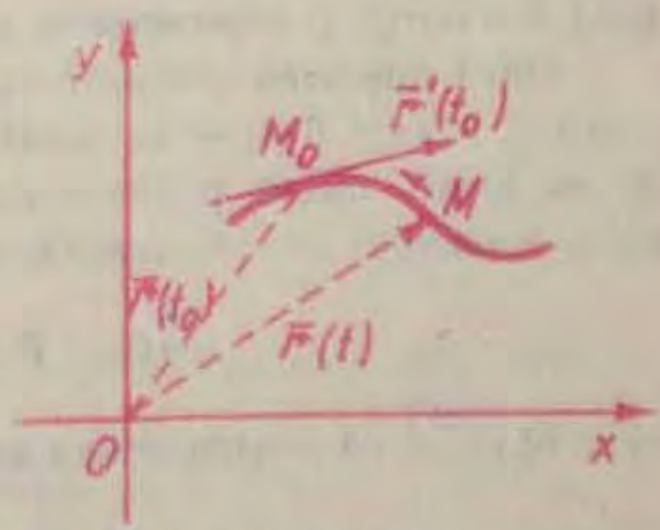


Fig. V.33

Exemple

1) Presupunem că un mobil are la fiecare moment $t \in [0, 2]$ coordonatele $x = 2t$, $y = t^2 - t$ şi ne propunem să figurăm traiectoria mobilului, să calculăm vectorul-viteză şi determinăm în ce moment viteza mobilului este minimă.

Aşadar, $x \in [0, 4]$ şi $y = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x^2 - 2x}{4}$. Traiectoria mobilului va fi o porţiune din parabola $y = \frac{x^2 - 2x}{4}$. Vectorul de poziţie al punctului M la momentul t este

$$\vec{r}(t) = 2t\vec{i} + (t^2 - t)\vec{j}, \text{ deci}$$

vectorul viteză va fi $\vec{r}'(t) = 2\vec{i} + (2t - 1)\vec{j}$. Mărimea lui este $v(t) = \|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{4 + (2t - 1)^2}$ şi viteza minimă este atinsă la momentul $t = \frac{1}{2}$.

Fig. V.34

2) *Mişcarea circulară.* Se spune că un mobil are o *mişcare circulară* dacă traiectoria sa este un cerc (C) sau o submulţime a acestuia. Fie O centrul şi R raza cercului (C). Fixăm un punct A pe cerc şi alegem sistemul ortogonal de axe xOy (fig. V.34). La fiecare moment t mobilul se află într-un punct M: notând cu $\theta(t) = (\widehat{\vec{OA}, \vec{OM}})$ măsurat, în radiani, măsura arcului $\widehat{AM}$ va fi egală cu $s(t) = R \cdot \theta(t)$. Coordonatele lui M vor fi $x = R\cos\theta(t)$, $y = R\sin\theta(t)$ şi $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$, deci

$$\vec{r}(t) = R\cos\theta(t)\vec{i} + R\sin\theta(t)\vec{j}.$$

În acest caz, vectorul-viteză $\vec{r}'(t) = [-R\sin\theta(t)\vec{i} + R\cos\theta(t)\vec{j}]\theta'(t)$ este tangent în M la (C) şi mărimea vitezei este $v(t) = \|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{R^2\sin^2\theta \cdot \theta'^2 + R^2\cos^2\theta \cdot \theta'^2} = R \cdot |\theta'(t)|$.

$\omega(t) = \theta'(t) = \frac{d\theta}{dt}$ se numeşte *viteza unghiulară* a mobilului la momentul t.

Se observă că notând cu $\vec{\nu}$ (respectiv cu $\vec{\tau}$) versorul lui $\vec{r}(t)$ (respectiv $\vec{r}'(t)$), avem

$$\vec{\nu} = \frac{\vec{r}(t)}{R} = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}, \quad \vec{\tau} = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}$$

(numite versorul-normală şi versorul-tangentă la (C) la momentul t) şi rezultă $\vec{r}(t) = R \cdot \vec{\nu}$, $\vec{r}'(t) = R\omega(t) \cdot \vec{\tau}$ (fig. V.34).

Deci $\vec{r}''(t) = R\omega'(t) \cdot \vec{\tau}(t) + R\omega(t)\vec{\tau}'(t) = R\omega'(t)\vec{\tau}(t) - R\omega^2(t)\vec{\nu}(t)$, deoarece $\vec{\tau}'(t) = (-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j})' = -\cos\theta \cdot \theta'\vec{i} - \sin\theta \cdot \theta'\vec{j} = -\omega \cdot \vec{\nu}$.

Am descompus astfel vectorul-accelerаţie $\vec{r}''(t)$ al mişcării în componenta sa tangenţială $R\omega'(t)\vec{\tau}(t)$ şi componenta sa normală $-R\omega^2(t)\vec{\nu}(t)$.

Dacă mişcarea circulară considerată este *uniformă* (adică viteza unghiulară este constantă), atunci $\theta'(t) = \omega$, constant ($\omega'(t) = 0$), deci funcţiile $\theta(t)$ şi ωt au aceeaşi derivată şi, ca atare, diferă printr-o constantă, $\theta(t) = \omega t + \theta_0$. *Componenta tangenţială a vectorului-accelerаţie este în acest caz nulă*; de asemenea,

$$\vec{r}(t) = R\cos(\omega t + \theta_0)\vec{i} + R\sin(\omega t + \theta_0)\vec{j}$$

şi se observă că pentru orice t avem $\vec{r}(t) = \vec{r}\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right)$, adică *o mişcare circulară uniformă cu viteza unghiulară ω este periodică de perioadă* $\frac{2\pi}{\omega}$.

EXERCIŢII (capitolul V, § 6)

1. Să se reprezinte grafic imaginea următoarelor drumuri parametrizate $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I$:

a) $x = t$, $y = t$, $I = [0, 2]$;
b) $x = t$, $y = t^2$, $I = [-1, 1]$;
c) $x = t^2$, $y = t$, $I = [0, 1]$;
d) $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $I = [0, \pi]$;
e) $x = \cos t$, $y = \cos 2t$, $I = [0, 2\pi]$;
f) $x = |\cos t|$, $y = \sin t$, $I = [0, 2\pi]$.

2. Considerăm drumurile parametrizate $\gamma, \gamma_1 : [0, 1] \to \mathbf{R}^2$, definite prin $\gamma(t) = (t, 2t)$, $\gamma_1(t) = (4t - 4t^2, 8t - 8t^2)$.

a) Să se arate că ele au aceeaşi imagine, anume segmentul de dreaptă $y = 2x, 0 \leq x \leq 1$.

b) Să se figureze punctele $\gamma(t)$, $\gamma_1(t)$, pentru valorile $t = 0$, $t = \frac{1}{4}$, $t = \frac{1}{3}$, $t = \frac{1}{2}$, $t = \frac{2}{3}$, $t = \frac{3}{4}$, $t = 1$ şi apoi să se arate că drumurile γ şi γ_1 nu sunt echivalente.

3. Presupunem că la fiecare moment $t \geq 0$ un mobil se află în punctul de coordonate $x = t + 2$, $y = \dfrac{1}{t^2 + 4t + 3}$. Să se arate că traiectoria lui aparţine curbei $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ şi să se determine la fiecare moment t vectorul-acceleraţie.

4. Să se reprezinte traiectoria unui mobil care la fiecare moment $t \in [0, 2\pi]$ se află în punctul de coordonate $x = \sin t$, $y = -2 - \cos 2t$ şi să se calculeze norma (mărimea) vectorului-viteză şi a vectorului-acceleraţie la momentul $t = \frac{3}{4}$.

EXERCIŢII ŞI PROBLEME REZOLVATE LA CAPITOLUL V

1. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcţie derivabilă. Să se arate că:*

a) *dacă f este pară (respectiv impară), atunci f' este impară (respectiv pară). Dar reciproc?*

b) *dacă f este periodică de perioadă T, atunci f' este periodică şi are aceeaşi perioadă. Dar reciproc?*

Soluţie. a) Derivăm relaţia $f(-x) = f(x)$. Obţinem $-f'(-x) = f'(x)$ pentru $\forall x \in \mathbf{R}$. b) Derivăm relaţia $f(x + T) = f(x)$. Obţinem $f'(x + T) = f(x)$ pentru $\forall x \in \mathbf{R}$. Reciproca nu este adevărată; de exemplu, funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x + \sin x$ nu este periodică, dar derivata ei f' este periodică.

2. Să se calculeze următoarele limite:

$$l_1 = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x + \sin x}, \quad l_2 = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x + \sin x}, \quad l_3 = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x} \right),$$

$$l_4 = \lim_{x \to 0,\, x > 0} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x} \right)^{\frac{1}{\sin x}} \text{ şi } l_5 = \lim_{x \to 0,\, x < 0} (1 - 4x)^{\frac{1}{x}}.$$

Soluţie. Folosind regula lui l'Hospital $\left(\text{pentru cazul } \frac{0}{0}\right)$ se obţine $l_1 = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{1 + \cos x} = \dfrac{1}{2}$. Limita l_2 nu se poate calcula folosind regula lui l'Hospital (deoarece $\lim\limits_{x \to \infty} \cos x$ nu există); totuşi $l_2 = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{1 + \frac{\sin x}{x}} = 1$, deoarece $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$.

Limita l_3 este de tipul $\infty - \infty$. Avem $l_3 = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x - 1}{\cos x} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{-\sin x} = 0$.

Limita l_4 este de tipul 1^∞ deoarece $\dfrac{\operatorname{tg} x}{x} \to 1$ şi $\dfrac{1}{\sin x} \to \infty$ pentru $x \to 0$). Avem $\ln l_4 =$

$$= \lim_{x \to 0,\, x > 0} \frac{1}{\sin x} \ln \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\ln \operatorname{tg} x - \ln x}{\sin x} = \lim_{x \to 0,\, x > 0} \frac{\dfrac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x} - \dfrac{1}{x}}{\cos x} =$$

$$= \lim_{x \to 0,\, x > 0} \frac{x - \sin x \cos x}{x \sin x \cos^2 x} = \lim_{x \to 0,\, x > 0} \frac{x - \sin x \cos x}{x \sin x}$$ (deoarece $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$). Apli-

când încă o dată regula lui l'Hospital, rezultă $\ln l_4 = \lim\limits_{x \to 0,\, x > 0} \dfrac{1 - \cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x + x \cos x} =$

$$= \lim_{x \to 0,\, x > 0} \frac{2 \sin^2 x}{\sin x + x \cos x} = \lim_{x \to 0,\, x > 0} \frac{2 \sin x}{1 + \dfrac{x}{\sin x} \cos x} = 0, \text{ deci } l_4 = 1.$$

În sfârşit, l_5 este de tipul 0^0 şi $\ln l_5 = \lim\limits_{x \to 0,\, x < 0} x \ln (1 - 4^x) = \lim\limits_{x \to 0,\, x < 0} \dfrac{\ln (1 - 4^x)}{\dfrac{1}{x}} =$

$$= \lim_{x \to 0,\, x < 0} \frac{\dfrac{1}{1 - 4^x} (-4^x \ln 4)}{-\dfrac{1}{x^2}} = (\ln 4) \lim_{x \to 0,\, x < 0} \frac{x^2}{1 - 4^x} = (\ln 4) \cdot \lim_{x \to 0,\, x < 0} \frac{2x}{-4^x \ln 4} = 0,$$

deci $l_5 = 1$.

3. Fie $f : [0, a] \to \mathbf{R}$, $a > 0$, *o funcţie derivabilă cu f' continuă şi astfel ca $f(0) = 0$. Să se arate că dacă există $M > 0$ astfel încât $f'(x) \geqslant M$ pentru orice $x \in [0, a)$, atunci $f(x) \geqslant \dfrac{Ma}{2}$ pentru orice $x \in \left[\dfrac{a}{2}, a\right]$.*

Soluţie. Considerăm funcţia $\varphi(x) = f(x) - Mx$. Avem $\varphi(0) = 0$ şi $\varphi'(x) = f'(x) - M \geqslant 0$, deci φ este crescătoare pe intervalul $[0, a]$. Aşadar, $\varphi(x) \geqslant 0$, adică $f(x) \geqslant Mx$ pentru orice $x \in [0, a]$. Dacă $x \in \left[\dfrac{a}{2}, a\right]$ avem $x \geqslant \dfrac{a}{2}$, deci $f(x) \geqslant f\left(\dfrac{a}{2}\right) \geqslant \dfrac{Ma}{2}$.

4. Dacă $f : (-a, a) \to \mathbf{R}$ $(a > 0)$ *este o funcţie derivabilă, cu f' continuă, $f(0) = 1$ şi $f(x) > 0$ pentru orice $x \in (-a, a)$, să se arate că*

$$\lim_{x \to 0} f(x)^{\frac{1}{x}} = e^{f'(0)}.$$

Soluţie. Avem de arătat că $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln f(x)}{x} = f'(0)$, adică, folosind regula lui l'Hospital, $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f'(x)}{f(x)}$, ceea ce este evident, deoarece $f(0) = 1$.

Observaţie. Pentru o limită $\lim u^v$ de tipul 1^∞, scriind $u^v = \left[(1 + u - 1)^{\frac{1}{u-1}}\right]^{v(u-1)}$ rezultă că $\lim u^v = e^{\lim v(u-1)}$, dacă există limita de la exponent. În cazul acestui exerciţiu,

$$\lim_{x \to 0} f(x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}(f(x) - 1)} = e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}} = e^{f'(0)}.$$

5. *Să se arate că dacă funcția $f : I \to \mathbf{R}$ este convexă pe un interval $I \subset \mathbf{R}$, atunci pentru orice $x_1, \dots, x_n \in I$, avem*

$$f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}[f(x_1) + \dots + f(x_n)] \text{ (inegalitatea lui Jensen).}$$

Soluție. Procedăm prin inducție după n. Pentru $n = 1$ afirmația este evidentă; presupunem $n \geqslant 2$ și afirmația adevărată pentru orice $k \leqslant n - 1$ numere. Atunci, $f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) = f\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{x_1 + \dots + x_{n-1}}{n-1} + \frac{1}{n}x_n\right)$ și cum f este convexă, rezultă $f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) \leqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right) f\left(\frac{x_1 + \dots + x_{n-1}}{n-1}\right) + \frac{1}{n} f(x_n) \leqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n-1}[f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})] + \frac{1}{n} f(x_n)$, folosind ipoteza de inducție.

Așadar, $f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n}$.

Pentru funcțiile concave avem inegalitatea inversă.

Observație. Se poate arăta, mai general, că dacă $f : I \to \mathbf{R}$, I fiind un interval din $\mathbf{R}$, funcția este convexă, atunci pentru orice $x_1, \dots, x_n \in I$ și pentru orice $t_1, \dots, t_n > 0$ astfel încât $t_1 + \dots + t_n = 1$, avem $f(t_1x_1 + \dots + t_nx_n) \leqslant t_1f(x_1) + \dots + t_nf(x_n)$. Pentru $t_1 = \dots = t_n = \frac{1}{n}$ se obține inegalitatea din enunț.

6. *Să se arate că:*

1) *dacă* $0 < b < a$, *atunci* $\frac{a-b}{a} < \ln\frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$;

2) *dacă* $0 \leqslant a < b \leqslant \frac{\pi}{2}$, *atunci* $(b - a)\cos b \leqslant \sin b < \sin a \leqslant (b - a)\cos a$.

Soluție. 1) Considerăm funcția $f(x) = \ln x$ pe intervalul $[b, a]$ și aplicăm formula creșterilor finite; atunci $f(a) - f(b) = (a - b) \cdot f'(c)$, deci $\frac{1}{a-b}\ln\frac{a}{b} = f'(c)$, unde $b < c < a$. Dar $f'(c) = \frac{1}{c}$ și deci $\frac{1}{a} < f'(c) < \frac{1}{b}$; ca atare, $\frac{1}{a} < \frac{1}{a-b}\ln\frac{a}{b} < \frac{1}{b}$.

2) Dacă $a = b$, inegalitățile sunt evidente și putem presupune $a < b$, inegalitățile rezultă aplicând teorema creșterilor finite funcției $\sin : [a, b] \to \mathbf{R}$ (ținând cont că pe intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ funcția cos este descrescătoare).

PROBLEME RECAPITULATIVE

I

1. Să se arate că funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = |x|$ nu este polinomială.

2. Se consideră șirurile

$$a_n = \frac{2n + (-1)^n \cdot n}{2n + 1}, \quad b_n = \frac{2n + (-1)^{n+1} \cdot n}{2n + 1}, \; n \in \mathbf{N}.$$

Să se arate că $|a_n - b_n| \leqslant 1$ pentru orice $n \geqslant 1$ și să se determine valorile lui n astfel încât $|a_n + b_n - 2| < \frac{1}{101}$.

3*. Se consideră mulțimea $A = \left\{ \frac{m}{n} \middle| \, 0 < m < n \text{ cu } m, n \text{ întregi} \right\}$. Să se arate că A nu are un cel mai mic element și nici un cel mai mare element și să se determine $\inf A$, $\sup A$.

4*. Să se traseze graficele funcțiilor $\varphi, \psi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definite prin $\varphi(x) = \inf\limits_{t \leqslant x} t^3$ și $\psi(x) = \sup\limits_{t \in [x, x+1]} (t^3 - t)$.

5*. Fie $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ o funcție mărginită. Să se arate că pentru orice întreg $n \geqslant 1$ există funcții polinomiale P, Q de grad n astfel încât $P(x) \leqslant f(x) \leqslant Q(x)$ pentru orice $x \in [0, 1]$.

II

6. Fie $a_n = \frac{n}{(n+1)!}$ și $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n (n \geqslant 1)$. Să se arate că $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$ și $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = 1$.

7. Dacă $(x_n)_{n \geqslant 0}$ și $(y_n)_{n \geqslant 0}$ sunt șiruri de numere reale convergente către a și respectiv b, $a \neq b$, ce se poate spune despre convergența șirului $x_0, y_0, x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n, \ldots$? Dar dacă $a = b$?

8. a) Fie $a_{n+1} = \frac{5a_n + 3}{a_n + 3}$, $n \geqslant 1$, $a_1 > 0$. Să se arate că șirul $b_n = \frac{a_n - 3}{a_n + 1}$, $n \geqslant 1$ este o progresie geometrică și să se studieze convergența șirurilor (a_n), (b_n).

b) Fie $a_n = \frac{1}{3} a_{n-1} - 4$, $\forall n \geqslant 1$ și $a_0 = 3$. Să se arate că diferența $a_n - a_{n-1}$ are semn constant pentru orice n și că șirul $b_n = a_n + 6$, $n \geqslant 0$ este o progresie geometrică convergentă către zero.

9. a) Să se determine constanta α astfel încât limita $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\alpha}\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)$ să existe și să fie finită.

b) Să se arate că dacă $a+b+1=0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a\sqrt{n+1}+b\sqrt{n+2}+\right.$ $\left.+\sqrt{n+3}\right)=0$ și $\lim\limits_{n\to\infty}[a\ln(3+n)+b\ln(2+x)+\ln(1+n)]=0$.

10. Un segment AB de lungime a este împărțit în n segmente de lungimi egale $AA_1 = A_1A_2 = \ldots = A_{n-1}B$ și pe fiecare din aceste segmente se construiește, de aceeași parte, câte un triunghi echilateral cu vârfurile $C_1, C_2, \ldots, C_n$ respectiv. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}(AC_1 + C_1A_1 + A_1C_2 + \ldots + A_{n-1}C_n + C_nB)$ și să se explice rezultatul, aparent paradoxal, obținut.

11. Fie $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 1, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$ și $g(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \neq 1 \\ 0, & \text{dacă } x = 1 \end{cases}$. Să se arate că $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = 1$ și să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0} g(f(x))$.

12. Să se determine asimptotele funcțiilor $f : D \to \mathbf{R}$ următoare (D fiind domeniul maxim de definiție):

a) $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2}$; b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+5}$; c) $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{x-1}$; d) $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)^2}$;

e) $f(x) = \ln(x^2+x)$; f) $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{x-1}$.

13. Fie $a_n = \left(5 - \dfrac{1}{n}\right)^{r_n}$ unde $r_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, $n \geq 1$. Să se studieze monotonia, mărginirea și convergența acestui șir.

14. Să se arate că dacă $(x_n)_{n\geq 0}$ este un șir convergent de numere reale, atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există N natural astfel încât $\forall\, m, n \geq N$, $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

III

15. Să se studieze continuitatea funcțiilor $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ următoare:

a) $f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{dacă } x \in \mathbf{Q} \\ 2x, & \text{dacă } x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$; b) $f(x) = \sin|x|$; c) $f(x) = x - [x]$;

d) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^{2n}}{x^{2n}+1}$; e) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+xe^{nx}}{1+e^{nx}}$; f) $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin \pi x)$.

16. Să se arate că ecuațiile următoare au soluții pe intervalele indicate:

a) $x^2 + 2x - 5 = 0$, $I = (1, 2)$; b) $x^4 + 5x + 3 = 0$, $I = (-1, 0)$;

c) $2^x = \dfrac{1}{x}$, $I = (0, 1)$; d) $x \ln x = \dfrac{1}{2} - x$, $I = (0, 1)$;

e) $\cos^4 x = \sin x$, $I = (0, \pi)$.

17*. a) Fie $f:[0, 2\pi] \to \mathbf{R}$ o funcţie continuă astfel încât $f(0) = f(2\pi)$. Să se arate că există $c \in [0, \pi]$ astfel încât $f(c) = f(c + \pi)$.

b) Să se demonstreze că dacă $f:[-a, a] \to [-a, a]$, $a > 0$ este o funcţie continuă, atunci există puncte $u, v \in [-a, a]$ astfel încât $f(u) = u$, $f(v) = -v$.

18*. Un automobil porneşte la momentul $t = 0$ dintr-un punct A şi la momentul $t = 2$ (timpul măsurat în ore) ajunge într-un punct B după ce a parcurs rectiliniu 160 km. Pentru orice $t \in [0, 2]$ notăm cu $f(t)$ distanţa parcursă de automobil în intervalul de timp $[0, t]$ (deci $f(0) = 0$, $f(2) = 160$) şi presupunem că f este funcţie continuă. Să se arate că există cel puţin o pereche de puncte (U, V) situate între A şi B aflate la o distanţă $d(U, V) = 80$ km şi astfel încât automobilul să parcurgă distanţa $d(U, V)$ exact într-o oră, iar dacă mişcarea este uniformă există chiar o infinitate de astfel de perechi (U, V).

IV

19. Să se calculeze $f'_s(0)$, $f'_d(0)$ pentru funcţiile $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

a) $f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{dacă } x < 0 \\ 4, & \text{dacă } x \geq 0 \end{cases}$; b) $f(x) = |x^2 - 2x|$; c) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 2x, & \text{dacă } x < 0 \\ 2x + 3, & \text{dacă } x \geq 0 \end{cases}$

20. Să se determine constantele reale a, b astfel încât funcţia $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + b, & \text{dacă } x \leq 2 \\ 2ax^3 + 11a, & \text{dacă } x > 2 \end{cases} \quad \text{să fie:}$$

1°. continuă pe $\mathbf{R}$;

2°. derivabilă pe $\mathbf{R}$.

Aceeaşi problemă pentru funcţia $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax, & \text{dacă } x < 0 \\ b \ln(x + 1), & \text{dacă } x \geq 0 \end{cases}$.

21. Să se afle constantele reale α şi β astfel încât funcţia $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin

$$f(x) = \begin{cases} xe^x, & \text{dacă } x \leq 1 \\ \alpha x + \beta, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$$

să fie derivabilă pe $\mathbf{R}$. Ce interpretare geometrică se poate da rezultatului obţinut?

22. Să se indice două funcţii derivabile $f, g: (0, 1) \to \mathbf{R}$ astfel încât $f(x) < g(x)$, $f'(x) > g'(x)$ pentru orice $x \in (0, 1)$.

23. Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = e^{-x} \cdot \sin x$. Să se arate că $|f(x)| \leq 1$, $|f'(x)| \leq \sqrt{2}$, $|f''(x)| \leq 2$; pentru orice $x \geq 0$.

24. Se consideră funcţia $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \left(ax + \sqrt{1 + a^2x^2}\right)^{\frac{1}{a}}$, unde $a \neq 0$ este o constantă reală.

a) Să se verifice că $\sqrt{1 + a^2x^2} \cdot f'(x) - f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$

b) Să se arate că $(1 + a^2x^2)f''(x) + a^2xf'(x) - f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Ce relaţii de forma $P(x) \cdot f''(x) + Q(x) \cdot f'(x) + R(x) \cdot f(x) = 0$ au loc pentru orice $x \in \mathbf{R}$, unde P, Q, R sunt funcţii polinomiale reale?

25. a) Să se determine parametrul real m astfel încât funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = mx - \ln(x^2 + 1)$ să fie monoton descrescătoare pe $\mathbf{R}$.

b) Să se arate că pentru orice parametru real m funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = (x^2 + mx)e^{-x}$ are un maxim şi un minim local.

26. Să se determine intervalele de monotonie ale funcţiei $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}, f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ şi, folosind rezultatul obţinut, să se decidă care din numerele $a = 3^{\sqrt{5}}$, $b = 5^{\sqrt{3}}$ este mai mare.

27. Să se arate că există o unică funcţie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ derivabilă, astfel încât $f'(x) = 3f(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$ şi $f(0) = 3$.

28*. Presupunem că f este de două ori derivabilă într-o vecinătate V a unui punct a. Să se arate că pentru orice h suficient de mic există puncte p, q în V astfel încât

$$\frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = f'(p) \text{ şi } \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2} = f''(q).$$

29. Să se reprezinte grafic următoarele funcţii $f : D \to \mathbf{R}$ (folosind eventual şi derivata secundă), D fiind domeniul maxim de definiţie:

a) $f(x) = \sqrt{x^6} - \sqrt{x^4}$;

b) $f(x) = x^6 - 2x^3 + 1$;

c) $f(x) = \dfrac{|x| - 1}{x - 1}$;

d) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{(x-2)^2}$;

e) $f(x) = \dfrac{x^2}{(x^2 - 1)^2}$;

f) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3|x - 2|}{x - 1}$;

g) $f(x) = x + \sqrt{\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|}$;

h) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}}$;

i) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$;

j) $f(x) = 2x - 1 + \sqrt{x - 1}$;

k) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2|x|}$;

l) $f(x) = (2 + x)\sqrt{1 - x}$;

m) $f(x) = \operatorname{tg} x + \cos x$;

n) $f(x) = \cos x + \cos \dfrac{x}{2}$;

o) $f(x) = \dfrac{3 + \sin x}{1 + \sin x}$;

p) $f(x) = \arcsin \dfrac{2x}{1 + x^2}$;

q) $f(x) = \pi x + \sin \pi x$;

r) $f(x) = \dfrac{\sin x - \cos x}{\cos 2x}$;

s) $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg}^3 x}$;

t) $f(x) = \sin^3 x - 2\sin^4 x$;

u) $f(x) = x + \ln x^2$;

v) $f(x) = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{1}{2}\ln x$;

w) $f(x) = |\ln|x| + x|$;

z) $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

30. Se cere numărul de soluții reale ale ecuațiilor $x^4 - 4x + 1 = 0$; $1 + x - \operatorname{arctg} x = 0$; $x^2 - 2x + 1 = \ln |x|$.

31. Să se arate că:

a) $x \leqslant e^x - 1 \leqslant xe^x$, $\forall x \in \mathbf{R}$;

b) $\ln (x + 1) \geqslant \dfrac{2x}{x + 2}$, dacă $x \geqslant 0$;

c) $0 \leqslant x^n e^{1-x} \leqslant 1$ pentru orice $x \in [0, 1]$ și pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$.

NOTĂ ISTORICĂ

Considerentele de natură istorică în evoluția unei discipline prezintă un dublu interes: unul strict informativ și altul legat de reflecțiile inevitabile în legătură cu rădăcinile, motivațiile și caracterul sinuos al descoperirii științifice. În ceea ce privește matematica, o privire în trecut este poate și mai oportună, pentru că deși este știință fundamentală, ca element direct de cunoaștere sau ca instrument indispensabil pentru alte discipline, există totuși opinia că matematica ar avea un caracter static, că „totul este cunoscut". Realitatea este că matematica a avut și are o evoluție continuă, progresele ei datorându-se atât impulsurilor venite din afară (în mod constant din fizică și din tehnică, iar în ultimul timp din științele economice), cât și structurii ei interne, nevoii de cunoaștere și înțelegere, de armonie și aspirație spre claritate maximă, frumusețe și economie de efort.

În această scurtă prezentare vom încerca să examinăm apariția și dezvoltarea conceptelor fundamentale pe care le-ați întâlnit în acest manual — numărul real, funcția, limita, continuitatea și derivata, marcând momentele semnificative. O bună cunoaștere a manualului vă va permite să fiți în măsură să apreciați singuri progresele efectuate.

Numerele raționale pozitive au fost cunoscute încă din antichitate și tot atunci geometrii greci au evidențiat și insuficiența acestora, dovedind că diagonala unui pătrat nu este „comensurabilă" cu latura pătratului (adică, în limbajul nostru, numărul $\sqrt{2}$ nu este rațional). O primă tentativă logic coerentă de a construi o teorie a numerelor reale, ca teorie axiomatică a mărimilor, se datorește lui Eudox (elev al lui Platon) și se găsește în cartea a V-a a Elementelor lui Euclid; în particular este explicitată acolo și proprietatea lui Arhimede. Teoria lui Eudox era greoaie, puțin favorabilă calculului numeric sau algebric. De altfel, în acea epocă întreaga matematică era învăluită într-o haină geometrică, operațiile se făceau cu mărimi și nu cu numere asociate convenabil. Unele reminiscențe se observă și astăzi în terminologia curentă (a^2 se citește „a pătrat" iar a^3 — „a cub" etc.). Nevoia de a face calcule cu aproximații „din ce în ce mai bune", prefigurând însăși trecerea la limită, l-a condus pe Arhimede să inventeze metoda cleștelui și să calculeze cu extraordinară ingeniozitate aria unui subgrafic de parabolă, aria elipsei și volumele unor corpuri de rotație, în pofida lipsei unei teorii sistematice. Încă din antichitate au fost evidențiate unele șiruri infinite definite prin recurență, iar progresiile se întâlnesc în papirusuri egiptene.

Evenimentele istorice (cucerirea Greciei de către romani, năvălirile barbare etc.) au condus la un profund regres și datorăm culturii arabe transmiterea unor texte antice prețioase ca și sistemul pozițional de notare a numerelor, pe care îl folosim și noi. Începând cu secolul al XIV-lea (elementele lui Euclid fuseseră între timp traduse din arabă în latină), matematica însăși cunoaște o adevărată renaștere. Francezul N. Oresme introduce ideea de reprezentare grafică și demonstrează că seria armonică este divergentă, iar Galileo Galilei utilizează sistematic reprezentarea grafică a dependenței între mărimi. Matematicienii francezi R. Descartes și P. Fermat introduc, spre mijlocul secolului al XVII-lea, conceptul de coordonată și-l utilizează sistematic în reprezentarea geometrică a mărimilor, folosind notația algebrică pe care ne-am însușit-o și noi. Ideea lor de a studia ecuațiile cu ajutorul curbelor și invers a evidențiat importanța „variabilelor continue", a condus la descoperirea

geometriei analitice, pregătind terenul pentru progrese mai substanțiale, legate, nu întâmplător, de nevoile astronomiei și navigației.

Pasul hotărâtor în constituirea analizei matematice, ca domeniu esențial de studiu, a fost făcut de englezul Isaac Newton (1642—1727) și de germanul Gottfried Wilhelm Leibniz (1646—1716). Este interesant că Newton și-a publicat principalele sale contribuții în mecanică și în optică, dar opera sa matematică a fost publicată în întregime abia în 1967, rezultatele sale matematice circulând ca scrisori sau manuscrise puse la dispoziția unor prieteni. La sfârșitul anului 1666 Newton descoperise calculul cu derivate (pe care le numise fluxiuni). Referitor la o curbă $f(x, y) = 0$, Newton avea o viziune pur dinamică, ca loc de intersecție a două drepte mobile, una paralelă cu axa Ox și cealaltă paralelă cu axa Oy, viteza fiind orientată pe tangenta la curbă, obținută compunând după legea paralelogramului vitezele pe orizontală și pe verticală. Notațiile și modul de calcul propuse de Newton erau greoaie, dar el a descoperit cu această ocazie rezultate esențiale în analiza matematică, ce se confirmau în rezolvările unor probleme concrete și acest fapt nu-l îndemna spre o examinare critică a conceptelor folosite. În aceeași perioadă, Leibniz, trimis ca diplomat la Paris (în 1673) a intrat în contact cu olandezul Cr. Huygens (1629—1695), de la care a aflat de rezultatele lui B. Pascal (1623—1662) în lămurirea conceptului de limită. Leibniz a definit (foarte restrictiv) noțiunea de funcție și a descoperit, independent de Newton, noțiunea de diferențială, regulile de derivare și integrare, introducând totodată notații potrivite, apropiate de cele folosite astăzi. Newton a contestat meritele lui Leibniz, cerând instituirea unei comisii care să stabilească prioritatea sa în descoperirea Calculului diferențial. Acum, privind cu detașarea celor aproape 300 ani scurși de atunci, a devenit clar că descoperirile lui Leibniz au fost meritul exclusiv al acestuia și, ca o ironie a soartei, matematicienii englezi, neadoptând notația și metodele de calcul ale lui Leibniz, au rămas mult timp izolați de realizările majore ale celorlalți matematicieni europeni. Se poate afirma că Leibniz a avut ca scop elaborarea unor metode și algoritmi cât mai generali, în timp ce Newton era interesat în a rezolva îndeosebi probleme fizice. Aceste două moduri de a privi matematica au coexistat dintotdeauna, au ambele justificări serioase și corespund unor temperamente științifice diferite, dar la fel de necesare progresului.

Entuziasmul provocat de rezultatele calculului diferențial creat de Newton și Leibniz a întârziat fundamentarea riguroasă a conceptelor. Marele matematician elvețian L. Euler (1707—1783) a introdus numărul e, a precizat noțiunea de funcție, acceptând ideea „funcțiilor cu acoladă" (date prin expresii analitice diferite pe intervale diferite). Studiul matematic al mișcării corzii vibrante și, mai târziu, studiul propagării căldurii (datorat lui J.B. Fourier, 1768—1830) au condus la considerarea „funcțiilor arbitrare". P. Lejeune-Dirichlet (1805—1859) a construit în 1829 exemplul său celebru, dat și în acest manual, de funcție discontinuă în orice punct, care nu este definită printr-o expresie analitică. Toate aceste contribuții au impus, cu necesitate, analizarea și sistematizarea conceptelor și rezultatelor obținute. Francezului A.L. Cauchy (1789—1857) și cehului B. Bolzano (1781—1848) le datorăm definirea modernă a conceptului de continuitate (în limbajul $\varepsilon - \delta$), iar lui K. Weierstrass conceptul de continuitate uniformă. În anul 1821 Cauchy a enunțat criteriul de convergență care îi poartă numele și a fundamentat noțiunea de limită introducând în analiză standarde noi de rigoare. Abia după ce matematicienii germani K. Weierstrass, R. Dedekind, G. Cantor și francezul Ch. Méray au definit conceptul de număr real și după ce Cantor a creat teoria mulțimilor (condus de cercetările sale asupra mulțimilor de convergență punctuală a seriilor trigonometrice), se poate vorbi de fundamentarea riguroasă a analizei matematice.

Metodele analizei matematice s-au dovedit de la început extrem de puternice și în alte domenii ale științei. Astfel marele matematician german Karl Friedrich Gauss (1777—1855) a aplicat rezultatele analizei la studiul curbelor și suprafețelor creând geometria diferențială, J.L. Lagrange (1736—1813) și P.S. Laplace (1749—1827) au creat mecanica analitică, primul având o contribuție însemnată în multe alte domenii. Folosind metode de ana-

liză matematică, Ch. Hermite (1822–1901) şi F. Lindemann (1852–1939) au reuşit să demonstreze, la sfârşitul secolului trecut, că numerele e şi respectiv π sunt transcendente, dând astfel răspuns negativ unei probleme care a pasionat omenirea timp de peste două milenii – problema cuadraturii cercului (a construirii, cu rigla şi compasul, a unui pătrat având aceeaşi arie cu cea a unui cerc dat).

Datorăm lui Bernhard Riemann (1826–1866), David Hilbert (1862–1943) şi lui Henri Lebesgue (1875–1941) rezultatele fundamentale (ce nu pot fi prezentate aici), care au deschis posibilităţi imense de aplicare a analizei matematice, conducând la crearea analizei funcţionale şi marcând decisiv limbajul întregii ştiinţe actuale. Relativ recent, sovieticul S.L. Sobolev (n. 1908) şi francezul L. Schwartz (n. 1915) au dat o generalizare naturală a noţiunii de derivată în cadrul teoriei distribuţiilor. Analiza matematică are aplicaţii profunde în studiul ecuaţiilor diferenţiale, în teoria controlului optimal, studiul fenomenelor aleatoare, ca şi în utilizarea superioară a tehnicii moderne de calcul, iar aventura cunoaşterii continuă...

În privinţa comunicării largi a rezultatelor analizei matematice merită să fie, de asemenea, amintite câteva momente importante. Primul manual de analiză scris vreodată a fost cel al lui l'Hospital, tipărit puţin înainte de 1700. Printre manualele larg difuzate şi cunoscute menţionăm pe cele datorate lui L. Euler, A.L. Cauchy, C. Jordan (1838–1922), E. Goursat (1858–1936), Şt. Banach (1892–1945), J. Dieudonné (n. 1906), G.E. Şilov, L. Schwartz.

În ţara noastră o serie de profesori de valoare recunoscută au pus bazele unui învăţământ serios al analizei matematice. Menţionăm aici numele lui *Spiru Haret* (1851–1912) – întemeietorul învăţământului românesc modern, autor al unor studii în mecanica cerească făcute cu metode de analiză matematică, *David Emmanuel* (1854–1941) – autorul unui excelent tratat de teoria funcţiilor şi *Anton Davidoglu* (1876–1958) – având contribuţii notabile în teoria ecuaţiilor diferenţiale.

Printre matematicienii noştri care au obţinut rezultate originale de mare însemnătate, recunoscute ca atare pe plan mondial în analiza matematică, în analiza funcţională, teoria funcţiilor şi teoria potenţialului, subliniem în primul rând numele lui *Dimitrie Pompeiu* (1873–1954) care, printre altele, a introdus noţiunea de derivată areolară şi a demonstrat o teoremă celebră de reprezentare integrală şi numele lui *Traian Lalescu* (1882–1929), autor al unor contribuţii de mare importanţă în teoria ecuaţiilor integrale.

În anii de după al doilea război mondial, matematica românească a continuat să se dezvolte atât pe linia cercetării originale, cât şi ca disciplină de învăţământ sau prin legăturile ei cu alte discipline. Lui *Simion Stoilow* (1887–1961) i se datorează lucrări fundamentale cu rezultate definitive, în teoria topologică a funcţiilor, iar *Miron Nicolescu* (1903–1975) a iniţiat şi dezvoltat teoria funcţiilor policalorice. S. Stoilov este creatorul şcolii româneşti de teoria funcţiilor (analiză complexă), iar M. Nicolescu este profesorul unei întregi pleiade de tineri cercetători, care se afirmă viguros în domeniul analizei funcţionale, teoriei potenţialului şi teoriei operatorilor.

RĂSPUNSURI ȘI INDICAȚII

CAPITOLUL I

1. § 1 (pagina 12). 1. $x \in \{-a, a\}$; $x = a$; $x \in \{-a, a\}$. **2.** Există $n \in \mathbf{N}$ astfel încât $\frac{y}{x} < n$. **4.** $-3 \leqslant x \leqslant 5$, $-3 \leqslant y \leqslant 7 \Rightarrow -6 \leqslant x + y \leqslant 12$. **5.** a) $x \in \mathbf{R}$; b) $\emptyset$; c) $x \in [0, 2]$; d) $x \in [1, \infty)$; e) $x \in (-\infty, -3) \cup (1, \infty)$; f) $x \in \mathbf{R}$; g) $|x - 1| + |x - 1| \cdot |x - 2| > 0 \Rightarrow |x - 1| > 0 \Rightarrow x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$. **6.** $|x - y| > 0$; $|x - y| < \frac{1}{10}$.

7. $\left|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\varepsilon_i| \cdot |a_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_i|$, deoarece $|\varepsilon_i| \leqslant 1$ pentru orice i cuprins între $1 \leqslant i \leqslant n$. **8.** b) Generalizare: dacă $x_1 \leqslant y_1, \ldots, x_n \leqslant y_n$ și $x_1 + \ldots + x_n = y_1 + \ldots + y_n$, atunci $x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n$. **10.** Dacă $b_1 = b_2$, atunci $f(x) = 2 \cdot |x + b_1|$ este evident neinjectivă; putem presupune $b_1 < b_2$ etc. În toate cazurile există o paralelă la axa Ox care intersectează graficul lui f în puncte distincte. **13.** Se obțin mulțimi finite de valori în cazurile b, e, f, g. **14.** $\{0\}$; $\emptyset$; $\mathbf{R}$. $[0, 1)$. **15.** Dacă I este un interval mărginit de lungime l, atunci în I se află cel mult $[l] + 1$ numere întregi. **17.** b) $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z} = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} (k, k + 1)$. **18.** Considerăm qx și există un întreg p unic astfel încât $p \leqslant qx < p + 1$. **20.** $A_1 = [0, 2]$, $A_2 = (-\infty, -1) \cup (3, \infty)$, $A_4 = \mathbf{R}$, $A_5 = (-\infty, -4] \cup [4, \infty)$. $A_6 = [-4, 4)$. **22.** a) $\left|\frac{3n + 1}{n} - 3\right| < \frac{1}{10}$, deci $n > 10$; b) $n > 10^4$; c) $\left|\frac{3n + 1}{n} - 1\right| < \frac{1}{10}$, $\frac{2n + 1}{n} < \frac{1}{10}$ și inegalitatea nu este verificată pentru $n \in \mathbf{N}$. **23.** a) Nici una; b) cinci; c) una; d) 40. **24.** a) Luăm $N_1 = 10$ $\left(\text{dacă } n \geqslant 10, \text{ atunci } \frac{n}{n^2 + n + 1} < \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{10}\right)$; b) $N_2 = 2$. **25.** a) $M = 2$; b) se observă că $n \leqslant \frac{n^4 + 1}{n^2 + 1}$. **26.** $a = 0$, $b = 3$. **27.** În aproximările $\pi \simeq 3{,}14$, $\sqrt{2} \simeq 1{,}41$ erorile absolute sunt $\varepsilon_1 < \frac{0{,}16}{10^2} < \frac{1}{10^2}$, respectiv $\varepsilon_2 < \frac{0{,}43}{10^2} < \frac{1}{10^2}$. Conform teoremei I.3,1°, avem $\pi + \sqrt{2} \simeq 4{,}55$ cu eroarea absolută cel mult $\frac{0{,}59}{10^2} < \frac{1}{10^2}$. Apoi luăm $\pi \simeq 3{,}141$ și $\sqrt{2} \simeq 1{,}414$ cu erorile $\varepsilon_1 < \frac{0{,}6}{10^3} < \frac{1}{10^3}$, respectiv $\varepsilon_2 < \frac{0{,}22}{10^3} < \frac{1}{10^3}$; în acest caz $\pi\sqrt{2} \simeq 3{,}141 \times 1{,}414 \simeq 4{,}44$ cu eroarea absolută cel mult $\varepsilon_1\varepsilon_2 + 3{,}141\varepsilon_2 + 1{,}414\varepsilon_1 < \frac{1}{10^7} + \pi\frac{1}{10^3} + \sqrt{2} \cdot \frac{1}{10^4} < \frac{1}{10^2}$. **28.** Trebuie arătat că $\left|\frac{p + 2q}{p + q} - \sqrt{2}\right| \leqslant \left|\frac{p}{q} - \sqrt{2}\right|$ (aceasta este sensul exact al expresiei „mai bună"); notăm $u = \frac{p}{q}$ și avem de arătat

că dacă $u > 0$, atunci $\left|\frac{u+2}{u+1} - \sqrt{2}\right| \leqslant |u - \sqrt{2}|$, adică $\left|\frac{(u-\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}{u+1}\right| \leqslant$ $\leqslant |u - \sqrt{2}|$ și pentru aceasta, este suficient de observat că $\frac{\sqrt{2}-1}{u+1} \leqslant 1$. **29.** $|a-b| \leqslant 1$; $a = b$. **30.** Presupunem, prin absurd, că $a > b$ și luăm $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$. Rezultă $b + \varepsilon =$ $= b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} < a$, ceea ce contravine ipotezei că $a < b + \varepsilon$. **32.** Pentru $n = 0$, $n = 1$ inegalitatea este evidentă. Presupunem inegalitatea adevărată pentru n și o demonstrăm pentru $n + 1$; avem $x^{n+1} = x \cdot x^n \geqslant x[1 + n(x-1)] = x + nx^2 - nx$. Dar $x + nx^2 - nx \geqslant 1 + (n+1)(x-1)$ pentru că aceasta revine la $n(x-1)^2 \geqslant 0$. Așadar, $x^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)(x-1)$.

I. § 2 (pagina 20). 1. Notăm cu D_f domeniul maxim de definiție al unei funcții reale f. a) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{1\}$; b) $D_f = [1, \infty)$; c) $D_f = (1, \infty)$; d) $D_f = (-\infty, -1] \cup (1, \infty)$; e) $D_f =$ $= (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$; q) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{1, -1, \sqrt[4]{31}, -\sqrt[4]{31}\}$; r) $D_f = [-1, 1]$; s) $D_f = \mathbf{R}$; t) $D_f = (1, \infty)$; u) $D_f = \mathbf{R}$; v) $D_f = \{x \in \mathbf{R} \mid \sin x \geqslant 0\} = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} [2k\pi, \pi + 2k\pi]$; w) $D_f =$ $= \mathbf{R} \setminus \pi\mathbf{Z}$; z) $D_f = \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$. **5.** a) $f(x) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } x \leqslant 0 \\ x, \text{ dacă } x > 0 \end{cases}$; b) $f'(x) = \begin{cases} 2, \text{ dacă } x < 0 \\ 0, \text{ dacă } x \geqslant 0 \end{cases}$;

e) $f(x) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } x \in (-\infty, 0) \cup \left[\frac{1}{n}, \infty\right) \\ n, \text{ dacă } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right) \end{cases}$. **6.** Notăm $x + 1 = u$, deci $f(u) = (u-1)^2 +$ $+ 3(u-1) - 1 = u^2 + u - 3$; apoi, notând $v = 2x - \pi$, avem $f(v) = \cos^2 \frac{\pi + v}{2} =$ $= \sin^2 \frac{v}{2}$ și, în ultimul caz, $f(u) = \left|\frac{1-u}{2}\right|$. **7.** a) Graficul G_g este obținut din G_f prin translație $(x, y) \mapsto (x + a, y)$, adică $(x, y) \in G_f \Leftrightarrow (x + a, y) \in G_g$; b) Graficul lui u este obținut din graficul lui f prin translația $(x, y) \mapsto (x, y + k)$, iar graficul lui v prin transformarea $(x, y) \mapsto (x, ky)$, adică $y = f(x) \Leftrightarrow ky = v(x)$. **8.** Graficul lui $-f$ este simetricul lui G_f în raport cu Ox; graficul lui $|f|$ coincide cu G_f în punctele unde $f \geqslant 0$ și este simetricul acestuia în raport cu Ox în punctele unde $f < 0$. Apoi $(\sigma f(x)) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } f(x) < 0 \\ 1, \text{ dacă } f(x) \geqslant 0 \end{cases}$ etc.

10. a) Condiția $|f(x) - 9| < \frac{1}{100}$ revine la $|2x + 7 - 9| < \frac{1}{100}$, adică $|x - 1| < \frac{1}{200}$ și putem lua $\delta = \frac{1}{200}$; b) Condiția $g(x) < -100$ revine la $\frac{1}{2x-2} < -100$, adică $x \in \left(\frac{199}{200}, 1\right)$. Luăm $\delta = \frac{1}{100}$.

I. § 4 (pagina 27). 1. a) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}; \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}$; b) $9, 8, \frac{25}{3}, 9, \frac{49}{5}, \frac{32}{3}$; c) $2, 2, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{12}, \frac{1}{60}$. **2.** a) Pentru $x = 1{,}02$, $n = 100$ se obține $1{,}02^{100} \geqslant 1 +$ $+ 100 \cdot 0{,}02 = 3$; b) Dacă $0 < a < 1$, atunci $a = \frac{1}{1+r}$, cu $r > 0$, deci $a^n =$ $= \frac{1}{(1+r^n)} < \frac{1}{1+nr}$. Punând condiția $\frac{1}{1+nr} > \frac{1}{10}$, rezultă $n > \frac{9}{r}$ și alegem $N =$ $= \left[\frac{9}{r}\right] + 1$; c) Presupunem $a > 1$, deci $a^n = [1 + (a-1)]^n \geqslant 1 + n(a-1)$. Punem

condiția $1 + n(a-1) > 10$ și rezultă $n > \frac{9}{a-1}$ și, luând $N = \left[\frac{9}{a-1}\right] + 1$, rezultă $a^n > 10$, pentru orice $n \geq N$. Deoarece $a > 1$, rezultă $a^n > 1$ și nu putem avea $a^n < \frac{1}{10}$.

3. a) Dacă mulțimea A este mărginită, atunci există $a < b$ și $A \subset [a, b]$ și dacă $B \subset A$, atunci $B \subset [a, b]$, deci B este mărginită; b) $A_1 \cap A_2$ și $A_1 \setminus A_2$ sunt mulțimi mărginite ca submulțimi ale lui A_1 etc. **4.** 1°. Dacă $a \geq b$, atunci $\max(a, b) = a$, $\min(a, b) = b$ și relațiile de demonstrat devin $a = \frac{a + b + (a - b)}{2}$; $b = \frac{a + b + (b - a)}{2}$ și sunt evidente etc. 2°. Dacă $a \neq b$, atunci avem $a < b$ sau $b < a$ și, în acest caz, $\max(a, b) \neq \min(a, b)$. **5.** a) Minoranții lui A sunt numerele $x \leq -1$, iar majoranții sunt $x \geq 1$, $\min A = -1$, dar $\max A$ nu există; c) $\sin 1 \simeq \sin 57°18'$, $\sin 2 \simeq \sin 114°36'$, $\sin 3 \simeq \sin 171°54' = \sin 8°06'$, deci $\sin 3 < \sin 1 < \sin 2$ $\min A = \sin 3$, $\max A = \sin 2$; d) $\min A = -2$ $\max A = 4$, minoranții (respectiv majoranții sunt numerele $x \leq -2$ (respectiv $x \geq 4$); e) Avem $A = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \ldots\right\}$, $\min A = 0$, $\max A$ nu există; apoi minoranții lui A sunt numerele $x \leq 0$ etc; f) $\min A = \frac{1}{3}$, $\max A$ nu există. Minoranții (respectiv majoranții) lui A sunt numerele $x \leq \frac{1}{3}$ $(x \geq 1)$ **6.** Fie $a = \inf C$, $b = \sup C$. Arătăm că $\sup(-C) = -a$. Pentru orice $x \in -C$, avem $-x \in C$, deci $-x \geq a$, adică $x \leq -a$, deci $-a$ este un majorant al mulțimii $-C$. Apoi $-a$ este cel mai mic majorant al lui $-C$ (într-adevăr, dacă c este un majorant oarecare pentru $-C$, atunci $-c$ este un minorant pentru C, deci $-c \leq a$, adică $-a \leq c$). Așadar $-a = \sup(-C)$ etc. **7.** $\inf M_1 = -\sqrt{2}$, $\sup M_1 = \sqrt{2}$; $\inf M_2 = -\sqrt{2}$, $\sup M_2 = \sqrt{2}$; $\inf M_3 = -2$, $\sup M_3 = 2$. **8.** a) $\inf a_n = 0$, $\sup a_n = 1$; b) Avem $0 \leq a_n \leq \frac{2}{\sqrt{n}} \leq 2$, pentru orice $n \geq 1$ și $\inf a_n = 0$, $\sup a_n = a_0 = \sqrt{2}$; c) $\inf a_n = 0$, $\sup a_n = 1$; d) $\inf a_n = \frac{1}{2}$, $\sup a_n = 2$; e) $\inf a_n = a_0 = 0$, $\sup a_n = 10$; f) $\inf a_n = \cos 1$, $\sup a_n = 1$. **9.** a) $A = (\sqrt{3}, \infty)$, deci $\inf A = \sqrt{3}$, $\sup A = \infty$; c) Avem $\inf A = 0$, $\sup A = \infty$; d) $\inf A = -\infty$, $\sup A = \infty$. **10.** a), c). **11.** Da, nu, da. **12.** a) și c) sunt vecinătăți ale lui ∞, iar b), c) sunt vecinătăți pentru $-\infty$. **13.** În orice vecinătate $(-r, r)$, $r > 0$ a originii se află o infinitate de numere de forma $\frac{1}{n^2}$ $\left(\text{pentru că avem } \frac{1}{n^2} < r, \text{ pentru orice } n > \frac{1}{\sqrt{r}}\right)$. Apoi în orice interval (a, ∞) se află o infinitate de pătrate de numere naturale. **14.** În orice vecinătate a punctului $\alpha = 8$ se află o infinitate de elemente ale fiecărei mulțimi D. **15.** Punctele de acumulare: a) $[-1, 1]$; b) $[-\infty, 1] \cup [5, \infty]$; c) $\pm\infty$; d) $\overline{\mathbf{R}}$; e) originea; f) $D = [0, 1] \cup \{-1\}$. În exemplele c) și e) punctele sunt izolate. **16.** Fie $A = \{a_n \mid n \geq 0\}$ și $a = \sup A$. Avem $a_n \leq b_n$, $\forall n \geq 0$, deci $a \leq b = \inf b_n$. Pentru orice $c \in [a, b]$, avem $a_n \leq a \leq c \leq b \leq b_n$, adică $c \in I_n$, pentru orice $n \geq 0$.

1. § 5 (pagina 35). 1. Funcțiile a, c, h, i, j sunt pare, iar d, e, f, k sunt impare. **2.** Perioadele principale sunt respectiv π, π, $\frac{2\pi}{|\omega|}$. **3.** a) În acest caz, $(x, y) \in G_f \Leftrightarrow (2a - x, y) \in G_f$, adică $y = f(x) \Leftrightarrow y = f(2a - x)$ și aceasta revine la existența relației $f(x) = f(2a - x)$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$. O funcție $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ are graficul simetric față de punctul $(a, 0)$, dacă și numai dacă $f(2a - x) = -f(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$; b) Așadar, $f(x) = f(2a - x) = f(2b - x)$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$ $(a < b)$; înlocuim $x = 2a - y$ și rezultă

că pentru orice $y \in \mathbf{R}$ avem $f(y) = f(2b - 2a + y)$, deci f este periodică cu perioada $2b - 2a$ 4. Dacă $x_1 < x_2$, atunci $x_1^3 < x_2^3$, $x_1^5 < x_2^5$ și rezultă imediat $f(x_1) < f(x_2)$ și $g(x_1) < g(x_2)$. 5. a) f nu este monotonă pe $\mathbf{R}$; b) este strict crescătoare; c) f este strict descrescătoare pe $[0, \pi]$; d) Presupunem $x_1 < x_2$. Diferența $f(x_2) - f(x_1) = \dfrac{x_2^2}{1 + x_2^2} - \dfrac{x_1^2}{1 + x_1^2} = \dfrac{x_2^2 - x_1^2}{(1 + x_2^2)(1 + x_1^2)}$ nu are un semn constant, deci f nu este monotonă pe $\mathbf{R}$ (f este monoton descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ și monoton crescătoare pe intervalul $[0, \infty)$. 6. f rezultă injectivă (dacă $x_1 \neq x_2$, de exemplu, dacă $x_1 < x_2$, rezultă $f(x_1) < f(x_2)$, adică $f(x_1) \neq f(x_2)$). Apoi, dacă $y_1 < y_2$, rezultă $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$; în caz contrar, avem $f^{-1}(y_2) \leqslant f^{-1}(y_1)$ și aplicând f, ar rezulta $y_2 \leqslant y_1$, ceea ce este absurd. 8. a) $a_n = (-1)^n \cdot \dfrac{1}{n}$, $n > 1$; b) $a_n = n^2$, $n \geqslant 0$. 9. Se arată că diferența $a_{n+1} - a_n$ este pozitivă pentru orice $n \geqslant 1$ ($n \in \mathbf{N}$). 10. a) $|f(x)| \leqslant 3$, $\forall x \in \mathbf{R}$; b) $|f(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$, $\forall x \in \mathbf{R}$; $0 \leqslant f(x) < 1$, $\forall x \in \mathbf{R}$; d) $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$, $\forall x \in \mathbf{R}$; e) $|f(x)| \leqslant 2$, $\forall x \in \mathbf{R}$; f) $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$, $\forall x \in \mathbf{R}$. 11. Funcțiile b, f sunt mărginite. 12. Vom nota $m = \inf\limits_{x \in D} f(x)$, $M = \sup\limits_{x \in D} f(x)$. Răspunsurile sunt: a) $m = -1$, $M = 1$; b) $m = 0$, $M = 1$; c) $m = 0$, $M = 1$; d) $m = 0$, $M = 1$.

CAPITOLUL II

II. § 1 (pagina 48). 1. a) Pentru orice $\varepsilon > 0$, condiția $\dfrac{1}{n^2} < \varepsilon$ este îndeplinită pentru orice $n > \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ și, în particular, pentru orice $n \geqslant N$, unde $N = \left[\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right] + 1$. Așadar, $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$. Putem, de asemenea, folosi următorul rezultat general: dacă $(a_n)_{n \geqslant k}$ este un șir crescător și nemărginit, atunci $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{a_n} = 0$, aplicat pentru $a_n = n^2$, $n \geqslant 1$; b) Pentru orice $\varepsilon > 0$, condiția $\dfrac{n}{n^2 + 1} < \varepsilon$, adică $\varepsilon n^2 - n + \varepsilon > 0$ este îndeplinită pentru orice n în cazul când $\varepsilon > \dfrac{1}{2}$; dacă $0 < \varepsilon \leqslant \dfrac{1}{2}$, atunci, luând $N(\varepsilon) = \left[\dfrac{1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon^2}}{2}\right] + 1$, condiția anterioară are loc pentru orice $n \geqslant N(\varepsilon)$. De asemenea, se poate aplica rezultatul general amintit mai sus pentru $a_n = \dfrac{n^2 + 1}{n} = n + \dfrac{1}{n}$, care este un șir crescător și nemărginit. Se poate raționa similar pentru toate celelalte exerciții. 2. Avem de arătat că $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{2}{n} = 0$, $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{3}{n} = 0$, $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{p}{n} = 0$ ($p \geqslant 1$ fixat), $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n}{n} = 1$, ceea ce este evident. 3. Fie $a_n = \dfrac{4n - 1}{n}$, $n \geqslant 1$ și V o vecinătate oarecare a punctului $a = 4$. Așadar există

$r > 0$ astfel încât $(4 - r, 4 + r) \subset V$. Punem condiția $a \in (4 - r, 4 + r)$, adică $|a_n - 4| < r$, adică $\left|\frac{4n-1}{n} - 4\right| < r$, deci $n > \frac{1}{r}$. Așadar, toți termenii a_n ai șirului pentru $n > \frac{1}{r}$ aparțin lui V. Se raționează similar în cazul exercițiului secund. **4.** Șirurile b, c, e, f, g, h sunt convergente. Șirul a) nu este convergent deoarece are trei subșiruri care converg către limite distincte, iar pentru șirul d) $a_{2n} \to 2$, $a_{2n+1} \to 0$, deci șirul $(a_n)_{n\geq 0}$ este divergent. **5.** Există $\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice N natural să existe n natural, $n \geq N$ cu proprietatea că $|a_n - a| \geq \varepsilon$. **6.** Avem $0 \leq a_n \leq 1$ și $a_{n+1} - a_n \geq 0$ pentru orice $n \geq 0$, deci șirul $(a_n)_{n\geq 0}$ este monoton și mărginit. Avem $a_0 = 0$, $a_1 = \frac{1}{5}$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{9}{13}$, $a_4 = \frac{4}{5}$, $a_5 = \frac{25}{29}$, $a_6 = \frac{9}{10}$ etc. și ne este sugerat că $a_n \to 1$. Într-adevăr $|a_n - 1| = \left|\frac{n^2}{n^2+4} - 1\right| = \frac{4}{n^2+4} \to 0$. **7.** a) $a_1 = 1{,}002$; $a_2 = 0{,}252$; $a_3 \simeq 0{,}113$; $a_4 = 0{,}0645$; $a_5 = 0{,}042$. Nu! (avem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0{,}002$); b) Avem $a_{2n} \to 2$ și $a_{2n+1} \to 0$, deci șirul este divergent. **8.** a) Șirul este mărginit; b) Șirul este constant, $a_n = 0$, $\forall n \geq 0$; c) $a_n \to 0$. **9.** a) $0 \leq \frac{\cos^2 n}{n} \leq \frac{1}{n}$; $\left|\frac{2^n - 1}{2^n + 1} - 1\right| = \frac{2}{2^n+1} < \frac{1}{n}$; $\left|\frac{4n+1}{n+1} - 4\right| = \frac{3}{n+1}$; $\left|\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{3}\right| \leq \frac{1}{n}$; c) $n^2 + 1 > n$. **11.** a) Avem $|a_{n+2} - a_n| = |a_{n+2} - a + a - a_n| \leq |a_{n+2} - a| + |a - a_n|$. Deoarece $a_n \to a$, rezultă $|a_n - a| \to 0$, $|a_{n+2} - a| \to 0$, deci $a_{n+2} - a_n \to 0$; b) Dacă $a_n \to a$, atunci în afara oricărei vecinătăți a lui a se află un număr finit de termeni ai șirului $(a_n)_{n\geq 0}$, deci un număr finit de termeni ai șirului $(a_{p(n)})_{n\geq 0}$. Așadar, $a_{p(n)} \to a$. **13.** $a + \frac{1}{n} \to a$; luăm $b_n = \frac{a}{n}$, $c_n = \frac{1}{n}$. **14.** Pentru orice $\varepsilon > 0$ condiția $\sqrt{n} > \varepsilon$ este îndeplinită pentru orice $n > \varepsilon^2$, deci pentru orice $n \geq N$, unde $N = [\varepsilon^2] + 1$. Apoi $2^{n-1} \geq n$ și $\frac{n^2+4}{n} \geq n$ pentru orice $n \geq 1$ și aplicăm teorema II.4,2°. **15.** De exemplu, $a_n = -n + (-1)^n$, $n \geq 1$. **16.** Dacă un șir $(a_n)_{n\geq 0}$ este nemărginit, atunci el nu poate fi convergent, conform teoremei II.3. Șirurile $(2^n)_{n\geq 0}$, $((-2)^n)_{n\geq 0}$ sunt nemărginite, deci divergente; primul are limita ∞ și al doilea nu are limită.

II. § 2 (pagina 57). 1. a) Dacă $x_n \to \alpha$, $x_n \neq \alpha$, atunci $x_n + 5 \to \alpha + 5$, deci $f(x_n) \to f(\alpha)$. Așadar, $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = f(\alpha)$, adică $\lim\limits_{x\to\alpha}(x + 5) = \alpha + 5$; b) Dacă $x_n \to \alpha$, $x_n \neq \alpha$, atunci $x_n^2 \to \alpha^2$, deci $\lim\limits_{x\to\alpha} x^2 = \alpha^2$; c) $\lim\limits_{x\to\alpha}(x^2 + 5) = \alpha^2 + 5$. **2.** $\alpha = 1$; dacă $x_n \to 1$, $x_n \neq 1$, atunci șirul $f(x_n) = \frac{1}{2x_n - 2}$ nu are limită. În cazul secund, funcția f nu are limită în punctele $x = 0$, $x = 2$. **3.** a) Fie V o vecinătate oarecare a punctului $l = \frac{2}{3}$, deci există $\varepsilon > 0$ astfel încât $\left(\frac{2}{3} - \varepsilon, \frac{2}{3} + \varepsilon\right) \subset V$. Notăm $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$, $x \neq -2$ și punem condiția ca $f(x) \in \left(\frac{2}{3} - \varepsilon, \frac{2}{3} + \varepsilon\right)$, adică $\left|\frac{x+1}{x+2} - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon$ sau, echivalent, $\frac{|x-1|}{|x+2|} < 3\varepsilon$. Alegem δ astfel încât $0 < \delta < 2$ și $\delta < 3\varepsilon$ și notăm $U = (1 - \delta, 1 + \delta)$. Atunci, dacă $x \in U$, $x \neq 1$, avem $x + 2 > 3 - \delta > 1$, deci $\frac{1}{|x+2|} < 1$ și $|x - 1| < \delta < 3\varepsilon$ și, ca atare, am arătat că dacă $x \in U$, $x \neq 1$, avem $f(x) \in V$ și, în concluzie, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \frac{2}{3}$; b) Similar

4. Se aplică teorema II.7 şi avem $f(0-0) = -\infty$, $f(0+0) = \infty$, $g(0-0) = -\infty$, $g(0+0) = \infty$ şi, ca atare, f şi g nu au limită în origine. Apoi $(f-g)(x) = 3x$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{5x^2+1}{2x^2+1}$ şi $\lim\limits_{x\to 0}(f-g)(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = 1$ etc. 5. a) Fie V o vecinătate oarecare pentru ∞; alegem $\varepsilon > 0$ astfel încât $(\varepsilon, \infty] \subset V$ şi punem condiţia $\frac{1}{(x-1)^2} > \varepsilon$, adică $(x-1)^2 < \frac{1}{\varepsilon}$, sau $|x-1| < \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Luând $U = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$ rezultă că pentru orice $x \in U$ avem $\frac{1}{(x-1)^2} \in V$, deci $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2} = \infty$, folosind definiţia II.4; b) Condiţia (4) nu poate fi îndeplinită pentru nici o valoare $l \in \overline{\mathbf{R}}$, deoarece orice vecinătate a punctului $x = 1$ conţine puncte unde $f(x)$ este oricât de mare sau oricât de mic, altfel, $f(1-0) = -\infty$, $f(1+0) = \infty$. 6. Funcţiile f, g au limită în orice punct, iar h are limită în orice punct $x \neq 1$. 7. Funcţiile g şi h nu au limită în punctul $x = 0$ dar f, g, h au limită în orice punct $x \neq 0$. 8. a) $f(0-0) = f(0+0) = 0$; b) $f(0-0) = -1$; $f(0+0) = 1$; c) $f(0-0) = 0$, $f(0+0) = 2$; d) $f(1-0) = 1$, $f(1+0) = 2$; e) $f(7-0) = 9$; $f(7+0) = 9$; $f(2-0) = f(2+0) = 4$. 9. Pentru $k = -2$; pentru nici o valoare a lui k. 10. a) $S_{f,\alpha} = 0$; b) $f(2+0) = 8$, $f(2-0) = 3$, deci $S_{f,\alpha} = 5$; c) $f(1+0) = k+2$, $f(1-0) = -1$, deci $S_{f,\alpha} = k+3$.

II. § 3 (pagina 63). 1. Se aplică teorema II.8. 2. Aşadar există $M > 0$ astfel încât $|b_n| \leqslant M$ pentru orice $n \geqslant 0$. Atunci, $|a_n b_n - 0| \leqslant M \cdot |a_n|$ şi, aplicând teorema II.4.1°, rezultă $a_n b_n \to 0$. 3. Fie $a_n \to a$, $a \neq 0$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n} = \frac{a}{a} = 1$. Pentru partea secundă luăm $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ şi avem $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = -1$. 4. $c_n = \frac{n^2\left(2 + \frac{7}{n} - \frac{10}{n^2}\right)}{n^2\left(5 + \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{2 + \frac{7}{n} - \frac{10}{n^2}}{5 + \frac{1}{n^2}}$ şi luăm $a_n = 2 + \frac{7}{n} - \frac{10}{n^2}$, $b_n = 5 + \frac{1}{n^2}$. Evident $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{2}{5}$. 5. Se procedează ca la exerciţiul precedent, a) $\frac{1}{2}$; b) 1; c) 0; d) 8. 6. Avem $1 \leqslant \sqrt[n]{1^p + 2^p + \ldots + n^p} \leqslant \sqrt[n]{n \cdot n^p} = (\sqrt[n]{n})^{p+1}$ şi $\sqrt[n]{n} \to 1$ etc. 7. 1°. Dacă l e finit, luăm $a_n = \frac{l}{n}$, $b_n = \frac{1}{n}$; pentru $l = \infty$, $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{n^2}$; pentru $l = -\infty$, $a_n = -\frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{n^2}$; 2°. Pentru $l \in \mathbf{R}$, luăm $a = n + l$, $b_n = n$; pentru $l = \infty$, $a_n = n^2 + n$, $b_n = n$ etc.

II. § 4 (pagina 73). 1. a) 0; b) 1; c) 0; d) 4; e) ∞; f) 0; g) 0; h) 0; i) 1; j) ∞; k) ∞; l) ∞; m) $-\infty$; n) 0; o) 2; p) $\frac{1}{3}$; q) 0; r) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n \cdot \frac{n(n+1)}{2}}{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n}{2n+1} = \frac{3}{2}$; s) $\frac{1}{3}$; t) $\frac{1}{2}$; u) 100; v) ∞; w) 0; y) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n - 1}{a^{n^2} + 1} = \begin{cases} -1 \text{ dacă } |a| < 1 \\ 0, \text{ dacă } a = 1 \\ 0, \text{ dacă } |a| > 1 \end{cases}$;

z) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^{2n}-1}{a^{2n}+1} = \begin{cases} -1, \text{ dacă } |a| < 1 \\ 1, \text{ dacă } |a| > 1 \\ 0, \text{ dacă } a = \pm 1 \end{cases}$. **2.** Dacă $R = \dfrac{P}{Q}$, avem $\dfrac{R(n)}{R(n+1)} = \dfrac{P(n)\cdot Q(n+1)}{Q(n)\cdot P(n+1)} \to 1$, deoarece $\dfrac{P(n)}{P(n+1)} \to 1$, $\dfrac{Q(n+1)}{Q(n)} \to 1$, ($P$, Q fiind funcţii polinomiale). **3.** $a_n = \dfrac{1\cdot 3}{2}\cdot\dfrac{2\cdot 4}{3^2}\cdot\dfrac{3\cdot 5}{4^2}\cdots\dfrac{(n-2)\cdot n}{(n-1)^2}\cdot\dfrac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \dfrac{n+1}{2n} \to \dfrac{1}{2}$. **4.** $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$. **5.** $|b| < 1$, a arbitrar sau $b \neq 1$, $a = \dfrac{1}{1-b}$. **6.** Arătăm prin inducţie că $0 \leqslant a_n \leqslant 2$ pentru orice $n \geqslant 1$. Pentru $n = 1$ afirmaţia este evidentă; apoi dacă $0 \leqslant a_n \leqslant 2$, atunci $0 \leqslant a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \leqslant \sqrt{2+2} = 2$. Şirul este crescător; într-adevăr, avem $a_{n+1} \geqslant a_n$, adică $\sqrt{2+a_n} \geqslant a_n$, $a_n^2 - a_n - 2 \leqslant 0$ sau $(a_n-2)(a_n+1) \leqslant 0$, deoarece $0 \leqslant a_n \leqslant 2$. Aşadar, şirul este convergent şi fie $a_n \to l$, deci $l \geqslant 0$ şi, din relaţia de recurenţă, $l = \sqrt{2+l}$, de unde $l = 2$. **7.** Pentru $n = 0, 1, 2$ relaţia se verifică; o presupunem adevărată pentru orice $k \leqslant n$ şi o probăm pentru $n+1$, adică presupunem $a_{n-2} = \dfrac{2a_1+a_0}{3} + (-1)^{n-1}\dfrac{a_1-a_0}{3\cdot 2^{n-3}}$ şi $a_{n-1} = \dfrac{2a_1+a_0}{3} + (-1)^n\cdot\dfrac{a_1-a_0}{3\cdot 2^{n-2}}$ şi probăm acelaşi lucru pentru a_n, folosind relaţia $a_n = \dfrac{a_{n-1}+a_{n-2}}{2}$. Apoi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{2a_1+a_0}{3}$. **8.** $x_{n+1} - 1 = (x_n-1)^2$ şi notăm $y_n = x_n - 1$, $y_1 \in [0, 1]$ etc. **9.** Evident $c_n \geqslant 0$. Mai mult, se verifică prin inducţie că avem $c_n \geqslant \sqrt{2}$; într-adevăr $c_1 \geqslant \sqrt{2}$ şi dacă $c_n \geqslant \sqrt{2}$, atunci $c_{n+1} = \dfrac{2+c_n^2}{2c_n} \geqslant \sqrt{2}$, decarece $(c_n - \sqrt{2})^2 \geqslant 0$. Apoi $c_{n+1} - c_n = \dfrac{2+c_n^2}{2c_n} - c_n = \dfrac{2-c_n^2}{2c_n} < 0$. Aşadar, şirul $(c_n)_{n\geqslant 1}$ este descrescător şi mărginit inferior, deci convergent. **10.** Alegem q astfel încât $l < q < 1$. Conform ipotezei, există N astfel încât $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < q$ pentru orice $n \geqslant N$, deci $a_{N+1} < qa_N$, $a_{N+2} < qa_{N+1} < q^2a_N$ şi, în general, $0 < a_{N+k} < q^k\cdot a_N$. Pentru $k \to \infty$ rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Notăm $a_n = \dfrac{n}{2^n}$; avem $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n} = \dfrac{1}{2}$, deci, conform celor spuse mai sus, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ etc. **11.** a) Pentru orice $k \geqslant 1$, $\dfrac{1}{4k^2-1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2k-1} - \dfrac{1}{2k+1}\right)$, deci $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4n^2-1} = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{4k^2-1} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{2n+1}\right) = \dfrac{1}{2}$; b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{1}{k^2+k} = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=2}^{n}\left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n+1}\right) = \dfrac{1}{2}$; c) $-\dfrac{1}{3}$; d) 2; e) $\dfrac{1}{21}$; f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n!} = 2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n-1)!} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!} = 2\left(1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dots\right) + \left(\dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \dots\right) = 2e + (e-1) = 3e - 1$. **12.** Sumele parţiale de rang n sunt $s_n = 1 - \dfrac{1}{\sqrt[3]{n+1}} \to 1$ şi respectiv $s_n = \sqrt[3]{n+1} - 1 \to \infty$.

II. § 5 (pagina 76). 1. a) $f(-5-0) = -\infty$; $f(-5+0) = \infty$; b) dacă $x_n \to 3$, $x_n < 3$, atunci $\dfrac{1}{x_n-3} \to -\infty$ şi $2^{\frac{1}{x_n-3}} \to 0$, deci $f(3-0) = 1$; similar, dacă $x_n \to 3$, $x_n > 3$,

atunci $\frac{1}{x_n - 3} \to \infty$, $2^{\frac{1}{x_n - 3}} \to \infty$ și $f(3+0) = 0$; c) $f(0-0) = f(0+0) = \infty$; d) $f(-1-0) = f(-1+0) = \infty$. De remarcat că limita există (fără a fi finită) doar în cazurile c și d. **2.** a) ∞; b) 2; c); 0; d) 0; e) $-\infty$; f) 3; g) ∞; h) $-\infty$; i) ∞; j) 8. **3.** Presupunem că există $l = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. Arătăm atunci că există limita $\lim\limits_{x \to \infty} f(-x)$ și că este egală cu l. Într-adevăr, fie un șir oarecare $x_n \to \infty$, atunci $-x_n \to -\infty$ și, conform ipotezei, $f(-x_n) \to l$. Reciproca se demonstrează similar. Regula stabilită poate fi formulată și astfel: limita $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ există dacă (punând $x = -z$) există limita $\lim\limits_{z \to -\infty} f(-z)$ și în acest caz, cele două limite sunt egale; pe scurt, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{z \to \infty} f(-z)$. Aplicație:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 - x) = \lim\limits_{z \to \infty} (z^2 + z) = \infty$; b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x + \sqrt{x^2+1}) = \lim\limits_{z \to \infty} (\sqrt{z^2+1} - z) =$

$$= \lim_{z \to \infty} \frac{1}{\sqrt{z^2+1} + z} = 0; \quad \text{c)} \lim_{x \to -\infty} \frac{4x^2+1}{7x^2+3} = \lim_{z \to \infty} \frac{4z^2+1}{7z^2+3} = \lim_{z \to \infty} \frac{z^2\left(4 + \frac{1}{z^2}\right)}{z^2\left(7 + \frac{3}{z^2}\right)} =$$

$$= \lim_{z \to \infty} \frac{4 + \frac{1}{z^2}}{7 + \frac{3}{z^2}} = \frac{\lim\limits_{z \to \infty}\left(4 + \frac{1}{z^2}\right)}{\lim\limits_{z \to \infty}\left(7 + \frac{3}{z^2}\right)} = \frac{4}{7}; \quad \text{d)} \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{z \to \infty} \frac{-z}{\sqrt{z^2+1}} =$$

$$= \lim_{z \to \infty} \frac{-z}{z\sqrt{1 + \frac{1}{z^2}}} = -\lim_{z \to \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{z^2}}} = -1.$$

II. § 6 (pagina 80). 1. a) Funcția admite doar asimptota orizontală $y = 2$ (spre $-\infty$ și spre $+\infty$); b) $x = -1$, $x = 1$ asimptote verticale; $y = 0$ asimptotă orizontală spre $-\infty$ și spre $+\infty$; c) $x = 0$, $x = -2$, $y = 0$; d) $x = 0$ asimptotă verticală la dreapta și $y = 0$ asimptotă orizontală spre ∞; e) $x = -1$; $y = -1$ (respectiv $y = 1$) asimptotă orizontală spre $-\infty$ (respectiv $+\infty$); f) $y = -1$ (respectiv $y = 1$) asimptotă orizontală spre $-\infty$ (respectiv ∞), $x = -2$ asimptotă verticală; g) $x = 1$, $x = 5$ verticale, $y = 0$ orizontală; h) $x = 0$ verticală, $y = x + 1$ oblică (spre $-\infty$ și $+\infty$); i) $D = (-\infty, 0)$ și $f(x) = 0$, $\forall x \in D$. În acest caz $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$; j) $x = 0$ verticală; $y = 1$ spre $-\infty$ și ∞; k) $x = 1$ verticală; $y = x + 1$ oblică spre $+\infty$ și $y = -x - 1$ oblică spre $-\infty$; l) $D = \mathbf{R}$. Funcția nu are asimptote. **2.** a) $a = 5$, b nedeterminat; b) $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{4}$; c) $a = 8$, $b = 2$. **3.** $f(x) = \frac{1}{\sin \pi x}$.

II. § 7 (pagina 92). 1. a) -1; b) 0; c) 0; d) 0; e) 91; f) ∞; g) $-\infty$; h) ∞; i) $-\infty$ j) $2\sqrt{6}$; l) $-\infty$; m) 0; n) ∞; p) -1; q) ∞; r) ∞; s) 1; t) -1; u) 1; v) 1. **2.** a) $\frac{m}{n}$; b) 1, dacă $m = n$; 0, dacă $m < n$; ∞, dacă $m > n$. **3.** a) $\frac{2}{3}$; b) $\frac{2}{3}$; c) ∞; d) 0; e) $-\infty$; f) 2; g) -2. **5.** $P(x) = (ax+b)Q(x) + r$, $\operatorname{gr} r < \operatorname{gr} Q$; $\lim\limits_{x \to \infty} \left[\frac{P(x)}{Q(x)} - (ax+b)\right] =$

$= \lim\limits_{x \to \infty} \frac{r}{Q(x)} = 0$. **6.** Alegem șirurile $x_n' = \frac{1}{n\pi}$, $x_n'' = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ $(n \geq 1)$ care converg către zero, iar $f(x_n') \to 0$, $f(x_n'') \to 1$, deci limita $\lim\limits_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$ nu există etc.

7. a) $\frac{1}{3}$; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{1}{2\sqrt{a-b}}$; d) $\frac{1}{2}$; e) $-\frac{1}{2}$; f) 1; g) ∞; h) $\frac{5}{4}$; i) 1; j) $\frac{1}{4}$; k) 6; l) 0; m) 0; n) 0; o) $\frac{1}{e}$. 8. a) $l_s = 0$; $l_d = \infty$; b) $l_s = 0$, $l_d = \infty$; c) $l_s = l_d = \infty$; d) $l_s = \infty$; $l_d = 0$; e) $l_s = l_d = \infty$. 9. a) $-\infty$; b) ∞; c) 0; d) ∞; e) 0; f) ∞; g) $-\infty$; h) 0.

10. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{P(x)}{\ln x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n}\right)}{\ln x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{\ln x} \cdot \lim\limits_{x\to\infty}\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n}\right) = a_0 \cdot \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{\ln x} = \infty$. Se folosește esențial faptul că $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \infty$. 11. a) $x = 0$ este asimptotă verticală la dreapta $\left(\text{deoarece } \lim\limits_{x\to 0,\, x>0} x \cdot e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{z\to\infty} \frac{e^z}{z} = \infty\right)$; $y = x + 1$ este asimptotă oblică spre $-\infty$ și spre $+\infty$; b) $y = 1$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ și spre ∞; k) $x = \frac{5}{3}$ este asimptotă verticală, $y = -\frac{1}{3}$ asimptotă orizontală spre $-\infty$, $y = \frac{1}{3}$ asimptotă orizontală spre ∞; l) $x = 1$, $x = -1$ sunt asimptote verticale. 12. a) e^{-4}; b) e; c) e; d) 1; e) 1; f) e. 13. Logaritmând, avem de arătat că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \dots + \ln a_n}{n} = \ln a$, ceea ce rezultă din faptul că, dacă $c_n \to a$ (în R), atunci $\frac{1}{n}(c_1 + c_2 + \dots + c_n) \to a$. 14. $k = 1$.

CAPITOLUL III

III. § 1 (pagina 107). 1. a) Dacă $x_n \to 1$, $x_n \neq 0$, atunci $f(x_n) = \frac{1}{x_n} \to 1$, adică $f(x_n) \to f(1)$; similar, dacă $x_n \to -5$, atunci $\frac{1}{x_n} \to -\frac{1}{5}$, adică $f(x_n) \to f(-5)$; b) dacă $x_n \to 2$, $x_n \leqslant 2$, atunci $f(x_n) = \sqrt{2 - x_n} \to 0 = f(0)$. 2. Condiția $|f(x) - 1| < \frac{1}{10}$ se scrie $|x^3 - 1| < \frac{1}{10}$ și cum $|x+1| \leqslant 4$ (deoarece $0 \leqslant x \leqslant 3$), condiția anterioară este îndeplinită dacă $|x - 1| < \frac{1}{40}$, adică pentru $\delta = \frac{1}{40}$. Este adevărat că f este continuă în punctul $x=1$, dar trebuie verificat că pentru orice $\varepsilon > 0$ $\left(\text{și nu numai pentru } \varepsilon = \frac{1}{10}\right)$ există $\delta > 0$ astfel încât $|x - 1| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(1)| < \varepsilon$. 3. a, b, d, h. 4. Orice punct $x \neq 0$. 5. Avem $f(3-0) = 6$, $f(3+0) = 3a$, $f(3) = 6$ și continuitatea lui f în punctul $x = 3$ are loc pentru $a = 2$. 6. Funcția f este continuă pe intervalele $(-\infty, 2)$, $(2, \infty)$, fiind elementară. Condiția de continuitate în punctul $x = 2$ este $4 + a = 2a + b$; apoi limitele la stânga și la dreapta ale raportului considerat sunt egale cu 4 și a, deci $4 + a = 2a + b$, $a = 4$. Atunci $a = 4$, $b = 0$. 7. $x^2 - 2x \leqslant f(x) \leqslant x^2 + 2x$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Pentru $x = 0$ rezultă $f(0) = 0$. Apoi pentru orice șir $x_n \to 0$ rezultă $x_n^2 - 2x_n \leqslant f(x_n) \leqslant x_n^2 + 2x_n$, deci $f(x_n) \to 0$. 8. $f(0-0) \neq f(0+0)$, $g(0-0) = 0$ și $g(0+0) = \infty$. 10. a) În punctele $x \neq 0$ funcția f este continuă, fiind elementară, iar în punctul $x = 0$ avem $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$; într-adevăr, $\left|x \sin\frac{1}{x} - 0\right| \leqslant |x|$, adică $\lim\limits_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$; b) în orice vecinătate V a originii, funcția f este nenulă, dar se anulează de o infinitate de ori, deci nu poate fi monotonă pe V. 12. a) $f = 0$ este continuă;

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } x < 0 \\ \frac{1}{2}, \text{ dacă } x = 0 \text{ și } f \text{ este continuă} \\ 1, \text{ dacă } x > 0 \end{cases}$$

în $\mathbf{R}\setminus\{0\}$; d) $f = \operatorname{sgn}$ și este continuă în $\mathbf{R}\setminus\{0\}$. **18.** Fie $x_0 \in I$ și $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } x \in I\setminus\{x_0\} \\ 0, \text{ dacă } x = x_0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } x \in I\setminus\{x_0\} \\ 1, \text{ dacă } x = x_0 \end{cases}$. Funcțiile f, g sunt discontinue în x_0, dar $f + g = 1$, $fg = 0$.

III. § 2 (pagina 115). 1. Funcția f este continuă; faptul că f nu este mărginită pe $[1, \infty)$ rezultă observând că pentru orice M există $x \in [1, \infty)$ astfel încât $f(x) > M$. **2.** Marginile lui f sunt -1 și 0, dar nu coincid cu vreo valoare $f(x)$, $x \in (1, 2)$, deci nu sunt atinse etc. **3.** Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, există $\delta > 0$ astfel încât pentru orice $x > \delta$ avem $|f(x)| < 1$. Pe intervalul compact $[0, \delta]$ funcția f este mărginită (fiind continuă), deci există $M > 0$, astfel încât $|f(x)| \leqslant M$ pentru orice $x \in [0, \delta]$. Așadar, $|f(x)| \leqslant \max(M, 1)$ pentru orice $x \in [0, \infty)$, deci f este mărginită. **5.** Nu, pentru că f nu este continuă în $x = 0$. **6.** Așadar, există $M > 0$ astfel încât $|f(x)| \leqslant M$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Considerăm funcția continuă $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = f(x) - x$. Avem $g(-M) = f(-M) + M \geqslant 0$ și $g(M) = f(M) - M \leqslant 0$, deci, conform lemei (teorema III.6), există $\xi \in [-M, M]$ astfel încât $g(\xi) = 0$, adică $f(\xi) = \xi$. **7.** a) $f(0)\cdot f(4) < 0$; b) $f(-1)\cdot f(0) < 0$; c) presupunem $a > 0$, avem $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ și $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, deci există puncte $a_1 < b_1$ din $\mathbf{R}$ astfel încât $f(a_1)\cdot f(b_1) < 0$, deci funcția continuă f se va anula pe (a_1, b_1); d) $f(1) = 0$. **8.** a) $x \in (0, 1) \cup (2, \infty)$; b) $x \in (-\infty, -5) \cup (1, 2)$; c) $x \in A_1 \cup A_2$ unde $A_1 = \bigcup\limits_{k\leqslant -1} (k\pi, (k+1)\pi)$, k impar și $A_2 = \bigcup\limits_{k\geqslant 0} (k\pi, (k+1)\pi)$, k par. **9.** $a = \sqrt{5}$.

CAPITOLUL IV

IV. § 1 (pagina 128). 1. g) Nu este derivabilă în $x = 0$, $f'(0) = +\infty$; h) Nu este derivabilă în $x = 0$, $f'_s(0) = 0$, $f'_d(0) = 1$. **2.** c) Nu este derivabilă în $x = 0$. **3.** $f(x) - f(0) = x \sin\frac{1}{x} \to 0$, când $x \to 0$. Dar $\frac{f(x) - f(0)}{x} = \sin\frac{1}{x}$ nu are limită pentru $x \to 0$. **4.** $\frac{f(x) - f(0)}{x} = x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x}$ și $\alpha - 1 > 0$ implică $x^{\alpha-1} \to 0$ pentru $x \to 0$, deci $f'(0) = 0$ **5.** Nu, căci $f'(0) = \infty$. **8.** $a = -1$, $b = 1$. **9.** $f'_s(-1) = -\infty$. $f'_d(-1) = \infty$, $f'_s(0) = f'_d(0) = 0$, $f'_s(+1) = -\infty$, $f'_d(+1) = +\infty$. **12.** a) $x = 2$ punct de întoarcere; b) $x = 1$ punct de întoarcere; c) $x = 1$ punct unghiular; d) $x = 0$ și $x = 1$ puncte unghiulare. **13.** derivabilă în $\mathbf{R}\setminus\{0\}$. Punctele cerute sunt $x \in (-\infty, 0) \cup \{\sqrt{2}\}$. **14.** Tangenta în $x_0 = \pm 1$; $x_0 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

IV. § 2 (pagina 143). 1. a) $f'(x) = 3x^2 - 1$, $E = \mathbf{R}$, $F = R$; b) $f'(x) = 100x^{99} + 2x^{43}$, $F = E = \mathbf{R}$; c) $f'(x) = \cos x - \sin x$, $F = E = \mathbf{R}$; h) $f'(x) = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $E = [0, \infty)$,

$F = (0, \infty)$; o) $f'(x) = \dfrac{1-x}{2\sqrt{x(x+1)^3}}$; $E = [0, \infty)$, $F = (0, \infty)$. **2.** d) $x = -1$; e) $x = \dfrac{1}{e}$, f) $x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$; g) $x = k\pi + \dfrac{\pi}{4}$, $k \in \mathbf{Z}$; h) $x = 0$. **3.** a) 0; b) $\dfrac{7}{2}$. **5.** $(f+g)(x) = 2x$ și $(fg)(x) = x^2 - |x|^3 = 0$, deci $f+g$, fg sunt derivabile pe $\mathbf{R}$. Nederivabilitatea funcțiilor f și g în $x = 0$ se datorează prezenței lui $|x|$. **6.** $\dfrac{x\sqrt{x} - 0}{x} = \sqrt{x} \to 0$ pentru $x \to 0$, deci $f'(0) = 0$. **7.** $f'(x) = 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}$ nu are limită când $x \to 0$, căci $2x \sin \dfrac{1}{x} \to 0$, iar $\cos \dfrac{1}{x}$ nu are limită; apoi $f'(0) = 0$. **8.** a) $y - 1 = 2(x - 1)$; d) $y - 0 = 1(x - 1)$; f) $y - \sin \dfrac{\pi}{4} = 2\left(\cos \dfrac{\pi}{4}\right)\left(x - \dfrac{\pi}{8}\right)$ etc. **13.** $(f^{-1})'(4) = \dfrac{1}{f'(0)} = \dfrac{1}{4}$. **14.** a) Notăm $df(x_0) = \varphi$, deci $\varphi(x) = f'(x_0) \cdot x$, $\forall x \in \mathbf{R}$. În primul caz $\varphi(x) = 7x$, apoi $\varphi(x) = 2x$ etc.; b) $df = f'(x)dx$, deci $df = (3x^2 - 1)dx$ etc. **15.** c) $a = 1$, $a = -3$; $a = -2$. **16.** b) $f'(x) = 0$ pentru $x = \dfrac{1}{e}$, f'' nu se anulează; c) f' nu se anulează, $f''(x) = 0$ pentru $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; e) $f'(x) = 0$ pentru $x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$, f' nu se anulează; i) $f'(x) = 0$ pentru $x = \dfrac{1}{4}$, f'' nu se anulează; l) f' nu se anulează, $f''(x) = 0$ pentru $x = 0$. **17.** a) $f^{(n)}(x) = 0$ pentru $n \geqslant 4$; b) $f^{(n)}(x) = n!$; c) $f^{(n)}(x) = (-1)^n \dfrac{n!}{x^{n+1}}$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$; d) $f'(x) = \cos x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)$, $f''(x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \sin(\pi + x)$, $f'''(x) = \cos(\pi + x) = \sin\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right)$ și prin inducție $f^{(n)}(x) = \sin\left(\dfrac{n\pi}{2} + x\right)$ etc. **18.** a) $f'(x) = -\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{(x - a_i)^2}$ $(x \in E)$, deci $f'(x) < 0$; b) Din $P(x) = (x - a_1) \dots (x - a_n)$ rezultă $P'(x) = (x - a_2) \dots (x - a_n) + (x - a_1)(x - a_3) \dots (x - a_n) + \dots + (x - a_1) \dots (x - a_{n-1})$ de unde rezultatul etc. **19.** Demonstrația se face prin inducție; pentru $n = 1$ relația este verificată. Dacă ea este verificată pentru n, să arătăm că este verificată pentru $n + 1$. Avem $(fg)^{(n+1)}(x) = ((fg)^{(n)})' = \left(\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)\right)' = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k (f^{(n-k)} g^{(k)})'(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k (f^{(k+1-k)} g^{(k)} + f^{(n-k)} g^{(k+1)})(x) = \sum\limits_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k (f^{(n+1-k)} g^{(k)})(x)$. În ultima egalitate am folosit faptul că $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$.

IV. § 3 (pagina 150). 1. $v(t) = s'(t) = 2t - 2$, $v(1) = 0$; $a(t) = s''(t) = 2$, $a(1) = 2$; mișcarea este uniform accelerată; pentru $t < 1$ viteza este negativă, se anulează pentru $t = 1$ și apoi devine pozitivă. Dar $s(0) = 1$, $s(1) = 0$. Interpretarea mecanică este: mobilul se deplasează într-un sens al axei pentru $0 < t < 1$, iar apoi în sensul opus, mișcarea fiind uniform accelerată. **2.** $k = -1$, $v(t) = s'(t)$, $a(t) = s''(t)$ etc. **3.** $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 24t$, deci v este minim pentru $t = 4$ și $v_{min} = v(4) = -48$. Apoi $a(t) = 6t - 24$. **4.** $\dfrac{dm}{dv} = \dfrac{m_0}{c} \cdot \dfrac{9\sqrt{2}}{32}$. **5.** $i(t) = -2\pi \sin \pi t$; maximul este

atins în punctele unde $\sin \pi t = -1$ şi minimul în $\sin \pi t = 1$. **7.** b) $f(x) \simeq x$, deci $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1$; c) Aproximarea liniară a funcţiei $f(x) = \sqrt{3 + x} - 2$ în vecinătatea lui $x_0 = 1$ este $\frac{x - 1}{4}$, deci $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{3 + x} - 2}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{\frac{x - 1}{4}}{x - 1} = \frac{1}{4}$. **8.** Dacă $f(x) = \sqrt{x}$, atunci $f(x) \simeq f(4) + f'(4)(x - 4)$ şi deci $\sqrt{4{,}17} \simeq f(4) + \frac{1}{4}(4{,}17 - 4)$, deci $\sqrt{4{,}17} \simeq 2{,}042$; luând $f(x) = \sqrt[3]{x}$ avem $\sqrt[3]{29} \simeq 3{,}074$; luând $f(x) = \ln x$, găsim $\ln 1{,}11 \simeq 0{,}11$; găsim, în mod analog, $\sin 33^\circ \simeq \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{60} \simeq 0{,}5452$, $\cos 56^\circ \simeq \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{45} \simeq 0{,}560$.

IV. § 4 (pagina 159). 8. Avem $\lim\limits_{\lambda \to 0,\, \lambda > 0} f(\lambda) = 0$, $\lim\limits_{\lambda \to \infty} f(\lambda) = 0$, punând $\lambda = \frac{1}{x}$; apoi avem $\lim\limits_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda > 0}} f'(\lambda) = 0$, iar $f'(\lambda) = 0$ este echivalent cu $e^{\frac{1}{\lambda}} - 5\lambda e^{\frac{1}{\lambda}} + 5\lambda = 0$ sau, cu substituţia $x = \frac{1}{\lambda}$, $e^x - 5e^x \cdot \frac{1}{x} + \frac{5}{x} = 0$, adică $(5 - x)e^x - 5 = 0$. Dar funcţia $g(x) = (5 - x)e^x - 5$ are proprietatea lui Darboux şi cum $g(4) = e^4 - 5 > 0$ $g(5) = -5 < 0$, rezultă că există $x_0 \in (4, 5)$ cu $g(x_0) = 0$, $\lambda_0 = \frac{1}{x_0}$ va fi singurul punct critic cu $\frac{1}{5} < \lambda_0 < \frac{1}{4}$. **4.** Funcţia $x \mapsto |3x - 2| - 5$ nu este derivabilă în $x = \frac{2}{3} \in \left[-1, \frac{7}{3}\right]$, deci nu sunt îndeplinite condiţiile teoremei lui Rolle. **5.** a) f' este un polinom de gradul 2, conform teoremei lui Rolle, f' are o rădăcină în intervalul $(1, 2)$ şi alta în $(2, 3)$; analog pentru g'; b) Dacă între două rădăcini consecutive x', x'' ale lui P' ar exista două rădăcini ale lui P, atunci, aplicând teorema lui Rolle, între aceste rădăcini ar exista o rădăcină x''' a lui P', ceea ce contrazice faptul că rădăcinile x' şi x'' ar fi consecutive. **6.** Aplicând teorema lui Rolle funcţiei f, rezultă că pe intervalul (a_i, a_{i+1}) există cel puţin o rădăcină c_i a lui f'. Dacă f este un polinom de gradul n, şi dacă ar avea mai mult de n rădăcini reale, atunci, aplicând succesiv rezultatul precedent lui f', f'', ..., $f^{(n-1)}$, ar rezulta că $f^{(n)}$ ar avea cel puţin o rădăcină, ceea ce este absurd, căci f este o constantă. **7.** Nu se contravine teoremei lui Rolle căci funcţia f nu este definită în $0 \in [-1, 1]$. **8.** Raţionament analog cu cel de la problema 6. **9.** $c = \frac{1}{\ln 2}$. **11.** c) $= e - 1$ pentru primul caz, $c = \frac{\pi}{4}$ în al doilea caz.

V. § 1 (pagina 173). **1.** a) Pe intervalele $(-\infty, -4]$, $[0, \infty)$ f este crescătoare ($f' \geq 0$) și pe $[-4, 0]$ este descrescătoare ($f' \leq 0$); m) pe $(0, 1]$ este descrescătoare și pe $(1, \infty)$ este crescătoare. **3.** Dacă ar exista F_1, F_2 derivabile pe (a, b) astfel ca $F_1'(x) = F_2'(x) = f(x)$ și $F_1(x_0) = F_2(x_0) = \alpha$, atunci $F_1 = F_2 = 0$ pe (a, b), deci $F_1 - F_2$ ar fi o constantă, anume constanta nulă. **5.** a) 1; b) $\frac{1}{10}$; c) 4; d) $\frac{1}{2}$; e) 1; f) $\frac{4}{3}$; g) 0; h) $\frac{2}{\pi}$; i) $\frac{2}{3}$; j) $\frac{1}{2}$; k) 2; l) $\frac{1}{e}$; m) $\frac{1}{e}$; n) 1; o) 0; p) e^6; q) ∞; r) 1; s) 1; t) 1; **7.** Aplicarea regulii lui l'Hospital conduce la câtul $\frac{1 - \cos x}{1 - \sin x}$ care nu are limită pentru $x \to \infty$, dar

$$\frac{x - \sin x}{x + \cos x} = \frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\cos x}{x}} \to 1 \text{ pentru } x \to \infty.$$

V. § 2 (pagina 180). **1.** a) Pe $(-\infty, -1)$ f este concavă; și pe $(-1, \infty)$ convexă; d) Pe $(-\infty, 0)$ funcția este convexă și pe $(0, \infty)$ concavă; h) Pe $(-\infty, 0)$ f este concavă și pe $(0, \infty)$ convexă **2.** Se pune mai întâi condiția necesară $f''(x) = 0$, apoi se discută semnul lui f'' în jurul punctelor găsite. **3.** $f'' > 0$ pe (a, b) implică f' crescătore pe (a,b). Ecuația tangentei la grafic în punctul $(\alpha, f(\alpha))$ este $y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha)$, adică $y = f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha)$. Aplicând teorema lui Lagrange funcției f pe intervalul (α, x), $x > \alpha$, obținem $f(x) = f(\alpha) + f'(c)(x - \alpha)$, cu $\alpha < c < x$ și cum $f'(c) > f'(\alpha)$, rezultă $f(x) > y$. Raționament analog pentru cazul $x < \alpha$. **4.** Direct din definiția V.1 pentru $t = \frac{1}{2}$.

6. a) $f(x) = 1 + x + x^2 - \frac{x^3}{2}$; b) $f(x) = 1 - \frac{x^3}{6}$; c) $f(x) = \frac{h}{6}(x - 1)^3$.

V. §5 (pagina 208). **7.** a) Dacă n este par, atunci $n - 1$ este impar și ecuația $nx^{n+1} + p = 0$ are o singură rădăcină reală; șirul lui Rolle va avea doar trei termeni, deci pot apărea cel mult două schimbări de semn. Raționament analog pentru cazul n impar. **9.** Dacă $f(x) = \frac{x}{\sin x}$ definită pe $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, atunci $f'(x) = \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} > 0$, deci $f_{max} = f\left(\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\right)$, deci $f(x) \leq \frac{\pi}{2}$. **11.** a) Remarcăm mai întâi că pentru $0 < x < 1$, $x^x \leq x$ și cum avem $e^x > x$ rezultă inegalitatea cerută în acest caz. Este suficient de arătat că $e^x \geq x^x$ pentru $x > 1$. Inegalitatea cerută se mai poate scrie $e^x \geq e^{e \ln x}$ $(x > 1)$ și din monotonia funcției e^t rezultă că ultima inegalitate este echivalentă cu $x \geq e \ln x$, adică $\frac{x}{\ln x} \geq e$, pentru $x > 1$. Funcția $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ are un singur punct de minim pentru $x = e$, deci $f(x) \geq f_{min} = f(e) = e$; b) notând $\frac{1}{x} = t$, $t > 1$ pentru $x \in (0, 1)$, inegalitatea de demonstrat devine: $\ln t \leq \frac{t^\alpha}{\alpha e}$ pentru $t > 1$. Dacă $f(t) = \frac{t^\alpha}{\alpha e} - \ln t$, $f'(t) = \frac{t^\alpha - e}{et}$ se anulează în $t = e^{\frac{1}{\alpha}}$ și f are un minim în acel punct, deci $f(t) > f_{min} = \frac{\left(e^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha}{\alpha e} - \ln\left(e^{\frac{1}{e}}\right) = 0$; c) fie $f(x) = e^x$, $g(x) = 1 + \ln(1 + x)$. Derivata funcției $F = f - g$ este $e^x - \frac{1}{1 + x}$ și

se anulează doar în $x = 0$. În $x = 0$ F are un minim și $F(0) = f(0) - g(0) = 0$, deci $F(x) \geqslant 0$ pentru $x \in (-1, \infty)$, adică inegalitatea cerută (egalitatea având loc doar pentru $x = 0$).

PROBLEME RECAPITULATIVE

1. Presupunem, prin absurd, că ar exista o funcție polinomială reală P de gradul $n \geqslant 0$ astfel încât $|x| = P(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Atunci $x^2 = P^2(x)$ și ar rezulta $n = 1$, deci ar exista $a, b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$ astfel încât $|x| = ax + b$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Pentru $x = 0$ se obține $b = 0$ și pentru $x = 1$, $a = 1$; ar rezulta $|x| = x$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$, contradicție. **2.** $|a_n - b_n| = \dfrac{2n}{2n+1} < 1$ pentru orice $n \geqslant 1$; apoi $|a_n + b_n - 2| = \dfrac{2}{2n+1}$ și condiția din enunț are loc pentru $n > 100$. **3.** Dacă $0 < m < n$ sunt întregi, atunci $\dfrac{m}{n} = \dfrac{2m}{2n} > \dfrac{2m-1}{2n} > 0$, $\dfrac{m}{n} = \dfrac{2m}{2n} < \dfrac{2m+1}{2n} < 1$ și, ca atare, în mulțimea A nu există $\min A$, $\max A$. Arătăm apoi că $\inf A = 0$, $\sup A = 1$. Pentru orice $\varepsilon > 0$ și pentru orice m natural există un întreg $n > m$ astfel încât $n > \dfrac{m}{\varepsilon}$, deci $\dfrac{m}{n} < \varepsilon$. Așadar $\inf A = 0$. Apoi pentru orice $\varepsilon > 0$ și pentru orice k natural există m natural astfel încât $m > \dfrac{k(1-\varepsilon)}{\varepsilon}$, deci $\dfrac{m}{k+m} > 1 - \varepsilon$ și notând $n = k + m$ avem $1 > \dfrac{m}{n} > 1 - \varepsilon$, deci $\sup A = 1$. **4.** $\varphi(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } x < 0 \\ 0, & \text{dacă } x \geqslant 0 \end{cases}$ etc. **5.** Fie $m_1 = \inf\limits_{x \in [0,1]} x^n$, fiind fixat și fie m, M marginile lui f pe $[0, 1]$. Luăm $Q(x) = x^n + A$, cu A ales astfel încât $M \leqslant m_1 + A$. Atunci $f(x) \leqslant M \leqslant m_1 + A \leqslant x^x + A = Q(x)$ pentru orice $x \in [0, 1]$ etc. Intervalul $[0, 1]$ poate fi înlocuit cu $[a, b]$. **7.** Divergent; convergent. **10.** Suma lungimilor segmentelor $AC_1 + C_1A_1 + A_1C_2 + \ldots + A_{n-1}C_n + C_nB$ este egală cu $2n \cdot \dfrac{a}{n} = 2a$ și limita respectivă este $2a$ (deși linia poligonală „converge" în poziție către segmentul AB de lungime a). Noțiunea de „convergență" folosită aici diferă de cea din cazul șirurilor de numere reale. **14.** Dacă $x_n \to a$, atunci există N natural astfel încât $\forall m, n \geqslant N$, să avem $|x_m - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, de unde $|x_m - x_n| < \varepsilon$. **15.** a) Discontinuă pe $\mathbf{R} \setminus \{0\}$, continuă în $x = 0$; b) este continuă pe $\mathbf{R}$; f) dacă $x \in \mathbf{Z}$, atunci $\sin \pi x = 0$ și în vecinătatea unui astfel de punct $\sin x\pi$ ia atât valori pozitive cât și negative, deci $f(x)$ va lua valorile $+1$ și -1 oricât de aproape de x, deci f nu poate fi continuă. În celelalte puncte, f este local constantă, deci continuă, căci $\sin \pi x$ are semn constant. **17.** a) Din condiția $f(0) = f(2\pi)$ rezultă că putem prelungi funcția f la o funcție periodică pe $\mathbf{R}$, de perioadă 2π, care va fi continuă și pe care o notăm, de asemenea, cu f. Fie $g(x) = f(x + \pi) - f(x)$; $g(x + \pi) = f(x + 2\pi) - f(x + \pi) = f(x) - f(x + \pi) = -g(x)$, deci pe orice interval $[x, x + \pi]$, g (care este continuă), se va anula, adică există $c \in [0, \pi]$ pentru care $f(c + \pi) - f(c) = 0$; b) fie $g(x) = f(x) - x$ și $h(x) = f(x) + x$; este ușor de văzut că $g(a) \cdot g(-a) \leqslant 0$ și $h(a) \cdot h(-a) \leqslant 0$, de unde, aplicând teorema valorilor intermediare, aplicabilă deoarece g și h sunt continue, rezultă concluzia dorită. **18.** Distingem două cazuri. Dacă $f(1) < 80$, atunci considerăm funcția $g(t) = f(t + 1) - f(t)$; $g(0) = f(1)$, $g(1) = f(2) - f(1) = 160 - f(1) > 80$, deci g (care este continuă) va lua, când t parcurge intervalul $(1, 2)$, toate valorile cuprinse între $f(1)$ și $160 - f(1)$, deci la un moment t_0, $g(t_0) = 80$. Dacă $f(1) > 80$, considerăm funcția $h(t) = f(t) - f(t - 1)$ definită pe $(1, 2)$ și raționăm analog. **21.** $\alpha = 2e$, $\beta = -e$. Dreapta $y = \alpha x + \beta$ este atunci tangentă în $x = 1$ la curba $y = xe^x$. **22.** Se pot da numeroase exemple. Un exemplu simplu este

următorul: $f(x) = x$, $g(x) = \frac{1}{2}(x+1)$. **25.** a) $m \leq -1$. **26.** Pe $(0, e^2]$ funcţia este cres-
cătoare, şi $f(3) < f(5)$, deci $a \leq b$. **28.** Prima relaţie rezultă aplicând teorema lui Lagrange
funcţiei f pe intervalul $(a-h, a+h)$, a doua rezultă aplicând de două ori teorema lui
Lagrange funcţiei $g(x) = f(x+h) - f(x)$, definită pe $[a-h, a]$.

NOTĂ. Indicăm numele autorilor de drept ai unora dintre exerciţiile şi problemele din acest manual, adresându-le totodată mulţumirile noastre: N. Boboc, Gr. Arsene, Gh. Sireţchi, M. Rădulescu, S. Rădulescu, L. Panaitopol, M.E. Panaitopol, C. Ottescu, C. Niculescu, D.M. Bătineţu, D. Buşneag, A. Ghioca, P. Dragoş. Suntem recunoscători Gazetei matematice şi tuturor profesorilor care ne-au transmis observaţiile lor.

TABLA DE MATERII

CAPITOLUL I. **NUMERE REALE. FUNCȚII REALE** 3
Introducere 3
§ 1. Numere reale 4
Exerciții 12
§ 2. Funcții reale. Operații cu funcții reale 15
Exerciții 20
§ 3. Noțiunea de șir 22
§ 4. Submulțimi ale lui **R** 24
Exerciții 27
§ 5. Câteva clase de funcții reale .. 29
Exerciții 35
Exerciții și probleme rezolvate la capitolul I 37
CAPITOLUL II. **LIMITE DE ȘIRURI LIMITE DE FUNCȚII** 40
§ 1. Șiruri convergente de numere reale 40
Exerciții 48
§ 2. Limita unei funcții într-un punct 50
Exerciții 57
§ 3. Operații cu șiruri convergente 58
Exerciții 63
§ 4. Calculul limitelor de șiruri 64
Exerciții 73
§ 5. Operații cu limite de funcții .. 74
Exerciții 76
§ 6. Asimptotele funcțiilor reale .. 77
Exerciții 80
§ 7. Calculul limitelor de funcții .. 81
Exerciții 92
Exerciții și probleme rezolvate la capitolul II 94
CAPITOLUL III. **FUNCȚII CONTINUE** 100
§ 1. Funcții continue într-un punct; funcții continue pe o mulțime 100
Exerciții 107
§ 2. Proprietăți ale funcțiilor continue pe un interval 109
Exerciții 115
Exerciții și probleme rezolvate la capitolul III 119
CAPITOLUL IV. **FUNCȚII DERIVABILE** 120
§ 1. Derivata unei funcții într-un punct 120
Exerciții 128
§ 2. Operații cu funcții derivabile. Derivatele unor funcții uzuale 129
Exerciții 143
§ 3. Aplicații directe ale derivatelor 146
Exerciții 150
§ 4. Proprietățile funcțiilor derivabile 151
Exerciții 159
Exerciții și probleme rezolvate la capitolul IV 160
CAPITOLUL V. **APLICAȚII ALE DERIVATELOR ÎN STUDIUL VARIAȚIEI FUNCȚIILOR** 166
§ 1. Rolul primei derivate în studiul funcțiilor 166
Exerciții 173
§ 2. Rolul derivatei a doua în studiul funcțiilor 175
Exerciții 180
§ 3. Reprezentarea grafică a funcțiilor 181
Exerciții 196
§ 4. Probleme de maxim și minim; optimizări 198
Exerciții 202
§ 5. Aplicații ale analizei matematice la studiul ecuațiilor 203
Exerciții 208
§ 6. Aplicații ale analizei matematice în cinematică 209
Exerciții 213
Exerciții și probleme rezolvate la capitolul V 213
PROBLEME RECAPITULATIVE 216
Notă istorică 221
RĂSPUNSURI ȘI INDICAȚII 224

Coli de tipar : 15
Comanda nr. 40 661/41 242/1995
REGIA AUTONOMĂ A IMPRIMERIILOR
Imprimeria „CORESI"
Piața Presei Libere 1, BUCUREȘTI

Compania aeriană

Efectuează zboruri charter, pasageri și marfă în țară și străinătate

Fly with us!

Tel. : 212.22.73
212.22.74
212.22.75
Fax : 312.97.58

Șos. București - Ploiești 14 - 22

Lei 1700

ISBN 973-30-3058-9