MINISTERUL ÎNVĂȚĂMÂNTULUI

NICU BOBOC ION COLOJOARA

Matematică

Manual pentru clasa a XII-a

XII

Elemente de analiză matematică

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ, R.A.
BUCUREȘTI — 1996

MINISTERUL ÎNVĂȚĂMÂNTULUI

NICU BOBOC ION COLOJOARĂ

XII Matematică

Manual pentru cl. a XII-a

Elemente de analiză matematică

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ, R.A.
BUCUREȘTI

Referenţi: Prof. univ. dr. **O. Stănăşilă**
prof. **M. Păltineanu**
prof. **M. Rădulescu**
prof. **S. Rădulescu**
prof. **V. Tomuleanu**

ISBN 973-30-4236-6

Redactor: Prof. **Valentin Radu**
Tehoredactor: **Otto Paraschiv Necşoiu**
Coperta: **Nicolae Sîrbu**

I.
Primitive

§ 1. PRIMITIVE

Fiind dată o funcţie $f : J \to \mathbf{R}$ (J un interval $\subset \mathbf{R}$), se pun următoarele probleme:

(A) Există (şi în ce condiţii) o funcţie $F : J \to \mathbf{R}$ a cărei derivată să fie funcţia dată f?

(B) Cum se poate determina o asemenea funcţie F, pornind de la f?

În acest capitol vom studia cîteva metode de obţinere a funcţiilor F care verifică relaţia $F' = f$.

Răspunsul la problema (A) este afirmativ pentru o clasă destul de largă de funcţii, în particular pentru funcţiile continue. Acest lucru va fi arătat în capitolul II.

1.1. Definiţie. Fie J un interval $\subset \mathbf{R}$ şi $f : J \to \mathbf{R}$. Spunem că f admite primitivă pe J dacă există o funcţie $F : J \to \mathbf{R}$ astfel încât:

1) F este derivabilă pe J,

2) $F'(x) = f(x)$, $(\forall)x \in J$.

Funcţia F se numeşte primitivă a funcţiei f.

Dacă intervalul J este închis la stînga şi a este extremitatea sa stângă, atunci prin derivata lui F în punctul a se subînţelege derivata la dreapta a lui F în a. O convenţie analoagă se face când J este închis la dreapta.

1.2. *Exemple*

1) Fie $n \in \mathbf{N}$ şi $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funcţia definită prin relaţia

$$f(x) = x^n, \qquad (\forall)x \in \mathbf{R}.$$

Atunci pentru orice număr real fixat c, funcţia

$$F_c(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c, \qquad (\forall)x \in \mathbf{R}$$

este o primitivă a lui f.

2) Funcţia

$$F(x) = (\sin x)^2, \qquad (\forall)\, x \in \mathbf{R}$$

este o primitivă a funcţiei

$$f(x) = 2\sin x \cos x, \qquad (\forall)\, x \in \mathbf{R}.$$

3) Dacă $a > 0$, $a \neq 1$, atunci funcția

$$F(x) = \frac{a^x}{\ln a}, \qquad (\forall)\, x \in \mathbf{R}$$

este o primitivă a funcției

$$f(x) = a^x, \qquad (\forall)\, x \in \mathbf{R}.$$

1.3. Propoziție. Fie J un interval $\subset \mathbf{R}$ și $f : J \to \mathbf{R}$. Dacă $F_1, F_2 : J \to \mathbf{R}$ sînt două primitive ale funcției f, atunci există o constantă $c \in \mathbf{R}$ astfel încât

$$F_1(x) = F_2(x) + c, \qquad (\forall)\, x \in J.$$

Demonstrație. F_1 și F_2 fiind primitive ale lui f, ele sunt derivabile pe J și verifică relațiile

$$F_1'(x) = f(x) = F_2'(x), \qquad (\forall)\, x \in J,$$

deci

$$(F_1 - F_2)'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = 0, \qquad (\forall)\, x \in J.$$

Funcția $F_1 - F_2$, avînd derivata nulă pe intervalul J, este constantă pe acest interval, adică există $c \in \mathbf{R}$ astfel încât

$$F_1(x) - F_2(x) = c, \qquad (\forall)\, x \in J.$$

1.4. *Observații*:

a) Dată fiind o primitivă F_0 a unei funcții $f : J \to \mathbf{R}$, atunci orice altă primitivă F a lui f este de forma

$$F = F_0 + c,$$

unde c este o funcție constantă pe J. Aceasta înseamnă că dacă o funcție f admite primitivă, atunci f admite o infinitate de primitive. Datorită acestui fapt vom spune adeseori:

„f admite primitive"

în loc de

„f admite primitivă"

b) Definiția primitivei, dată la punctul 1.1, s-ar putea extinde și la funcții definite pe reuniuni finite de intervale disjuncte, deoarece condițiile din definiția 1.1 au sens și în acest caz mai general. Însă nu mai este adevărat că două astfel de primitive diferă printr-o constantă.

De exemplu, fie $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$ funcția definită prin

$$f(x) = x^2.$$

Atunci funcțiile $F, G : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$ definite prin

$$F(x) = \frac{x^3}{3}, \qquad (\forall)\, x \in \mathbf{R} \setminus \{0\},$$

respectiv

$$G(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{3} + 1 \text{ dacă } x < 0, \\ \dfrac{x^3}{3} + 2 \text{ dacă } x > 0 \end{cases}$$

sunt derivabile pe $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ și verifică relațiile

$$F'(x) = f(x) = G'(x), \quad (\forall)\, x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}.$$

Totuși, diferența $G - F$ nu este o constantă.

$$G(x) - F(x) = \begin{cases} 1 \text{ dacă } x < 0, \\ 2 \text{ dacă } x > 0. \end{cases}$$

c) *O funcție care admite primitive are proprietatea lui Darboux.* Într-adevăr, dacă $f : J \to \mathbf{R}$ admite primitive, atunci există o funcție derivabilă $F : J \to \mathbf{R}$ cu proprietatea

$$F' = f.$$

Se știe însă (vezi, Elemente de analiză matematică, cl. a XI-a), că derivata oricărei funcții derivabile are proprietatea lui Darboux. Așadar, f are proprietatea lui Darboux.

d) *Dacă J interval $\subset \mathbf{R}$ și $f : J \to \mathbf{R}$ este o funcție astfel încât mulțimea*

$f(J) \overset{\text{def.}}{=} \{f(x) \mid x \in J\}$ (imaginea lui J prin f)

nu este interval, atunci funcția f nu admite primitive.

Într-adevăr, dacă f ar admite primitive, atunci (în baza punctului precedent) f ar avea proprietatea lui Darboux, adică o dată cu două valori ar lua orice valoare intermediară, deci imaginea lui J prin f ar fi un interval. Contradicție cu ipoteza făcută asupra lui f.

e) *Orice funcție continuă $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ admite primitive.*

Demonstrația acestui rezultat va fi dată în capitolul II, teorema 4.8

1.5. Definiție. Fie $f : J \to \mathbf{R}$ (J interval din $\mathbf{R}$) o funcție care admite primitive. Mulțimea tuturor primitivelor lui f se numește **integrala nedefinită a funcției** f și se notează prin simbolul

$$\int f(x)\mathrm{d}x.$$

Operația de calculare a primitivelor unei funcții (care admite primitive) se numește integrare.

Menționăm că simbolul $\int f(x)\mathrm{d}x$ trebuie privit ca o notație indivizibilă, deci părților $\int$ sau $\mathrm{d}x$, luate separat, nu li se atribuie aici nici o semnificație.

În cele ce urmează vom defini operațiile de „adunare" și „înmulțire cu scalari" între părți (submulțimi) ale mulțimii funcțiilor $\varphi : J \to \mathbf{R}$. Vom face acest lucru în scopul de a da un sens precis notațiilor frecvent utilizate în calculul de primitive:

$$\int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x,$$

$$\lambda\int f(x)\mathrm{d}x,$$

unde $\int f(x)\mathrm{d}x$ (respectiv $\int g(x)\mathrm{d}x$) inseamnă mulțimea tuturor primitivelor lui f (respectiv g).

1.6. *Notații.* Fie J un interval din $\mathbf{R}$ și

$$\mathcal{F}(J) \overset{\text{def.}}{=} \{f : J \to \mathbf{R}\}$$

mulțimea funcțiilor definite pe J cu valori reale. Reamintim că pe mulțimea $\mathcal{F}(J)$ se introduc operațiile „*adunarea funcțiilor*":

$$(f+g)(x) \overset{\text{def.}}{=} f(x) + g(x), \qquad (\forall)\, x \in J$$

și „*înmulțirea funcțiilor cu scalari*":

$$(\lambda f)(x) \overset{\text{def.}}{=} \lambda f(x), \qquad (\forall)\, x \in J,\ \lambda \in \mathbf{R}.$$

Deci $f + g$ este funcția $x \to f(x) + g(x)$ care asociază fiecărui $x \in J$ numărul real $f(x) + g(x)$, iar funcția λf este funcția $x \to \lambda f(x)$ care asociază fiecărui $x \in J$ numărul real $\lambda f(x)$.

Dacă $\mathcal{F}$ și $\mathcal{G}$ sînt părți nevide ale lui $\mathcal{F}(J)$ și $\lambda \in \mathbf{R}$, atunci punem prin definiție

$$(D_1) \qquad \mathcal{F} + \mathcal{G} \overset{\text{def.}}{=} \{f + g \mid f \in \mathcal{F} \text{ și } g \in \mathcal{G}\},$$

$$(D_2) \qquad \lambda\mathcal{F} \overset{\text{def.}}{=} \{\lambda f \mid f \in \mathcal{F}\}.$$

Dacă $\mathcal{F}$ este formată dintr-un singur element f_0, atunci în loc de

$$\mathcal{F} + \mathcal{G}$$

sau

$$\{f_0\} + \mathcal{G}$$

vom scrie simplu

$$f_0 + \mathcal{G}.$$

Deci

$$(D_3) \qquad f_0 + \mathcal{G} \overset{\text{def.}}{=} \{f_0 + g \mid g \in \mathcal{G}\}.$$

1.7. *Observație.* Notînd cu $\mathcal{C}$ mulțimea funcțiilor constante definite pe J cu valori reale

$$\mathcal{C} \overset{\text{def.}}{=} \{f : J \to \mathbf{R} \mid f \text{ constantă}\},$$

se observă că această mulțime are, față de operațiile de „adunare" și „înmulțirea cu numere reale diferite de zero", definite pe părțile lui $\mathcal{F}(J)$, următoarele proprietăți:

a) $\lambda\mathcal{C} = \mathcal{C} \quad (\forall)\lambda \in \mathbf{R},\ \lambda \neq 0;$

b) $\mathcal{C} + \mathcal{C} = \mathcal{C}$

c) dacă $f : J \to \mathbf{R}$ este o funcţie care admite primitive şi dacă F_0 este o primitivă a lui f, atunci

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F_0 + \mathcal{C}$$

sau

$$\int F_0'(x)\mathrm{d}x = F_0 + \mathcal{C}.$$

Într-adevăr, produsul λf, dintre o funcţie constantă $f : J \to \mathbf{R}$ şi un număr real λ fiind tot o funcţie constantă, rezultă incluziunea

$$\lambda\mathcal{C} \subset \mathcal{C}.$$

Reciproc, dacă f este o funcţie constantă şi $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda \neq 0$, atunci funcţia

$$g \overset{\text{def.}}{=\!=} \lambda^{-1} f$$

este constantă, deci

$$f = \lambda g \in \lambda\mathcal{C}.$$

Aşadar, are loc şi incluziunea

$$\mathcal{C} \subset \lambda\mathcal{C}$$

şi deci egalitatea $\mathcal{C} = \lambda\mathcal{C}$.

Suma a două funcţii constante fiind tot o funcţie constantă, rezultă incluziunea

$$\mathcal{C} + \mathcal{C} \subset \mathcal{C}.$$

Reciproc, dacă f este constantă, atunci $\frac{1}{2} f$ este constantă, deci

$$f = \frac{1}{2} f + \frac{1}{2} f \in \mathcal{C} + \mathcal{C}.$$

Aşadar, are loc şi incluziunea $\mathcal{C} \subset \mathcal{C} + \mathcal{C}$ şi deci egalitatea

$$\mathcal{C} + \mathcal{C} = \mathcal{C}.$$

Am văzut (observaţia 1.4 a)) că dacă F este o primitivă a lui f, atunci orice altă primitivă F a lui f este de forma

$$F = F_0 + c,$$

unde c este o funcţie constantă pe J. Deci

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \{F \in \mathcal{F}(J) \mid F = \text{primitivă a lui } f\} =$$

$$= \{F_0 + c \mid c \in \mathcal{C}\} = F_0 + \mathcal{C}$$

1.8. Teoremă. **Dacă $f, g : J \to \mathbf{R}$ sunt funcţii care admit primitive şi $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda \neq 0$, atunci funcţiile $f + g$ şi λf admit de asemenea primitive şi au loc relaţiile:**

(a) $$\int [f(x) + g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x,$$

(b) $$\int \lambda f(x)\mathrm{d}x = \lambda \int f(x)\mathrm{d}x,$$

(c) $$\int f(x)\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \mathcal{C}.$$

Demonstraţie. Dacă F este o primitivă a lui f iar G o primitivă a lui g, atunci F şi G sînt derivabile pe J şi

$$F' = f, \; G' = g.$$

De aici deducem că $F + G$ şi λF sînt derivabile pe J şi

$$(F + G)' = F' + G' = f + g,$$
$$(\lambda F)' = \lambda F' = \lambda f,$$

adică $F + G$ este o primitivă a lui $f + g$ şi λF este o primitivă a lui λf.

Funcţiile F, G, $F + G$, λF fiind primitive ale lui f, g, $f + g$, λf respectiv, rezultă (observaţia 1.7c))

(1) $$\int f(x)\mathrm{d}x = F + \mathcal{C},$$

(2) $$\int g(x)\mathrm{d}x = G + \mathcal{C},$$

(3) $$\int (f(x) + g(x))\mathrm{d}x = F + G + \mathcal{C},$$

(4) $$\int \lambda f(x)\mathrm{d}x = \lambda F + \mathcal{C}.$$

Din egalităţile (1), (2), (3) şi observaţia 1.7. b) obţinem

$$\int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x = F + \mathcal{C} + G + \mathcal{C} = F + G + \mathcal{C} + \mathcal{C} =$$
$$= F + G + \mathcal{C} =$$
$$= \int (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x.$$

Analog, folosind egalităţile (1), (4) şi observaţia 1.8a), se obţine

$$\lambda \int f(x)\mathrm{d}x = \lambda(F + \mathcal{C}) = \lambda F + \lambda\mathcal{C} = \lambda F + \mathcal{C} = \int \lambda f(x)\mathrm{d}x.$$

1.9. *Observaţie.* În demonstrarea faptului că λf admite primitive (teorema 1.8) nu s-a folosit ipoteza $\lambda \neq 0$. Totuşi, *ipoteza $\lambda \neq 0$ este esenţială în demonstrarea egalităţii*:

$$\int \lambda f(x)\mathrm{d}x = \lambda \int f(x)\mathrm{d}x.$$

Într-adevăr, dacă $\lambda = 0$, atunci

$$\lambda f(x) = 0, \ (\forall)\ x \in J,$$

deci orice funcţie constantă este primitivă a lui λf, în particular funcţia constantă 0 este o primitivă a lui $\lambda f = 0$. Aşadar (observaţia 1.7)

$$\int \lambda f(x)\mathrm{d}x = 0 + \mathcal{C} = \mathcal{C}.$$

Pe de altă parte, dacă $\lambda = 0$, atunci

$$\lambda \int f(x)\mathrm{d}x = \lambda\{F \mid F = \text{primitivă a lui } f\} = \{\lambda F \mid F = \text{primitivă a lui } f\} = \{0\}.$$

Deci, în general, are loc incluziunea

$$\lambda \int f(x)\mathrm{d}x \subset \int \lambda f(x)\mathrm{d}x,$$

incluziune care este strictă când $\lambda = 0$.

1.10. *Exemple de funcţii care nu admit primitive*

a) Funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{dacă } x < 0 \\ 1, & \text{dacă } x \geqslant 0 \end{cases}$$

nu admite primitive.

Într-adevăr, imaginea $f(\mathbf{R})$, a lui $\mathbf{R}$ prin f, este egală cu mulţimea $\{-1, 1\}$ formată din punctele -1 şi 1. Cum această mulţime nu este un interval, rezultă (observaţia 1.4 d)) că funcţia f nu admite primitive.

b) Funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin

$$f(x) = [x] \overset{\text{def.}}{=} \max\ \{n \in Z \mid n \leqslant x\}$$

($[x]$ = partea întreagă a lui x) nu admite primitive.

Într-adevăr, imaginea $f(\mathbf{R})$ a lui $\mathbf{R}$ prin f, fiind egală cu mulţimea $\mathbf{Z}$ a numerelor întregi, nu poate fi un interval. Deci observaţia 1.4 d)) f nu admite primitive.

c) Funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \leqslant 0 \\ \sin\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$$

nu admite primitive.

Se observă că funcţiile

$$f_1 : (-\infty, 0] \to \mathbf{R}, \quad f_2 : (0, \infty) \to \mathbf{R}$$

definite prin

$$f_1(x) = 0, \quad f_2(x) = \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x},$$

admit, respectiv, ca primitive funcţiile:

$$F_1(x) = c, \quad F_2(x) = x\sin\frac{1}{x}.$$

Dacă funcția f ar admite o primitivă: $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, atunci ar rezulta (observația 1.4. a)) că

$$F|_{(-\infty,0]} = F_1 + c_1 = k \text{ și } F|_{(0,\infty)} = F_2 + c_2.$$

Orice primitivă este funcție derivabilă, deci continuă, prin urmare, primitiva F este continuă în origine,

deci

$$F(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \leqslant 0}} F(x) = k,$$

$$F(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} F(x) = c_2,$$

de unde

$$k = c_2.$$

Așadar, funcția F va fi de forma

$$F(x) = \begin{cases} k, & \text{dacă } x \leqslant 0 \\ k + x \sin \frac{1}{x}, & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$$

Observînd că

$$\frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \sin \frac{1}{x} \ (\forall) x > 0$$

și ținând seamă de faptul că funcția $x \to \sin \frac{1}{x}$ nu are limită în 0, deducem că funcția F nu este derivabilă în 0.
Contradicție cu derivabilitatea lui F pe toată mulțimea $\mathbf{R}$.

1.11 Tabel de integrale nedefinite

Peste tot în acest tabel J este un interval $\subset \mathbf{R}$

1.	$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $f(x) = x^n;\ n \in \mathbf{N}$	$\int x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \mathcal{C}$
2.	$f : J \to \mathbf{R};\ J \subset (0,\infty)$ $f(x) = x^a;\ a \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$	$\int x^a \mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} + \mathcal{C}$
3.	$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $f(x) = a^x;\ a \in \mathbf{R}_+^* \setminus \{1\}$	$\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + \mathcal{C}$

4.	$f: J \to \mathbf{R};\ J \subset \mathbf{R}^*$ $f(x) = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\,\lvert x \rvert + \mathcal{C}.$
5.	$f: J \to \mathbf{R};\ J \subset \mathbf{R} \setminus \{-a, a\}$ $f(x) = \frac{1}{x^2 - a^2},\quad \{a \neq 0\}$	$\int \frac{1}{x^2 - a^2}\,dx = \frac{1}{2a} \ln \left\lvert \frac{x-a}{x+a} \right\rvert + \mathcal{C}$
6.	$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2};\ a \neq 0$	$\int \frac{1}{x^2 + a^2}\,dx = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} + \mathcal{C}.$
7.	$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $f(x) = \sin x$	$\int \sin x\,dx = -\cos x + \mathcal{C}.$
8.	$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $f(x) = \cos x$	$\int \cos x\,dx = \sin x + \mathcal{C}.$
9.	$f: J \to \mathbf{R};\ J \subset \mathbf{R} \setminus \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} \;\middle\vert\; k \in \mathbf{Z} \right\}$ $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + \mathcal{C}.$
10.	$f: J \to \mathbf{R};\ J \subset \mathbf{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$ $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$	$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + \mathcal{C}.$
11.	$f: J \to \mathbf{R};\ J \subset \mathbf{R} \setminus \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} \;\middle\vert\; k \in \mathbf{Z} \right\}$ $f(x) = \operatorname{tg} x$	$\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln\,\lvert \cos x \rvert + \mathcal{C}.$
12.	$f: J \to \mathbf{R};\ J \subset \mathbf{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$ $f(x) = \operatorname{ctg} x$	$\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln\,\lvert \sin x \rvert + \mathcal{C}.$
13.	$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}};\ a \neq 0$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}\,dx = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + \mathcal{C}.$
14.	$f: J \to \mathbf{R}$, $a > 0$ $\begin{cases} J \subset (-\infty, -a) \\ \text{sau} \\ J \subset (a, \infty) \end{cases}$ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}\,dx = \ln\,\lvert x + \sqrt{x^2 - a^2} \rvert + \mathcal{C}.$
15.	$f: J \to \mathbf{R};\ J \subset (-a, a), a > 0,$ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \arcsin \frac{x}{a} + \mathcal{C}.$

Exemplele 13 şi 14 nu sunt evidente şi sunt mai puţin utilizate decât celelalte exemple. Dăm în continuare justificarea exemplului 13 (exemplul 14 se justifică în mod analog).

Derivând funcția

$$g(x) \overset{\text{def.}}{=} x + \sqrt{x^2 + a^2}, \qquad (g(x) > 0,\ (\forall)\ x \in \mathbf{R})$$

obținem

$$g'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{\sqrt{x^2 + a^2}} = g(x)f(x),$$

deci

$$f(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} = (\ln g(x))',$$

adică funcția $x \to \ln g(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)$ este o primitivă a funcției $f : x \to \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$

1.12. *Exerciții*

I. Să se calculeze primitivele următoarelor funcții:

1. $f(x) = x^2 + 2x + 3,$ $\qquad x \in \mathbf{R};$
2. $f(x) = x + \dfrac{1}{x},$ $\qquad x \in (0, \infty);$
3. $f(x) = x + \dfrac{1}{x},$ $\qquad x \in (-\infty, 0);$
4. $f(x) = a \sin x + b \cos x,$ $\qquad x \in \mathbf{R};$
5. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - 4x^2}},$ $\qquad x \in \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right);$
6. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2}},$ $\qquad x \in (-2, 2);$
7. $f(x) = \dfrac{2}{\sin^2 x} + \dfrac{1}{\cos^2 x},$ $\qquad x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right);$
8. $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x \cos^2 x},$ $\qquad x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right);$
9. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 4},$ $\qquad x \in \mathbf{R};$
10. $f(x) = \dfrac{1}{4x^2 + 1},$ $\qquad x \in \mathbf{R};$
11. $f(x) = 2^x + e^x,$ $\qquad x \in \mathbf{R};$
12. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1},$ $\qquad x \in (-1, 1);$
13. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1},$ $\qquad x \in (-\infty, -1);$

14. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, $x \in (0, \infty)$;

15. $f(x) = x\sqrt{x} + 2x\sqrt[3]{x^2}$, $x \in (0, \infty)$.

II. Să se arate că următoarele funcţii *nu* posedă primitive pe $\mathbf{R}$:

1. $f(x) = [x] - x$, $x \in \mathbf{R}$,

unde $[x]$ înseamnă partea întreagă din x.

Indicaţie: Se va folosi acelaşi procedeu ca la exemplul 1.10.

2. $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } x > 0, \\ 0, \text{ dacă } x = 0, \\ -1, \text{ dacă } x < 0. \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} x, \text{ dacă } x \leqslant 0, \\ \sin\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}, \text{ dacă } x > 0. \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, \\ \dfrac{1}{2}, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \in \mathbf{Q}, \\ x^3, & \text{dacă } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$

6. $f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{dacă } x \in \mathbf{Q}, \\ x^2, & \text{dacă } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$

7. $f(x) = \begin{cases} \cos\dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, \\ \dfrac{1}{2}, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$

8. $f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, \\ -\dfrac{1}{2}, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$

9. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

10. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}, & x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}, \\ -1, & x = 0. \end{cases}$

III. Ţinând seama de faptul că orice funcţie continuă pe un interval I are o primitivă, să se arate că următoarele funcţii au primitive pe $\mathbf{R}$:

1. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{dacă } x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, \\ 1, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} \cos \dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{dacă } x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$

6. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^5} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{dacă } x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$

7. $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} \sin \dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$

IV.

1. Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ şi $c \in (a, b)$. Se presupune că f admite primitive pe $[a, c]$ şi pe $[c, b]$. Să se arate că f admite primitive pe $[a, b]$.

2. Fie $f_1 : [a, b] \to \mathbf{R}$, $f_2 : [a, b] \to \mathbf{R}$ două funcţii care admit primitive. Presupunem că există o mulţime finită A de puncte din $[a, b]$ astfel încât

$$(\forall)\ x \in [a, b] \setminus A \Rightarrow f_1(x) = f_2(x).$$

Să se arate că $f_1(x) = f_2(x)$ pentru orice $x \in [a, b]$.

3. Să se arate că dacă $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este astfel încât $f^2(x) = 1$ pentru orice x, atunci f are o primitivă dacă şi numai dacă $f = 1$ sau $f = -1$.

4. Se consideră o funcţie $f : [-1, 1] \to \mathbf{R}$ care coincide cu funcţia $\sin \dfrac{1}{x}$ dacă $x \neq 0$. Să se arate că pentru ca f să posede o primitivă este necesar şi suficient ca $f(0) =$

5. Se consideră funcția $f:[-1,1]\to\mathbf{R}$ definită prin

$$f(x)=\begin{cases}1+\sin\dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x\in(0,1],\\ 0, & \text{dacă } x=0,\\ -1+\sin\dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x\in[-1,0).\end{cases}$$

Să se arate că f nu admite primitive.

6. Să se arate că funcția $f:[-1,1]\to\mathbf{R}$ definită prin

$$f(x)=\begin{cases}\cos^2\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

nu admite primitive. Să se deducă de aici că dacă o funcție $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ admite primitive nu rezultă, în general, că funcția f^2 admite primitive.

7. Fie $[a,b]$ un interval din $\mathbf{R}$. Să se construiască o funcție $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ care să posede următoarele proprietăți:

i) să fie mărginită,

ii) să fie continuă în orice punct din intervalul deschis (a,b) și să fie discontinuă în punctele a și b.

iii) să posede o primitivă,

iv) să fie egală cu zero în punctele a și b.

8. Fie $[a,b]$ un interval și A o mulțime finită conținută în $[a,b]$. Să se arate că există o funcție $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ cu proprietățile:

i) să fie mărginită,

ii) să fie continuă pe $[a,b]\setminus A$ și discontinuă în orice punct din A,

iii) să admită primitive,

iv) să se anuleze pe A.

9. Fie $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ o funcție strict crescătoare care admite primitive și fie F o primitivă a lui f. Să se arate că pentru orice $\xi\in(a,b)$ există $x_1,x_2\in[a,b]$ astfel încît

$$\frac{F(x_1)-F(x_2)}{x_1-x_2}=f(\xi).$$

§ 2. INTEGRAREA PRIN PĂRȚI

În acest paragraf și în următorul admitem următorul rezultat (a cărui demonstrație se va da în capitolul II, teorema 4.8; demonstrație care nu se bazează pe rezultatele din aceste paragrafe):

„Orice funcție continuă f: $J\to\mathbf{R}$ admite primitive".

Folosind acest rezultat și formula de derivare a produsului a două funcții, obținem următoarea:

2.1. Teoremă. Formula de integrare prin părți. Dacă $f,g:J\to\mathbf{R}$ sînt funcții derivabile cu derivate continue, atunci funcțiile fg, $f'g$ și fg' admit primitive și mulțimile lor de primitive sînt legate prin relația:

$$\int f(x)g'(x)\mathrm{d}x=fg-\int g(x)f'(x)\mathrm{d}x.$$

Demonstrație. Se știe că orice funcție derivabilă este continuă, deci din ipoteză rezultă că funcțiile $f'g$ și fg' sînt continue, prin urmare și funcția

$$(fg)' = f'g + fg' \tag{1}$$

este continuă. Atunci, pe baza rezultatului menționat mai sus, funcțiile $f'g$, fg' și $(fg)'$ admit primitive. Aplicând teorema 1.8 (a) egalității (1), obținem:

$$\int (fg)'(x)\mathrm{d}x = \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x + \int f(x)g'(x)\mathrm{d}x. \tag{2}$$

Însă (observația 1.7)

$$\int (fg)'(x)\mathrm{d}x = fg + \mathcal{C}. \tag{3}$$

Din (2), (3) și teorema 1.8 (c) rezultă

$$\int f(x)g'(x)\mathrm{d}x = fg + \mathcal{C} - \int g(x)f'(x)\mathrm{d}x = fg - \int g(x)f'(x)\mathrm{d}x.$$

2.2. *Exemple*

1) $\int x\cos x\,\mathrm{d}x = \int x(\sin x)'\,\mathrm{d}x = x\sin x - \int (\sin x)x'\,\mathrm{d}x = x\sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}x =$

$= x\sin x + \cos x + \mathcal{C}.$

2) $\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \int \cos x\cos x\,\mathrm{d}x = \int \cos x\,(\sin x)'\mathrm{d}x =$

$$= \cos x\sin x - \int \sin x\,(\cos x)'\,\mathrm{d}x =$$

$$= \sin x\cos x + \int \sin^2 x\,\mathrm{d}x =$$

$$= \sin x\cos x + \int (1 - \cos^2 x)\mathrm{d}x =$$

$$= \sin x\cos x + \int 1\,\mathrm{d}x - \int \cos^2 x\,\mathrm{d}x =$$

$$= \sin x\cos x + x - \int \cos^2 x\,\mathrm{d}x,$$

deci

$$\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x + \sin x\cos x) + \mathcal{C}.$$

Analog se arată că

2′) $\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x - \sin x\cos x) + \mathcal{C}.$

3) $\int x^2\sin x\,\mathrm{d}x = -\int x^2\,(\cos x)'\mathrm{d}x =$

$$= -x^2\cos x + \int (\cos x)\,(x^2)'\mathrm{d}x =$$

$$= -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,\mathrm{d}x =$$

$$= -x^2 \cos x + 2(x \sin x + \cos x + c) =$$
$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c.$$

În exemplele (4) şi (5) funcţiile sunt considerate pe intervale $I \subset (0, \infty)$.

4) Pentru $n \in \mathbf{N}$, avem $\int x^n \ln x \, dx = \int (\ln x) \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' dx =$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{1}{n+1} \int x^{n+1} (\ln x)' dx =$$
$$= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{1}{n+1} \int x^{n+1} \frac{1}{x} dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{1}{n+1} \int x^n dx =$$
$$= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + c = \frac{x^{n+1}}{n+1} \left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right) + c.$$

5) $\int \cos (\ln x) dx = \int \cos (\ln x) \cdot (x)' dx =$

$$= x \cos (\ln x) - \int x (\cos (\ln x))' dx =$$
$$= x \cos (\ln x) + \int x \sin (\ln x) \frac{1}{x} dx =$$
$$= x \cos (\ln x) + \int \sin (\ln x) dx.$$

$$\int \sin (\ln x) dx = x \sin (\ln x) - \int x (\sin) \ln x))' dx =$$
$$= x \sin (\ln x) - \int \cos (\ln x) dx$$

şi inlocuind în egalitatea de mai sus se obţine

$$\int \cos(\ln x) dx = \frac{x}{2} \left[\cos (\ln x) + \sin (\ln x)\right] + c.$$

6) Se consideră un interval I din $\mathbf{R}$ astfel incât

$$\sin x \neq 0, \qquad (\forall) x \in I$$

şi se cere să se calculeze primitivele funcţiei

$$x \longrightarrow \frac{1}{\sin^n x}, \; n \geqslant 2, \; n \in \mathbf{N}.$$

Scriind

$$1 = \sin^2 x + \cos^2 x$$

avem

$$\frac{1}{\sin^n x} = \frac{1}{\sin^{n-2} x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^n x}$$

şi deci

$$\int \frac{1}{\sin^n x} dx = \int \frac{1}{\sin^{n-2} x} dx + \int \frac{\cos^2 x}{\sin^n x} dx.$$

În a doua integrală din membrul drept aplicăm metoda integrării prin părţi, obser-

$$\frac{\cos x}{\sin^n x} = -\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{\sin^{n-1} x}\right)'.$$

Deci

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^n x}\,dx = -\frac{1}{n-1}\int\left(\frac{1}{\sin^{n-1}x}\right)' \cos x\,dx =$$

$$= -\frac{1}{n-1}\cdot\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x} - \frac{1}{n-1}\int \frac{1}{\sin^{n-1}x}\cdot \sin x\,dx =$$

$$= -\frac{1}{n-1}\cdot\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x} - \frac{1}{n-1}\int \frac{1}{\sin^{n-2}x}\,dx.$$

De aici deducem

$$\int \frac{1}{\sin^n x}\,dx = \frac{n-2}{n-1}\int \frac{1}{\sin^{n-2}x}\,dx - \frac{1}{n-1}\cdot\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x}.$$

Notând, pentru $n \geqslant 1$,

$$I_n = \int \frac{1}{\sin^n x}\,dx$$

relația de mai sus devine, pentru $n \geqslant 2$,

$$I_n = \frac{n-2}{n-1} I_{n-2} - \frac{1}{n-1}\cdot\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x}$$

ceea ce permite să calculăm I_n pentru n par și să reducem calculul lui I_n pentru n impar la calculul lui

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sin x};$$

I_1 va fi calculată în paragraful următor (exemplul 3.3 (2)).

Vom avea

$$I_2 = \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\frac{\cos x}{\sin x} + c,$$

$$I_4 = \int \frac{1}{\sin^4 x}\,dx = \frac{2}{3} I_2 - \frac{1}{3}\frac{\cos x}{\sin^3 x} = -\frac{2}{3}\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{3}\frac{\cos x}{\sin^3 x} + c,$$

$$I_3 = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sin x}\,dx - \frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sin^2 x},$$

$$I_5 = \frac{3}{4} I_3 - \frac{1}{4}\frac{\cos x}{\sin^4 x} = \frac{3}{8}\int \frac{1}{\sin x}\,dx - \frac{3}{8}\frac{\cos x}{\sin^2 x} - \frac{1}{4}\frac{\cos x}{\sin^4 x}$$

7) Să se calculeze $\int \sqrt{x^2+\alpha}\,dx$, unde funcția

$$x \longrightarrow \sqrt{x^2+\alpha}$$

se consideră definită pe un interval I pe care $x^2+\alpha > 0$; $\alpha \neq 0$.

Avem

$$\int \sqrt{x^2+\alpha}\,dx = \int \frac{x^2+\alpha}{\sqrt{x^2+\alpha}}\,dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+\alpha}}\,dx + \int \frac{\alpha}{\sqrt{x^2+\alpha}}\,dx.$$

Pentru a calcula integrala

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+\alpha}}\,dx$$

vom aplica metoda integrării prin părţi. Avem

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+\alpha}}\,dx = \int x\cdot(\sqrt{x^2+\alpha})'\,dx = x\sqrt{x^2+\alpha} - \int \sqrt{x^2+\alpha}\,dx.$$

Prin urmare s-a obţinut relaţia

$$\int \sqrt{x^2+\alpha}\,dx = x\sqrt{x^2+\alpha} - \int \sqrt{x^2+\alpha}\,dx + \int \frac{\alpha}{\sqrt{x^2+\alpha}}\,dx$$

şi deci

$$\int \sqrt{x^2+\alpha}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+\alpha} + \frac{\alpha}{2}\int \frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha}}\,dx.$$

Întrucât

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha}}\,dx = \ln\left(x+\sqrt{x^2+\alpha}\right) + c,$$

deducem

$$\int \sqrt{x^2+\alpha}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+\alpha} + \frac{\alpha}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+\alpha}\right) + c.$$

8) Să se calculeze $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$, $a>0$, unde funcţia $x \longrightarrow \sqrt{a^2-x^2}$ este definită pe un interval $I \subset (-a, a)$.

Avem

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int \frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = a^2\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx - \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx.$$

Pentru a calcula integrala

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$$

vom aplica metoda integrării prin părţi. Avem

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = -\int x\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)'\,dx = -x\sqrt{a^2-x^2} + \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

Prin urmare s-a obţinut relaţia

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = x\sqrt{a^2-x^2} - \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx + a^2\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$$

sau

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + c.$$

2.3. *Exerciţii.* Să se calculeze primitivele următoarelor funcţii:

1. $f(x) = \ln x$, $x > 0$.
2. $f(x) = x \ln x$, $x > 0$.
3. $f(x) = \ln^2 x$, $x > 0$.
4. $f(x) = x^2 \ln x$, $x > 0$.
5. $f(x) = \frac{1}{x}\ln x$, $x > 0$.
6. $f(x) = x^\alpha \ln x$, $x > 0$ unde α este un număr real oarecare.
7. $f(x) = \ln^n x$, $x > 0$, n număr natural, $n \geq 2$.

8. $f(x) = x^3 \ln^2 x, \quad x > 0$

9. $f(x) = x^\alpha (\ln x)^n, \quad x > 0,$ unde $\alpha \in \mathbf{R}$ iar n este un număr natural.

10. $f(x) = x\, e^x, \quad x \in \mathbf{R}.$

11. $f(x) = (x^2 - 2x - 1)\, e^x, \quad x \in \mathbf{R}.$

12. $f(x) = (x^3 - x + 1)\, e^x, \quad x \in \mathbf{R}.$

13. $f(x) = x^n e^{\alpha x}, \quad x \in \mathbf{R},$ unde n este un număr natural și $\alpha \in \mathbf{R}$.

14. $f(x) = x^2 \sin x, \quad x \in \mathbf{R}.$

15. $f(x) = (x^2 - x + 1) \sin x, \quad x \in \mathbf{R}.$

16. $f(x) = x^n \sin \alpha x, \quad x \in \mathbf{R}$ unde n este un număr natural iar $\alpha \in \mathbf{R}$.

17. $f(x) = e^x \sin x, \quad x \in \mathbf{R}.$

18. $f(x) = e^x \sin 2x, \quad x \in \mathbf{R}.$

19. $f(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad x \in \mathbf{R};\ \alpha, \beta \in \mathbf{R}.$

20. $f(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad x \in \mathbf{R};\ \alpha, \beta \in \mathbf{R}.$

21. $f(x) = x\, e^x \sin x, \quad x \in \mathbf{R}.$

22. $f(x) = e^x (\sin x - \cos x), \quad x \in \mathbf{R}.$

23. $f(x) = \sin^2 x, \quad x \in \mathbf{R}.$

24. $f(x) = \sin^3 x + 2 \cos^3 x, \quad x \in \mathbf{R}.$

25. $f(x) = 2 \sin^4 x + 3 \cos^4 x, \quad x \in \mathbf{R}.$

26. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}, \quad x \in (2, +\infty).$

27. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbf{R}.$

28. $f(x) = x^2\sqrt{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbf{R}.$

29. $f(x) = x^3\sqrt{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbf{R}.$

30. $f(x) = x^4\sqrt{x^2 - 4}, \quad x \in (2, +\infty).$

31. $f(x) = x^5\sqrt{x^2 - 4}, \quad x \in (2, +\infty).$

32. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}, \quad x \in (-3, 3).$

33. $f(x) = x^2\sqrt{9 - x^2}, \quad x \in (-3, 3).$

§ 3. PRIMA METODĂ DE SCHIMBARE DE VARIABILĂ

În multe exemple, funcția $h : I \to \mathbf{R}$, pentru care căutăm o primitivă (funcția care vrem să o „integrăm"), poate fi pusă sub forma

$$h(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \quad (\forall) t \in I, \tag{1}$$

unde $\varphi : I \to J$ este o funcție derivabilă, iar $f : J \to \mathbf{R}$.

Dacă funcția f admite o primitivă F, adică $F' = f$, atunci, ținând seamă de regula de derivare a funcțiilor compuse, putem scrie

$$h(t) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = (F \circ \varphi)'(t)$$

deci $F \circ \varphi$ este o primitivă a lui h.

Așadar, găsirea unei primitive a lui h s-a redus, în condițiile de mai sus, la găsirea unei primitive a lui f, problemă care (adeseori) este mai simplă decît găsirea unei primitive a lui h.

Se observă deci că o primitivă a lui h se obține compunând o primitivă F a lui f cu funcția φ.

Să considerăm următorul exemplu:

$$h(t) = (at + b)^n \quad (\forall) t \in \mathbf{R} \tag{2}$$

unde $a, b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, n număr natural ≥ 1.

Ținând seamă că derivata funcției

$$\varphi(t) = at + b, \quad (\forall)t \in \mathbf{R}$$

este egală cu constanta a,

$$\varphi'(t) = a, \quad (\forall)t \in \mathbf{R}$$

și luând

$$f(x) = x^n \quad (\forall)x \in \mathbf{R},$$

se observă din (2) că h ar avea forma (1), dacă ar mai fi înmulțită cu constanta a. Deci

$$ah(t) = (at + b)^n \cdot a = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

adică

$$h(t) = \frac{1}{a} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t).$$

3.1. Teoremă (prima metodă de schimbare de variabilă). Fie I, J intervale din $\mathbf{R}$ și

$$I \xrightarrow{\varphi} J \xrightarrow{f} \mathbf{R}$$

funcții cu proprietățile:

(α) φ derivabilă pe I,

(β) f *admite primitive* (fie F o primitivă a sa).

Atunci funcția $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ admite primitive, iar funcția $F \circ \varphi$ este o primitivă a lui $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$, adică

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt = F \circ \varphi + C$$

Demonstrație. Funcția F fiind o primitivă a lui f, este derivabilă pe J și $F' = f$. Însă φ este derivabilă pe I (ipoteza (α)), deci

$$F \circ \varphi \text{ este derivabilă pe } I$$

și

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \quad (\forall)t \in I.$$

Așadar,
funcția $F \circ \varphi$ este o primitivă a lui $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$.

3.2. *Observație.* Ținând seama de faptul că orice funcție continuă admite primitive (observația 1.4. e)), putem aplica teorema precedentă, pentru funcțiile f continue.

3.3. *Observație.* În prima metodă de schimbare de variabilă distingem următoarele date și etape:

a) Se dă o funcție $h : I \to \mathbf{R}$ care are primitive (de exemplu o funcție continuă);

b) Se caută două funcții $I \xrightarrow{\varphi} J \xrightarrow{f} \mathbf{R}$ astfel încât să putem scrie

$$h(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \quad (\forall) t \in I;$$

se spune că φ este funcția care schimbă variabila (t în variabila x).

c) Se caută o primitivă F a lui f, adică

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F + \mathcal{C}.$$

d) În aceste condiții o primitivă H a lui $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ se obține din F prin relația

$$H = F \circ \varphi,$$

adică

$$\int h(t)\mathrm{d}t = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\mathrm{d}t = F \circ \varphi + \mathcal{C}.$$

Uneori se substituie formal

$$\varphi(t) \text{ prin } x \text{ și } \varphi'(t)\mathrm{d}t \text{ prin } \mathrm{d}x$$

în

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$$

și se scrie „egalitatea"

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\mathrm{d}t = \int f(x)\mathrm{d}x.$$

Această „egalitate" nu are sens, deoarece:

membrul stâng reprezintă mulțimea primitivelor funcției $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ (care sunt funcții definite pe intervalul I), iar membrul drept reprezintă mulțimea primitivelor funcției f (care sunt funcții definite pe intervalul J).

Cele două mulțimi pot fi diferite chiar în cazul când $I = J$ și φ nu este funcția identică.

„Egalitatea" menționată mai înainte este o preluare formală, fără sens, a formulei de schimbare de variabilă în integrala definită:

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\mathrm{d}x,$$

formulă care va fi demonstrată în capitolul II (teorema 4.1.2).

3.4. *Tabel de integrale nedefinite*

$\varphi : I \to \mathbf{R}$ derivabilă cu derivata continuă.

1.	$\int \varphi^n(x)\varphi'(x)\,dx = \frac{\varphi^{n+1}(x)}{n+1} + \mathcal{C},$	$n \in \mathbf{N}.$
2.	$\int \varphi^a(x)\varphi'(x)\,dx = \frac{\varphi^{a+1}(x)}{a+1} + \mathcal{C},$	$a \in \mathbf{R}\setminus\{-1\},\ \varphi(I) \subset (0, \infty).$
3	$\int a^{\varphi(x)}\varphi'(x)\,dx = \frac{a^{\varphi(x)}}{\ln a} + \mathcal{C},$	$a \in \mathbf{R}_+\setminus\{1\}$
4.	$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\,dx = \ln\lvert\varphi(x)\rvert + \mathcal{C},$	$\varphi(x) \neq 0,\ (\forall)x \in I.$
5.	$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x) - a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{\varphi(x) - a}{\varphi(x) + a}\right\rvert + \mathcal{C},$	$\varphi(x) \neq \pm a,\ (\forall)x \in I,\ a \neq 0.$
6.	$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x) + a^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{\varphi(x)}{a} + \mathcal{C},$	$a \neq 0.$
7.	$\int \sin\varphi(x)\,\varphi'(x)\,dx = -\cos\varphi(x) + \mathcal{C}.$	
8.	$\int \cos\varphi(x)\,\varphi'(x)dx = \sin\varphi(x) + \mathcal{C}.$	
9.	$\int \frac{\varphi'(x)}{\cos^2\varphi(x)}\,dx = \operatorname{tg}\varphi(x) + \mathcal{C},$	$\varphi(x) \notin \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \,\middle\vert\, k \in \mathbf{Z}\right\}\ (\forall)\ x \in I.$
10.	$\int \frac{\varphi'(x)}{\sin^2\varphi(x)}\,dx = -\operatorname{ctg}\varphi(x) + \mathcal{C},$	$\varphi(x) \notin \{k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\},\ (\forall)\ x \in I.$
11.	$\int \operatorname{tg}(\varphi(x))\varphi'(x)dx = -\ln\lvert\cos\varphi(x)\rvert + \mathcal{C},$	$\varphi(x) \notin \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \,\middle\vert\, k \in \mathbf{Z}\right\}(\forall)\,x \in I.$
12.	$\int \operatorname{ctg}(\varphi(x))\varphi'(x)\ dx = \ln\lvert\sin\varphi(x)\rvert + \mathcal{C},$	$\varphi(x) \notin \{k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}\ (\forall)x \in I.$
13.	$\int \frac{\varphi'(x)dx}{\sqrt{\varphi^2(x) + a^2}} = \ln\left[\varphi(x) + \sqrt{\varphi^2(x) + a^2}\right] + \mathcal{C},$	$a \neq 0.$
14.	$\int \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\varphi^2(x) - a^2}}\,dx = \ln\left\lvert\varphi(x) + \sqrt{\varphi^2(x) - a^2}\right\rvert + \mathcal{C},$	$a > 0 \begin{cases} \varphi(I) \subset (-\infty, -a) \\ \text{sau} \\ \varphi(I) \subset (a, \infty). \end{cases}$
15	$\int \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{a^2 - \varphi^2(x)}}\,dx = \arcsin\frac{\varphi(x)}{a} + \mathcal{C},$	$a > 0,\ \varphi(I) \subset (-a, a).$

3.5. *Exemple care utilizează prima metodă de schimbare de variabilă*

1) Să se calculeze $\int (at + b)^n \, dt$, unde

$$a, b \in \mathbf{R},\ a \neq 0,\ n \in \mathbf{N},\ n \geqslant 1.$$

Am văzut la începutul acestui paragraf că funcția aceasta poate fi pusă sub forma

$$\frac{1}{a} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = \frac{1}{a} (at + b)^n \cdot a,$$

unde

$$\varphi(t) = at + b, \qquad t \in \mathbf{R}, \ (\varphi \text{ este derivabilă})$$

și

$$f(x) = x^n, \qquad x \in \mathbf{R}, \ (f \text{ admite primitive}).$$

O primitivă a lui f este funcția

$$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \qquad x \in \mathbf{R},$$

deci, în baza teoremei 3.1 funcția

$$F(\varphi(t)) = \frac{(at + b)^{n+1}}{n+1}, \qquad t \in \mathbf{R},$$

este o primitivă a funcției

$$f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = (at + b)^n \cdot a.$$

Așadar

$$\int (at + b)^n dt = \frac{(at + b)^{n+1}}{a(n+1)} + c.$$

Pentru un calcul rapid se procedează astfel

$$\int (at + b)^n dt = \int \frac{1}{a} (at + b)^n \cdot a \, dt = \frac{1}{a} \int (at + b)^n \cdot a \, dt =$$

$$= \frac{1}{a} \int \left[\frac{(at + b)^{n+1}}{n+1} \right]' dt = \frac{(at + b)^{n+1}}{a(n+1)} + c.$$

2) Fie $u : I \to \mathbf{R}$ o funcție cu proprietățile:

(α) $\quad u(t) \neq 0, \ (\forall)\ t \in I,$

(β) $\quad u$ derivabilă.

Se cere să se calculeze

$$\int \frac{u'(t)}{u(t)} dt.$$

Funcția u având proprietatea lui Darboux (vezi Elemente de analiză matematică cl. a XI a) și ținând seama că nu se anulează nicăieri (ipoteza (α)), deducem că u' păstrează semn constant pe I, deci

$$\begin{cases} \text{sau } u'(t) > 0 & (\forall)\ t \in I \\ \text{sau } u'(t) < 0 & (\forall)\ t \in I. \end{cases}$$

Dacă $u' > 0$, atunci u este strict crescătoare. Însă u nu se anulează nicăieri (ipoteza (α)), deci

$$\begin{cases} \text{sau } u(t) > 0 & (\forall)\ t \in I \\ \text{sau } u(t) < 0 & (\forall)\ t \in I. \end{cases}$$

Printr-un raționament similar se ajunge la aceeași concluzie și în cazul când $u' < 0$.

Luând funcția

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

definită pe $(0, \infty)$ dacă $u > 0$,
sau
definită pe $(-\infty, 0)$ dacă $u < 0$, rezultă că

$$\frac{u'(t)}{u(t)} = f(u(t)) \cdot u'(t) \qquad t \in I.$$

O primitivă a funcției f fiind funcția

$$F(x) = \ln |x|$$

rezultă, aplicând teorema 3.1, că funcția

$$(F \circ u)(t) = \ln |u(t)| \qquad t \in I$$

este o primitivă a funcției $\frac{u'}{u}$. Așadar,

$$\int \frac{u'(t)}{u(t)}\, dt = \ln u + \mathbb{C}.$$

Pe scurt, se poate proceda astfel

$$\int \frac{u'(t)}{u(t)}\, dt = \int (\ln |u(t)|)'\, dt = \ln u + \mathbb{C}.$$

3) Să se calculeze $\int \frac{\sin 2t\, dt}{1 + \sin^2 t}$.

Luăm

$$I = \mathbf{R},\ J = [1,2]$$

și

$$I \xrightarrow{\varphi} J \xrightarrow{f} \mathbf{R}$$

definite prin

$$\varphi(t) \overset{\text{def.}}{=\!=} 1 + \sin^2 t,$$

respectiv

$$f(x) \overset{\text{def.}}{=\!=} \frac{1}{x},$$

Atunci f este continuă pe J, φ este derivabilă, iar derivata sa

$$\varphi'(t) = 2 \sin t \cos t = \sin 2t$$

este continuă pe I. Deci sunt îndeplinite condițiile teoremei 3.1,

$$\int \frac{\sin 2t\, dt}{1+\sin^2 t} = \int \frac{1}{\varphi(t)}\varphi'(t)dt = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Funcția

$$F(t) \overset{\text{def.}}{=} \ln t,\ t \in [1,2]$$

fiind o primitivă a lui f, rezultă (în baza teoremei 3.1) că

$$\int \frac{\sin 2t\, dt}{1+\sin^2 t} = \ln \varphi + C = \ln(1+\sin^2 t) + C.$$

4) Să se calculeze

$$\int \frac{dt}{\sin t}$$

unde funcția

$$h(t) = \frac{1}{\sin t}$$

este considerată pe un interval $I \subset \mathbf{R}$ astfel încît

$$\sin t \neq 0 \qquad (\forall) t \in I$$

(de exemplu $I = (0, \pi)$).

Funcția considerată în acest exemplu nu pare, la prima vedere, a fi de forma

$$(f \circ \varphi)\varphi'.$$

Pentru a o aduce la această formă (sau la combinație liniară de funcții de această formă), vom face unele transformări. De exemplu, scriind

$$\frac{1}{\sin t} = \frac{1}{\dfrac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{t}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\,\frac{t}{2}}} = \frac{\frac{1}{2}\left(1+\mathrm{tg}^2\,\frac{t}{2}\right)}{\mathrm{tg}\,\frac{t}{2}}$$

și observând că

$$\left(\mathrm{tg}\,\frac{t}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left(1+\mathrm{tg}^2\,\frac{t}{2}\right),$$

obținem

$$\frac{1}{\sin t} = \frac{\left(\mathrm{tg}\,\frac{t}{2}\right)'}{\mathrm{tg}\,\frac{t}{2}} = \frac{u'(t)}{u(t)},$$

adică funcția de sub integrală este de tipul considerat în exemplul precedent, unde

$$u(t) = \mathrm{tg}\,\frac{t}{2}.$$

Deci, în baza exemplului precedent, avem

$$\int \frac{1}{\sin t}\, dt = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right| + \mathcal{C}.$$

Se mai poate face și transformarea

$$\frac{1}{\sin t} = \frac{\sin t}{\sin^2 t} = \frac{\sin t}{1 - \cos^2 t} = \frac{\sin t}{(1 - \cos t)(1 + \cos t)} = \frac{1}{2}\, \frac{\sin t}{1 - \cos t} +$$

$$+ \frac{1}{2}\, \frac{\sin t}{1 + \cos t}.$$

Deci

$$\int \frac{1}{\sin t}\, dt = \frac{1}{2} \int \frac{\sin t}{1 - \cos t}\, dt + \frac{1}{2} \int \frac{\sin t}{1 + \cos t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{(1 - \cos t)'}{1 - \cos t}\, dt - \frac{1}{2} \int \frac{(1 + \cos t)'}{1 + \cos t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2} \ln |1 - \cos t| - \frac{1}{2} \ln (1 + \cos t) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 - \cos t}{1 + \cos t} \right| + \mathcal{C} =$$

$$= \ln \left| \frac{1 - \cos t}{1 + \cos t} \right|^{\frac{1}{2}} + \mathcal{C} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right| + \mathcal{C}$$

5) Să se calculeze integrala

$$\int \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t}\, dt,$$

unde funcția de sub integrală este definită pe intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Avem

$$\int \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t}\, dt = \int \frac{1 + \operatorname{tg}^2 t}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t}}\, dt.$$

Punând

$$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \xrightarrow{\varphi} \mathbf{R} \xrightarrow{f} \mathbf{R},$$

unde

$$\varphi(t) = \operatorname{tg} t,$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

deducem că

$$\varphi'(t) = 1 + \operatorname{tg}^2 t$$

și deci

$$\int \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t}\, dt = \int \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{1 + \varphi^2(t)}}\, dt = \int f(\varphi(t))\, \varphi'(t) dt.$$

Întrucât

$$\int f(x) dx = \int \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}\, dx = \ln \left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) + \mathcal{C},$$

obţinem

$$\int \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t}\, dt = \ln\left(\operatorname{tg} t + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t}\right) + c.$$

6) Să se calculeze:

$$\int \frac{t^2 + 1}{t\sqrt{t^4 + 1}}\, dt,$$

unde funcţia

$$t \longrightarrow \frac{t^2 + 1}{t\sqrt{t^4 + 1}}$$

este definită pe un interval $I \subset (0, \infty)$.

Punând

$$I \xrightarrow{\varphi} \mathbf{R} \xrightarrow{f} \mathbf{R},$$

unde

$$\varphi(t) \overset{\text{def.}}{=\!=} t + \frac{1}{t}$$

şi

$$f(x) \overset{\text{def.}}{=\!=} \frac{1}{\sqrt{2 + x^2}}$$

avem

$$\varphi'(t) = 1 + \frac{1}{t^2}$$

şi

$$\frac{t^2 + 1}{t\sqrt{t^4 + 1}} = \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{t^2 + \frac{1}{t^2}}} = \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi^2(t) + 2}} = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t).$$

Deoarece

$$\int f(x)\, dx = \ln\left(x + \sqrt{2 + x^2}\right) + c$$

deducem, aplicând teorema 3.1,

$$\int \frac{t^2 + 1}{t\sqrt{t^4 + 1}}\, dt = \ln\left(\varphi(t) + \sqrt{2 + \varphi^2(t)}\right) + c =$$

$$= \ln\left(t - \frac{1}{t} + \sqrt{t^2 + \frac{1}{t^2}}\right) + c = \ln \frac{t^2 - 1 + \sqrt{t^4 + 1}}{t} + c.$$

7) Să se calculeze $\int \sqrt{at^2 + bt + c}\, dt$, $a > 0$,

unde funcţia

$$t \longrightarrow \sqrt{at^2 + bt + c}$$

este definită pe un interval I pe care $at^2 + bt + c$ este strict pozitivă.

Dacă $at^2 + bt + c$ nu are rădăcini reale, atunci I poate fi $\mathbf{R}$, dacă $at^2 + bt + c$ are rădăcinile reale α, β cu $\alpha < \beta$, atunci avem

$$I \subset (-\infty, \alpha) \text{ sau } I \subset (\beta, +\infty).$$

Deoarece $a > 0$, avem

$$at^2 + bt + c = \frac{1}{4a}[(2at + b)^2 + 4ac - b^2]$$

și deci

$$t \in I \Rightarrow (2at + b)^2 > b^2 - 4ac.$$

Considerăm acum funcția

$$\varphi : I \to \mathbf{R}$$

definită prin

$$\varphi(t) = 2at + b.$$

Din cele de mai sus rezultă că

$$\varphi^2(t) > b^2 - 4ac,$$
$$\varphi'(t) = 2a, \quad t \in I.$$

Punînd

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4ac - b^2},$$

observăm că f este definită pe orice interval pentru care $x^2 > b^2 - 4ac$. Deoarece

$$t \in I \Rightarrow \varphi^2(t) > b^2 - 4ac$$

rezultă că f este definită pe intervalul $\varphi(I)$; avem

$$f(\varphi(t)) = \sqrt{(2at + b)^2 + 4ac - b^2} = 2\sqrt{a}\sqrt{at^2 + bt + c}$$

și deci

$$f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = 4a\sqrt{a}\sqrt{at^2 + bt + c}.$$

Din exemplul 2.2 (7) deducem că

$$\int f(x)dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 + 4ac - b^2} + \frac{4ac - b^2}{2}\ln|x + \sqrt{x^2 + 4ac - b^2}| + \mathcal{C}$$

și deci din teorema 3.1, obținem

$$\int \sqrt{at^2 + bt + c}\,dt = \frac{1}{4a}\Big[(2at + b)\sqrt{at^2 + bt + c} +$$
$$+ \frac{4ac - b^2}{2\sqrt{a}}\ln\Big|2at + b + 2\sqrt{a}\sqrt{at^2 + bt + c}\Big|\Big] + \mathcal{C}.$$

8) Să se calculeze

$$\int \sqrt{at^2 + bt + c}\,dt, \quad a < 0,$$

unde funcția

$$t \mapsto \sqrt{at^2 + bt + c}$$

este definită pe un interval I pe care $at^2 + bt + c$ este strict pozitivă.

Aceasta are sens numai dacă rădăcinile trinomului sunt reale și distincte. În acest caz dacă rădăcinile sunt α și β, $\alpha < \beta$, atunci

$$I \subset (\alpha, \beta)$$

și

$$b^2 - 4ac > 0.$$

Deoarece $a < 0$, avem

$$at^2 + bt + c = -\frac{1}{4a}(\delta^2 - (2at + b)^2),$$

unde

$$\delta = \sqrt{b^2 - 4ac}.$$

Considerăm acum funcția

$$\varphi : I \to \mathbf{R}$$

definită prin

$$\varphi(t) = 2at + b.$$

Din cele de mai sus rezultă că

$$\varphi^2(t) < \delta^2, \quad t \in I,$$
$$\varphi'(t) = 2a.$$

Punînd

$$f(x) = \sqrt{\delta^2 - x^2},$$

observăm că f este definită pe orice interval pe care $x^2 < \delta^2$. Deoarece

$$t \in I \Rightarrow \varphi^2(t) < \delta^2$$

rezultă că f este definită pe intervalul $\varphi(I)$ și avem

$$f(\varphi(t)) = \sqrt{\delta^2 - (2at + b)^2} = 2\sqrt{-a}\sqrt{at^2 + bt + c}$$

și deci

$$f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = 4a\sqrt{-a}\sqrt{at^2 + bt + c}.$$

Din exemplul (2.8) deducem că

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\sqrt{\delta^2 - x^2} + \frac{\delta^2}{2}\arcsin\frac{x}{\delta} + \mathcal{C}$$

și deci, din teorema 3.1, obținem

$$\int\sqrt{at^2 + bt + c}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4a\sqrt{-a}}\Big[(2at + b)\sqrt{-a}\sqrt{at^2 + bt + c} +$$
$$+ \frac{b^2 - 4ac}{2}\arcsin\frac{2at + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}}\Big] + \mathcal{C},$$

sau

$$\int\sqrt{ax^2 + bx + c}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4a}\Big[(2ax + b)\sqrt{ax^2 + bx + c} +$$
$$+ \frac{4ac - b^2}{2\sqrt{a}}\ln\left(2ax + b + 2\sqrt{a}\sqrt{ax^2 + bx + c}\right)\Big] + \mathcal{C}.$$

3.6. *Exerciții*

I. Să se calculeze, utilizând prima metodă de schimbare de variabilă primitivele următoarelor funcții:

1. $f(x) = \dfrac{4x + 2}{x^2 + x + 3}$, $\quad x \in \mathbf{R}$.

2. $f(x) = \dfrac{8x^3 + 6x}{2x^4 + 3x^2 + 5}$, $\quad x \in \mathbf{R}$.

3. $f(x) = \dfrac{\sin x}{1 + \cos^2 x}$, $\quad x \in \mathbf{R}$.

4. $f(x) = \operatorname{tg} x$, $\quad x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

5. $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$, $\quad x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

6. $f(x) = \dfrac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x}$, $\quad x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

7. $f(x) = 2x \sin(x^2 + 1) e^{\cos(x^2 + 1)}$ $\quad x \in \mathbf{R}$.

8. $f(x) = x^2 e^{x^2}$, $\quad x \in \mathbf{R}$.

9. $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^3 x$, $\quad x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

10. $f(x) = \sin x \cos^2 x$, $\quad x \in \mathbf{R}$.

11. $f(x) = \sin^3 x \cos^2 x$, $\quad x \in \mathbf{R}$.

12. $f(x) = \sin^3 x$, $\quad x \in \mathbf{R}$.

13. $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$, $\quad x \in \left(-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right)$.

14. $f(x) = \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x$, $\quad x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

15. $f(x) = \dfrac{\sin^3 x}{\cos x}$, $\quad x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

16. $f(x) = \dfrac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg} x}$, $\quad x \in \left(-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right)$.

17. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1 - x^3}}$, $\quad x \in (0, 1)$.

18. $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^4}$, $\quad x \in \mathbf{R}$.

19. $f(x) = \dfrac{x^2}{1 + x^6}$, $\quad x \in \mathbf{R}$.

20. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^4}}$, $\quad x \in (-1, 1)$.

21. $f(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$, $\quad x \in (-\infty, 0)$.

22. $f(x) = \dfrac{1}{x(1 + \ln x)}$, $\quad x \in (e, \infty)$.

23. $f(x) = \cos x \cdot \sin(\sin x) \cdot \cos(\sin x)$, $x \in \mathbf{R}$.

24. $f(x) = \dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1 - \cos^4 x}}$, $x \in (0, \pi)$.

25. $f(x) = \dfrac{1}{x(1 + \ln^2 x)}$, $x \in (0, \infty)$.

26. $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$, $x \in \mathbf{R}$.

27. $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$, $x \in (2, \infty)$.

28. $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$, $x \in \mathbf{R}$.

29. $f(x) = \sqrt{-x^2 + 3x - 2}$, $x \in (1, 2)$.

30. $f(x) = \sqrt{9 - 4x^2}$, $x \in \left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$.

31. $f(x) = x^2\sqrt{x^2 + 2x + 2}$, $x \in \mathbf{R}$.

32. $f(x) = x\sqrt{(x - 1)^3}$, $x \in (1, \infty)$.

33. $f(x) = \dfrac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$, $x \in (1, \infty)$.

34. $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{x^2}$, $x \in (0, 1)$.

35. $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}$, $x \in (0, \infty)$.

§ 4. A DOUA METODĂ DE SCHIMBARE DE VARIABILĂ

Am văzut că în prima metodă de schimbare de variabilă se căuta să se pună funcția de integrat, h, sub forma

$$h(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t),$$

și o primitivă H a lui h se obținea compunând o primitivă F a lui f cu funcția φ:

$$H = F \circ \varphi.$$

Există situații în care este mai ușor de găsit o primitivă a funcției $h = (f \circ \varphi)\varphi'$ decât o primitivă a funcției f.

În a doua metodă de schimbare de variabilă se cunoaște o primitivă H a funcției $h = (f \circ \varphi)\varphi'$ și se cere să se găsească o primitivă F a funcției f. F se obține din H astfel

$$F = H \circ \varphi^{-1}.$$

4.1. Teoremă (A doua metodă de schimbare de variabilă). Fie I, J intervale din $\mathbf{R}$ și

$$I \xrightarrow{\varphi} J \xrightarrow{f} \mathbf{R}$$

funcții cu proprietățile:

a) **φ bijectivă, derivabilă, cu derivata nenulă pe I,**

b) funcția $h = (f \circ \varphi)\varphi'$ admite primitive (*fie* H o primitivă a sa).

Atunci

(1) funcția f admite primitive,

(2) funcția $H \circ \varphi^{-1}$ este o primitivă a lui f, adică

$$\int f(x)\mathrm{d}x = H \circ \varphi^{-1} + \mathcal{C}.$$

Demonstrație. Funcția H fiind o primitivă a lui h este derivabilă și $H' = h = (f \circ \varphi) \cdot \varphi'$.

Însă din ipoteza (a) rezultă că funcția inversă φ^{-1} este derivabilă pe J, deci

$$H \circ \varphi^{-1} \text{ este derivabilă pe } J$$

și

$$(H \circ \varphi^{-1})' \cdot (x) = H'(\varphi^{-1}(x))(\varphi^{-1})' \cdot (x) =$$

$$= (f \circ \varphi)(\varphi^{-1}(x) \cdot \varphi'(\varphi^{-1}(x)) \cdot (\varphi^{-1})'(x) =$$

$$= f(x) \cdot \varphi'(\varphi^{-1}(x)) \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = f(x)\,(\forall) x \in J.$$

Așadar, funcția $H \circ \varphi^{-1}$ este o primitivă a lui f.

4.2. *Observație.* Ipotezele (a) și (b) pot fi înlocuite cu următorul grup mai restrictiv de ipoteze:

a') φ bijectivă, derivabilă cu derivata continuă și nenulă pe I,

b') f continuă pe J.

Ipotezele a'), b') implică atât ipotezele a), b) din a doua metodă de schimbare de variabilă cât și ipotezele (α), (β) din prima metodă de schimbare de variabilă:

$$((a'), (b')) \begin{array}{l} \nearrow ((a), (b)) \\ \searrow ((\alpha), (\beta)). \end{array}$$

4.3. *Observație.* Fie f și φ funcții care verifică ipotezele (a') și (b'). Atunci pentru o funcție $F: J \to \mathbf{R}$ are loc echivalența:

F este primitivă a lui $f \Leftrightarrow F \circ \varphi$ este o primitivă a lui $(f \circ \varphi)\varphi'$.

Cu alte cuvinte:

„*În ipotezele* a'), b'), *cele două metode de schimbare de variabilă sunt echivalente*".

Implicația de la stânga la dreapta reprezintă prima metodă de schimbare de variabilă, iar implicația de la dreapta la stînga rezultă din a doua metodă de schimbare de variabilă.

Într-adevăr, să presupunem că funcția $F \circ \varphi$ este o primitivă a lui $(f \circ \varphi)\varphi'$ și să notăm

$$H \overset{\text{def.}}{=} F \circ \varphi.$$

Atunci, în baza celei de-a doua metode de schimbare de variabilă, funcția

$$H \circ \varphi^{-1} = F \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = F$$

este o primitivă a lui f.

4.4. *Observaţie.* **În a doua metodă de schimbare de variabilă se remarcă următoarele date şi etape:**

a) Se dă o funcţie $f : J \to \mathbf{R}$ care are primitive (de exemplu o funcţie continuă);

b) Se caută o funcţie $\varphi : I \to J$ care este derivabilă şi cu derivata nenulă. În acest caz, φ' (având proprietatea lui Darboux) păstrează semn constant, deci φ este strict monotonă, prin urmare există φ^{-1}; se spune că $\psi = \varphi^{-1} : J \to I$ este funcţia care schimbă variabila (x în variabila t);

c) Se caută o primitivă H a funcţiei

$$(f \circ \varphi)\varphi',$$

adică

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = H + \mathcal{C}.$$

d) În aceste condiţii o primitivă F a lui f se obţine din H prin relaţia

$$F = H \circ \varphi^{-1},$$

adică

$$\int f(x)\mathrm{d}x = H \circ \varphi^{-1} + \mathcal{C}.$$

4.5. EXEMPLE CARE UTILIZEAZĂ A DOUA METODĂ DE SCHIMBARE DE VARIABILĂ

1) Să se calculeze $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{1 + e^x}\,\mathrm{d}x.$

Funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin

$$f(x) \overset{\text{def.}}{=} \frac{e^{2x}}{1 + e^x},$$

este continuă. Luăm funcţia $\varphi : (0, \infty) \to \mathbf{R}$ definită prin

$$\varphi(t) = \ln t.$$

Această funcţie este bijectivă, inversa sa fiind

$$\varphi^{-1}(x) = e^x \quad (\forall)x \in \mathbf{R},$$

iar derivata sa

$$\varphi'(t) = \frac{1}{t} \quad (\forall),\ t \in (0, \infty)$$

este nenulă pe $(0, \infty)$.

Căutăm o primitivă a funcţiei

$$f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = \frac{t^2}{1+t} \cdot \frac{1}{t} = \frac{t}{1+t}.$$

Avem

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\mathrm{d}t = \int \frac{t}{1+t}\mathrm{d}t = \int \frac{1+t}{1+t}\mathrm{d}t - \int \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t = t - \ln(1+t) + \mathcal{C}.$$

Notând cu

$$H(t) = t - \ln(1+t)$$

primitiva lui $h = (f \circ \varphi) \cdot \varphi'$, rezultă în baza teoremei 4.1 că funcția

$$(H \circ \varphi^{-1})(x) = e^x - \ln(1 + e^x)$$

este o primitivă a funcției f. Deci

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\mathrm{d}x = e^x - \ln(1+e^x) + \mathcal{C}$$

2) Să se calculeze $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x.$

Luăm $(1, \infty) \xrightarrow{\varphi} (0, \infty) \xrightarrow{f} \mathbf{R}$, unde

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1+x}} \quad \text{și} \quad \varphi(t) = t^2 - 1,$$

deci

$$\varphi^{-1}(x) = \sqrt{1+x}, \quad \varphi'(t) = 2t.$$

Având

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int \frac{2t}{(t^2-1)t}\mathrm{d}t = \int \frac{2}{(t-1)(t+1)}\mathrm{d}t =$$

$$= \int\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t = \ln\frac{t-1}{t+1} + \mathcal{C}$$

rezultă

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x = \ln\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1} + \mathcal{C}.$$

3) Să se calculeze

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x.$$

Funcția $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ definită prin

$$f(x) \overset{\text{def.}}{=} \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$$

este continuă. Luăm $I = J = (0, \infty)$ și $\varphi : I \to J$ definită prin

$$\varphi(t) = \frac{1}{t}.$$

Observăm că φ este bijectivă, derivabilă, iar φ' este continuă și nenulă pe I:

$$\varphi'(t) = -\frac{1}{t^2}.$$

Deci (observația 4.2) sunt îndeplinite condițiile teoremei 4.1.

Observăm că

$$(f\circ\varphi)(t)\cdot\varphi'(t)=\frac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t^2}\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}=-\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}=-(\sqrt{1+t^2})'$$

deci o primitivă a funcției $(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$ este funcția $t\to-\sqrt{1+t^2}$, prin urmare

$$\int(f\circ\varphi)(t)\cdot\varphi'(t)\mathrm{d}t=-\sqrt{1+t^2}+\mathcal{C}.$$

Aplicând teorema 4.1 și ținînd seamă că $\varphi^{-1}(x)=\frac{1}{x}$, obținem

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+x^2}}=-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+\mathcal{C}.$$

4) Să se calculeze

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x,\quad(a>0).$$

Funcția $f:(-a,a)\to\mathbf{R}_+$ definită prin

$$f(x)\overset{\text{def.}}{=\!=}\sqrt{a^2-x^2}$$

este continuă. Funcția $\varphi:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to(-a,a)$ definită prin

$$\varphi(t)=a\sin t$$

este bijectivă, derivabilă, cu derivata continuă și

$$\varphi'(t)=a\cos t\neq0,\quad(\forall)t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right).$$

Observăm că

$$f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)=\sqrt{a^2-a^2\sin^2t}\cdot a\cos t=a^2\cos^2t,$$

deci (vezi exemplul 2.2 (2))

$$\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\mathrm{d}t=\frac{a^2}{2}\left(t+\sin t\cdot\cos t\right)+\mathcal{C}=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(t+\sin t\sqrt{1-\sin^2t}\right)+\mathcal{C}.$$

Aplicând teorema 4.1 și ținînd seama că

$$\varphi^{-1}(x)=\arcsin\frac{x}{a},$$

obținem

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{a^2}{2}\left[\arcsin\frac{x}{a}+\sin\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)\sqrt{1-\left(\sin\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)\right)^2}\right]+\mathcal{C}$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{a}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\right] + \mathcal{C} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(a^2 \arcsin\frac{x}{a} + x\sqrt{a^2 - x^2}\right) + \mathcal{C}.$$

5) Să se calculeze $\int \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\,dx, \quad a > 0,$

unde funcţia

$$x \to f(x) = \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$$

este definită pe intervalul $(-a, a)$.

Funcţia

$$\varphi : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to (-a, a)$$

definită prin

$$\varphi(t) = a \sin t$$

este bijectivă, derivabilă şi

$$\varphi'(t) = a \cos t \neq 0, \quad (\forall) t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Avem

$$f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = \sqrt{\frac{a - a\sin t}{a + a\sin t}} \cdot a \cos t =$$

$$= a\sqrt{\frac{1-\sin t}{1+\sin t}}\cos t = a\frac{\cos^2 t}{1+\sin t} = a(1-\sin t),$$

şi deci

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt = a\int (1-\sin t)dt = a\,(t + \cos t) + \mathcal{C}.$$

Deoarece

$$\varphi^{-1}(x) = \arcsin\frac{x}{a}$$

deducem, aplicând teorema 4.1

$$\int f(x)dx = a\left(\arcsin\frac{x}{a} + \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right) + \mathcal{C}.$$

6) Să se calculeze $\int \sqrt{ax^2 + bx + c}\,dx,$

unde $a > 0$ şi $b^2 - 4ac < 0$.

Funcţia

$$f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$$

este definită şi continuă pe $\mathbf{R}$.

Considerăm următoarea schimbare de variabilă

$$\Psi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

definită prin

$$\Psi(x) = \sqrt{a}x + \sqrt{ax^2 + bx + c}.$$

Avem

$$\Psi'(x) = \sqrt{a} + \frac{2ax + b}{2\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

Să arătăm că $\psi'(x) \neq 0 (\forall) x \in \mathbf{R}$. Dacă ar exista $x_0 \in \mathbf{R}$ astfel încât $\psi'(x_0) = 0$, atunci

$$2\sqrt{a}\sqrt{ax_0^2 + bx_0 + c} + 2ax_0 + b = 0,$$

deci

$$4a(ax_0^2 + bx_0 + c) = (2ax_0 + b)^2,$$

de unde ar rezulta egalitatea

$$b^2 - 4ac = 0$$

care contrazice ipoteza din enunţ. Avînd

$$\psi'(x) \neq 0 \quad (\forall) x \in \mathbf{R}$$

şi

$$\psi'\left(-\frac{b}{2a}\right) = \sqrt{a} > 0$$

rezultă

$$\psi'(x) > 0 \ (\forall) x \in \mathbf{R},$$

deci

(α) ψ este strict crescătoare.

Pe de altă parte, pentru orice $x \neq 0$ avem

$$\psi(x) = \frac{ax^2 - (ax^2 + bx + c)}{\sqrt{a}x - \sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{x\left(-b - \frac{c}{x}\right)}{\sqrt{a}x - |x|\sqrt{a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}}} =$$

$$= \frac{-b - \frac{c}{x}}{\sqrt{a} - \frac{|x|}{x}\sqrt{a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}}},$$

deci

(β) $$\lim_{x \to -\infty} \psi(x) = \frac{b}{2\sqrt{a}}.$$

Evident

(γ) $\lim\limits_{x\to\infty} \psi(x) = +\infty.$

Din (α), (β), (γ) rezultă că

$$\psi(\mathbf{R}) = \left(-\frac{b}{2\sqrt{a}},\ +\infty\right)$$

iar funcţia

$$\varphi \overset{\text{def.}}{=\!=} \psi^{-1} : \left(-\frac{b}{2\sqrt{a}},\ +\infty\right) \to \mathbf{R},$$

satisface condiţiile teoremei 4.1. Punând

$$t = \Psi(x)$$

găsim

$$(t - \sqrt{a}\,x)^2 = ax^2 + bx + c$$

şi deci

$$x = \varphi(t) = \frac{t^2 - c}{2\sqrt{a}t + b}.$$

Deoarece

$$f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = \left(t - \sqrt{a}\,\varphi(t)\right) \cdot \varphi'(t),$$

deducem

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\mathrm{d}t = -\frac{\sqrt{a}}{2}\varphi^2(t) + \int t\varphi'(t)\mathrm{d}t = -\frac{\sqrt{a}}{2}\varphi^2(t) + t\varphi(t) - \int \varphi(t)\mathrm{d}t.$$

Dar

$$\int \varphi(t)\mathrm{d}t = \int \frac{t^2 - c}{2\sqrt{a}\,t + b}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4a}\int \frac{4at^2 - b^2}{2\sqrt{a}t + b}\,\mathrm{d}t +$$

$$+ \frac{1}{4a}\int \frac{b^2 - 4ac}{2\sqrt{a}t + b}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4a}\int (2\sqrt{a}t - b)\,\mathrm{d}t +$$

$$+ \frac{1}{4a}(b^2 - 4ac)\frac{1}{2\sqrt{a}}\ln(2\sqrt{a}t + b) + \mathcal{C} =$$

$$= \frac{1}{4a}(\sqrt{a}\,t^2 - bt) + \frac{b^2 - 4ac}{8a\sqrt{a}}\ln(2\sqrt{a}t + b) + \mathcal{C},$$

deci

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\mathrm{d}t = -\frac{\sqrt{a}}{2}\varphi^2(t) + t\varphi(t) - \frac{\sqrt{a}\,t^2}{4a} + \frac{bt}{4a} - \frac{b^2 - 4ac}{8a\sqrt{a}}\ln(2\sqrt{a}t + b) + \mathcal{C}.$$

Aplicând teorema 4.1 obţinem

$$\int f(x)\mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{a}}{2}x^2 + x\left(\sqrt{a}x + \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) -$$

$$-\frac{\sqrt{a}}{4a}\left(\sqrt{a}x+\sqrt{ax^2+bx+c}\right)^2+\frac{b}{4a}\left(\sqrt{a}x+\sqrt{ax^2+bx+c}\right)+$$

$$+\frac{4ac-b^2}{8a\sqrt{a}}\ln\left[2\sqrt{a}\left(\sqrt{a}x+\sqrt{ax^2+bx+c}\right)+b\right]+c=$$

$$=x\sqrt{ax^2+bx+c}-\frac{1}{2}x\sqrt{ax^2+bx+c}+\frac{b}{4a}\sqrt{ax^2+bx+c}-$$

$$-\frac{c\sqrt{a}}{4a}+\frac{4ac-b^2}{8a\sqrt{a}}\ln\left(2ax+b+2\sqrt{a}\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}\right)+c$$

adică

$$\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,x\,dx=\frac{1}{4a}\Big[(2ax+b)\sqrt{ax^2+bx+c}+$$

$$+\frac{4ac-b^2}{2\sqrt{a}}\ln\left(2ax+b+2\sqrt{a}\sqrt{x^2+bx+c}\right)\Big]+c.$$

4.6. *Exerciţii*

Să se calculeze, utilizând a doua metodă de schimbare de variabilă primitivele următoarelor funcţii:

1. $f(x)=\sqrt{\dfrac{e^x-1}{e^x+1}}$, $\quad x\in(0,\infty)$.

2. $f(x)=\cos^2\sqrt{x}$, $\quad x\in(0,\infty)$.

3. $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}}$, $\quad x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

4. $f(x)=\dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}$, $\quad x\in\mathbf{R}$.

5. $f(x)=\dfrac{1}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$, $\quad x\in(0,\infty)$.

6. $f(x)=\dfrac{1}{(x^2+2)\sqrt{x^2+1}}$, $\quad x\in(0,\infty)$.

7. $f(x)=\dfrac{x^4\operatorname{arc\,tg}x}{1+x^2}$, $\quad x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

8. $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{1+x+x^2}}$, $\quad x\in(0,\infty)$.

§5. INTEGRAREA FUNCŢIILOR RAŢIONALE

5.1. Reamintim că o funcţie $f:I\to\mathbf{R}$, unde I este un interval din $\mathbf{R}$, se numeşte *raţională* dacă există două polinoame P şi Q cu coeficienţi numere reale, astfel încât

$$(\forall)\ x \in I \Rightarrow Q(x) \neq 0 \text{ şi } f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

O funcţie raţională f se va numi *simplă* dacă este de una din următoarele forme:

i) $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$;

ii) $f(x) = \dfrac{A}{(x-a)^n}$, unde $n \in \mathbf{N}^*$;

iii) $f(x) = \dfrac{Bx + C}{(ax^2 + bx + c)^n}$, unde $n \in \mathbf{N}^*$ şi $b^2 - 4ac < 0$.

Se arată că orice funcţie raţională se scrie ca o sumă finită de funcţii raţionale simple şi prin aceasta calculul primitivelor unei funcţii raţionale se reduce la calculul primitivelor funcţiilor raţionale simple.

Vom da în continuare metode de calcul al primitivelor funcţiilor de tipul ii) şi iii) analizând pe rând diverse cazuri particulare.

5.2. Dacă funcţia raţională $f : I \to \mathbf{R}$ este de forma

$$f(x) = \frac{1}{x-a}$$

şi

$$I \subset (a, \infty) \text{ sau } I \subset (-\infty, a)$$

avem

$$\int \frac{1}{x-a}\,dx = \ln|x-a| + \mathcal{C},$$

adică

$$\int \frac{1}{x-a}\,dx = \ln(x-a) + \mathcal{C} \text{ dacă } I \subset (a, \infty)$$

şi

$$\int \frac{1}{x-a}\,dx = \ln(a-x) + \mathcal{C} \text{ dacă } I \subset (-\infty, a).$$

Dacă funcţia raţională $f : I \to R$ este de forma

$$f(x) = \frac{1}{(x-a)^n},\ n \in \mathbf{N},\ n \geq 2$$

şi

$$I \subset (a, \infty) \text{ sau } I \subset (-\infty, a),$$

avem

$$\int \frac{1}{(x-a)^n}\,dx = -\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{n-1}} + \mathcal{C}.$$

5.3. Dacă funcţia raţională $f : I \to \mathbf{R}$ este de tipul

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}, \; a \neq 0$$

și

$$I \subset \mathbf{R},$$

atunci se știe că

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} \, dx = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} + \mathcal{C}.$$

Dacă funcția rațională $f : I \to \mathbf{R}$ $(I \subset \mathbf{R})$ este de tipul

$$f(x) = \frac{1}{(x^2 + a^2)^n}, \quad n \in \mathbf{N}, \; n \geqslant 2$$

vom da o formulă de recurență pentru calculul lui

$$I_n = \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} \, dx.$$

Înmulțind și împărțind mai întâi cu a^2, apoi adunând și scăzând x^2 la numărător obținem

$$I_n = \frac{1}{a^2} \int \frac{a^2}{(x^2 + a^2)^n} \, dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{a^2 + x^2}{(x^2 + a^2)^n} \, dx - \frac{1}{a^2} \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^n} \, dx =$$

$$= \frac{1}{a^2} \left[I_{n-1} - \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^n} \, dx \right].$$

Primitiva din paranteză se va calcula prin părți

$$\int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^n} dx = -\frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{1}{(x^2 + a^2)^{n-1}} \cdot x + \int (x)' \frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{1}{(x^2 + a^2)^{n-1}} dx =$$

$$= -\frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{x}{(x^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} I_{n-1}.$$

Deci
$$I_n = \frac{1}{a^2} \left[\frac{1}{2(n-1)} \frac{x}{(x^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} I_{n-1} \right].$$

Înainte de a trece la calcularea primitivelor celorlalte funcții de tipul iii) vom face următoarele observații.

Observații: (α) Funcțiile de tipul iii) pot fi considerate (dacă se dă a factor comun forțat la numitor) ca fiind de forma

$$f(x) = \frac{B'x + C'}{(x^2 + px + q)^n}$$

cu

$$p^2 - 4q = \left(\frac{b}{a}\right)^2 - 4\frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{a^2} < 0.$$

(β) Dacă $p^2 - 4q < 0$, atunci $x^2 + px + q$ se poate scrie ca suma de două pătrate:

$$x^2 + px + q = \left(x^2 + 2\frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4}\right) + q - \frac{p^2}{4} =$$

$$= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q - p^2}{4} = \varphi^2(x) + \delta^2,$$

unde

$$\varphi(x) = x + \frac{p}{2} \text{ şi } \delta = \sqrt{\frac{4q - p^2}{4}} > 0.$$

5.4. Dacă funcţia $f : I \to \mathbf{R}$ $(I \subset \mathbf{R})$ este de tipul

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + px + q},$$

atunci folosind observaţia (β), avem

$$\int \frac{1}{x^2 + px + q}\,dx = \int \frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x) + \delta^2}\,dx = \frac{1}{\delta} \operatorname{arc\,tg} \frac{\varphi(x)}{\delta} + \mathcal{C} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4q - p^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + \mathcal{C}.$$

Dacă funcţia raţională f este de tipul

$$f(x) = \frac{1}{(x^2 + px + q)^n}, \quad n \in \mathbf{N}^*, \quad n \geqslant 2,$$

cu $p^2 - 4q < 0$, atunci în baza observaţiei (β), putem scrie

$$f(x) = \frac{1}{[\varphi^2(x) + \delta^2]^n},$$

unde

$$\varphi(x) = x + \frac{p}{2} \quad \text{şi} \quad \delta^2 = \frac{4q - p^2}{4}.$$

Deci

$$\int f(x)dx = \int \frac{1}{[\varphi^2(x) + \delta^2]^n}\,dx = \int \frac{\varphi'(x)}{[\varphi^2(x) + \delta^2]^n}\,dx = F \circ \varphi + \mathcal{C}$$

unde F este o primitivă a funcţiei

$$u \to \frac{1}{(u^2 + \delta^2)^n},$$

al cărei calcul a fost descris în 4.3.

Dacă funcţia raţională f este de tipul

$$f(x) = \frac{x}{(x^2 + px + q)^n}, \quad n \in \mathbf{N}^*,$$

atunci, înmulţind şi împărţind întâi cu 2, apoi adunând şi scăzând p, obţinem

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^n} - \frac{p}{2} \cdot \frac{1}{(x^2 + px + q)^n}.$$

A doua funcţie din membrul drept este, abstracţie făcând de constanta $\frac{p}{2}$, de tipul precedent.

Pentru a calcula o primitivă a primei funcţii din membrul drept, făcem schimbarea de variabilă

$$\Psi(x) = x^2 + px + q,$$

şi obţinem:

$$\int \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^n} dx = \int \frac{\Psi'(x)}{\Psi^n(x)} dx = -\frac{1}{(n-1)\Psi^{n-1}(x)} + \mathcal{C} =$$

$$= -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{(x^2 + px + q)^{n-1}} + \mathcal{C}.$$

5.5. *Exemplu.* Se consideră funcţia raţională

$$f(x) = \frac{x+1}{(x^2 + x + 1)^2}.$$

Avem, aplicând procedeul de mai sus

$$\frac{x+1}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2 + x + 1)'}{(x^2 + x + 1)^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x^2 + x + 1)^2}$$

şi deci

$$\int f(x) dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x^2 + x + 1)} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x^2 + x + 1)^2} dx.$$

Aplicând acum procedeul de la 5.4 funcţiei

$$x \to \frac{1}{(x^2 + x + 1)^2}$$

vom avea

$$(2x + 1)(x^2 + x + 1)' = 4(x^2 + x + 1) - 3$$

şi deci

$$\int \frac{1}{(x^2 + x + 1)^2} dx = \frac{1}{3} \int \frac{4(x^2 + x + 1) - (2x + 1)(x^2 + x + 1)'}{(x^2 + x + 1)^2} dx =$$

$$= \frac{4}{3} \int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx - \frac{1}{3} \int (2x + 1) \cdot \frac{(x^2 + x + 1)'}{(x^2 + x + 1)^2} dx.$$

Aplicând formula integrării prin părţi la termenul al doilea din membrul drept avem

$$\frac{1}{3} \int (2x + 1) \frac{(x^2 + x + 1)'}{(x^2 + x + 1)^2} dx = -\frac{1}{3} \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} + \frac{2}{3} \int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx$$

şi deci

$$\int \frac{1}{(x^2 + x + 1)^2} dx = \frac{1}{3} \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} + \frac{2}{3} \int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx.$$

Aplicând acum procedeul de la 5.3 obţinem:

$$\int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx = \int \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} dx =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)\right] + c.$$

În final găsim

$$\int \frac{x+1}{(x^2+x+1)^2}\, dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2+x+1} + \frac{1}{6} \frac{2x+1}{x^2+x+1} +$$

$$+ \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c = \frac{1}{3} \frac{x-1}{x^2+x+1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c.$$

Admitem fără demonstrație următorul rezultat:

5.6. Teorema (Descompunerea funcțiilor raționale în funcții raționale simple.) Fie $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție rațională

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad (Q(x) \neq 0 \quad (\forall)\, x \in I)$$

unde P și Q sunt polinoame prime între ele. Presupunem că descompunerea lui Q în factori primi are forma

$$Q(x) = (x - a_1)^{\alpha_1} \dots (x - a_q)^{\alpha_q} \cdot (x^2 + M_1 x + N_1)^{\beta_1} \dots (x^2 + M_r x + N_r)^{\beta_r}.$$

Atunci f se descompune, în mod unic,

$$f(x) = L(x) + \sum_{n=1}^{q} \left[\frac{A_1^n}{(x-a_n)^{\alpha_n}} + \frac{A_2^n}{(x-a_n)^{\alpha_n - 1}} + \dots + \frac{A_\alpha^n}{x - a_n}\right] +$$

$$+ \sum_{m=1}^{r} \left[\frac{B_1^m x + C_1^m}{(x^2 + M_m x + N_m)^{\beta_m}} + \frac{B_2^m x + C_2^m}{(x^2 + M_m x + N_m)^{\beta_m - 1}} + \dots + \frac{B_m^m x + C_m^m}{x^2 + M_m x + N_m}\right]$$

unde L este un polinom cu coeficienți reali, iar a_m, M_m, N_m, A_i^n, B_j^m, C_j^m sunt constante reale și $M_m^2 - 4N_m < 0$.

5.7. *Observații.* Practic, pentru a realiza o descompunere a unei funcții raționale ca sumă de funcții raționale simple se procedează astfel:

Se face împărțirea cu rest a lui P la Q. Vom avea

$$P = L \cdot Q + R$$

unde R este un polinom de grad strict mai mic decât gradul lui Q și deci

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = L(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

i) Se scrie formula de descompunere ca în enunțul teoremei în care coeficienții $A, \dots, B, \dots, C, \dots$ sunt nedeterminați.

ii) Se aduce la același numitor în membrul drept și se pune condiția ca numărătorul fracției care rezultă în membrul drept să coincidă cu numărătorul fracției din membrul stâng, de fapt aceasta revine la a scrie că două polinoame coincid.

iii) Se obține un sistem liniar în care necunoscutele sunt coeficienții cău-

ta$\hat{\text{t}}$i $A,\ldots,\ B,\ldots,\ C,\ldots$.

Deci, existen$\hat{\text{t}}$a $\hat{\text{s}}$i unicitatea solu$\hat{\text{t}}$iei acestui sistem este echivalentă cu existen$\hat{\text{t}}$a $\hat{\text{s}}$i unicitatea coeficien$\hat{\text{t}}$ilor din teorema 5.6.

Procedeul descris mai sus de găsire a coeficien$\hat{\text{t}}$ilor $A,\ldots,\ B,\ldots,\ C,\ldots$ se numeşte *metoda coeficien$\hat{\text{t}}$ilor nedetermina$\hat{\text{t}}$i.*

5.8. *Exemple*

1) Să se calculeze

$$\int \frac{x^4+1}{x^3+1}\,\mathrm{d}x$$

pe un interval I care nu con$\hat{\text{t}}$ine punctul $x=-1$.

Vom avea

$$f(x)=\frac{x^4+1}{x^3+1}=x+\frac{-x+1}{x^3+1}$$

şi din $x^3+1=(x+1)\ (x^2-x+1)$ deducem că are loc o descompunere de forma

$$\frac{-x+1}{x^3+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}.$$

Aducând la acelaşi numitor în membrul drept obţinem:

$$-x+1=A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1),\ (\forall)x\in I$$

şi deci

$$-x+1=x^2(A+B)+x(-A+B+C)+A+C,\ (\forall)x\in I,$$

ceea ce conduce la sistemul

$$\begin{cases} A+B=0, \\ -A+B+C=-1, \\ A+C=1. \end{cases}$$

Un calcul simplu ne dă $A=\frac{2}{3}$, $B=-\frac{2}{3}$, $C=\frac{1}{3}$.

Deci

$$f(x)=x+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x+1}-\frac{1}{3}\,\frac{2x-1}{x^2-x+1}.$$

Prin urmare $\displaystyle\int \frac{x^4+1}{x^3+1}\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+c.$

2) Să se calculeze

$$\int \frac{1}{x^3+x^5}\,\mathrm{d}x$$

pe un interval care nu con$\hat{\text{t}}$ine punctul $x=0$.

Divizorii ireductibili ai lui x^3+x^5 sunt x şi x^2+1. Primul are ordinul de m

tiplicitate 3, iar al doilea are ordinul 1. Avem deci

$$\frac{1}{x^3+x^5}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{A_3}{x^3}+\frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Aducând la acelaşi numitor în membrul drept obţinem:

$$1=A_1x^2(x^2+1)+A_2x(x^2+1)+A_3(x^2+1)+x^3(Bx+C)$$

şi deci sistemul

$$\begin{cases} A_1+B=0, \\ A_2+C=0, \\ A_1+A_3=0, \\ A_2=0, \\ A_3=1, \end{cases}$$

a cărui soluţie este

$$A_1=-1,\ A_2=0,\ A_3=1,\ B=1,\ C=0.$$

Deci

$$f(x)=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}+\frac{x}{x^2+1}.$$

Prin urmare $\int\frac{dx}{x^3+x^5}=\ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}-\frac{1}{2x^2}+c.$

3) Să se calculeze

$$\int\frac{x+1}{x^4+x^2+1}dx.$$

Divizorii ireductibili ai lui x^4+x^2+1 sînt x^2+x+1 şi x^2-x+1. Fiecare dintre aceşti divizori are ordinul de multiplicitate 1. Avem deci

$$f(x)=\frac{Bx+C}{x^2+x+1}+\frac{B'x+C'}{x^2-x+1}.$$

Aducând la acelaşi numitor în membrul drept obţinem:

$$x+1=(Bx+C)(x^2-x+1)+(B'x+C')(x^2+x+1)$$

care conduce la sistemul

$$\begin{cases} B+B'=0 \\ -B+C+B'+C'=0 \\ B-C+B'+C'=1 \\ C+C'=1 \end{cases}$$

echivalent cu sistemul

$$\begin{cases} B+B'=0, \\ -B+B'=-1, \\ C+C'=1, \\ -C+C'=1 \end{cases}$$

a cărui soluţie este

$$B=\frac{1}{2},\ B'=-\frac{1}{2},\ C=0,\ C'=1.$$

Avem

$$f(x)=\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+x+1}-\frac{1}{2}\frac{x-2}{x^2-x+1}=\frac{1}{4}\frac{2x-1}{x^2+x+1}-\frac{1}{4}\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}-$$

$$-\frac{1}{4}\cdot\frac{2x-1}{x^2-x+1}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}},$$

de unde

$$\int\frac{x+1}{x^4+x^2+1}\,dx=\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+c$$

4) Să se calculeze

$$\int\frac{1}{2\sin x-\cos x+5}\,dx$$

pe intervalul $(-\pi,\ \pi)$.

Facem substituția

$$t=\operatorname{tg}\frac{x}{2},\quad x\in(-\pi,\pi)$$

obținem

$$x=\varphi(t)=2\operatorname{arctg}t,\ t\in(-\infty,\ +\infty)$$

și

$$\varphi'(t)=\frac{2}{1+t^2}.$$

Punând

$$f(x)=\frac{1}{2\sin x-\cos x+5},\quad x\in(-\pi,\pi),$$

obținem

$$f(x)=\frac{1}{2\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}-\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}+5},$$

$$f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)=\frac{1}{\dfrac{4t}{1+t^2}-\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+5}\cdot\frac{2}{1+t^2}=\frac{2}{6t^2+4t+4}=\frac{1}{3t^2+2t+2}.$$

Deoarece

$$\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt=\int\frac{1}{3t^2+2t+2}\,dt=\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3t+1}{\sqrt{5}}+c,$$

obținem

$$\int f(x)dx=\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arc\,tg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}+c.$$

5.9. *Exerciții.* **Să se calculeze primitivele următoarelor funcții raționale utilizând descompunerea în funcții raționale simple:**

1. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2x + 3}$, $x \in \mathbf{R}$.

2. $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^3 - x^2 + x - 1}$, $x \in (-\infty, 0)$.

3. $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{(x-1)^3 (x^2 - x + 1)^2}$, $x \in (-\infty, 1)$.

4. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{(x+1)^3 (x^2 + 3x + 2)}$, $x \in (-2, -1)$.

5. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^4 + x^2 + 1}$, $x \in \mathbf{R}$.

6. $f(x) = \dfrac{1 + x^2}{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1}$, $x \in \mathbf{R}$.

7. $f(x) = \dfrac{x^7 + 1}{x^2(x-1)^3}$, $x \in (0, 1)$.

8. $f(x) = \dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}$, $x \in (0, \infty)$.

9. $f(x) = \dfrac{1}{x(x+1)(x+2)(x+3)}$, $x \in (0, \infty)$.

10. $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x^3 + x^2(1 - \sqrt{2}) + x(1 - \sqrt{2}) + 1}$, $x \in (0, \infty)$.

11. $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^3}$, $x \in (0, \infty)$.

12. $f(x) = \dfrac{x^2}{1 + x^4}$, $x \in \mathbf{R}$.

13. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x^2 + 4x + 5}$, $x \in \mathbf{R}$.

14. $f(x) = \dfrac{x}{(x^2 + 3)(x + 1)}$, $x \in (0, \infty)$.

15. $f(x) = \dfrac{1}{x(x^2 + 1)^2}$, $x \in (0, \infty)$.

5.10. *Exerciţii.* **Să se calculeze primitivele următoarelor funcţii reductibile la funcţii raţionale:**

I.

1. $f(x) = \dfrac{1}{1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}}$, $x \in (-1, \infty)$.

2. $f(x) = \dfrac{1}{(1 + x)\sqrt{1 + x - x^2}}$, $x \in \left(0, \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$.

3. $f(x) = \dfrac{1}{x - \sqrt{x^2 + 2x + 4}}$, $x \in \mathbf{R}$.

4. $f(x) = \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2 - x + 1}}$, $x \in \mathbf{R}$.

5. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{(7x - 10 - x^2)^3}}$, $x \in (2, 5)$.

6. $f(x) = \dfrac{1}{1-\sqrt{1 - 2x - x^2}}$, $x \in (0, -1 + \sqrt{2})$.

7. $f(x) = \dfrac{x}{(1 - x^3)\sqrt{1 - x^2}}$, $x \in (-1, 1)$.

8. $f(x) = \dfrac{x + \sqrt{1 + x + x^2}}{1 + x + \sqrt{1 + x + x^2}}$, $x \in \mathbf{R}$.

9. $f(x) = x^2\sqrt{-x^2 + 4x + 5}$, $x \in (-1, 5)$.

10. $f(x) = \dfrac{1 + x}{\sqrt{-x^2 + 4x + 5}}$, $x \in (-1, 5)$.

II.

1. $f(x) = \dfrac{1}{3 + \cos x}$, $x \in (-\pi, \pi)$

2. $f(x) = \dfrac{1}{1 + \sin^2 x}$, $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

3. $f(x) = \dfrac{1}{\sin x - 2\cos x + 3}$, $x \in (-\pi, \pi)$

4. $f(x) = \dfrac{1}{\sin x\,(2 + \cos x - 2\sin x)}$, $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{6}\right)$.

5. $f(x) = \dfrac{\sin x}{1 + \sin x}$, $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

6. $f(x) = \dfrac{\sin^2 x \cos x}{\sin x + \cos x}$, $x \in \left(-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right)$.

7. $f(x) = \dfrac{2\,\mathrm{tg}\,x + 3}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}$, $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{k\pi + \dfrac{\pi}{2} \;\middle|\; k \in \mathbf{Z}\right\}$.

8. $f(x) = \dfrac{1}{\cos^4 x \sin^2 x}$, $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

9. $f(x) = \dfrac{2\sin^2 x + 3\cos^2 x}{\sin x - \cos x}$, $x \in \left(-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right)$.

10. $f(x) = \dfrac{1 - a^2}{1 + a^2 + 2a\sin x}$, $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

unde a este un număr real $0 < a < 1$.

II.

Funcţii integrabile

§ 1. DIVIZIUNI

1.1. Definiţie. Fie $[a, b]$ un interval închis şi mărginit din R. Se numeşte diviziune a intervalului $[a, b]$ un sistem de puncte

$$\Delta = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$$

din $[a, b]$ astfel încât

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Uneori vom nota diviziunile astfel:

$$\Delta = (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$$

Cea mai mare dintre lungimile intervalelor

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$$

se numeşte norma diviziunii Δ şi se notează: $\| \Delta \|$.

Aşadar,

$$\| \Delta \| \overset{\text{def.}}{=} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} (x_i - x_{i-1}).$$

1.2. *Exemple.* Sistemele de puncte

$$\Delta_1 = (0, 1),$$

$$\Delta_2 = \left(0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1\right),$$

$$\Delta_3 = \left(0, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, 1\right)$$

sunt diviziuni ale intervalului [0, 1]. Aceste diviziuni au respectiv normele:

$$\| \Delta_1 \| = 1; \ \| \Delta_2 \| = \frac{1}{2}; \ \| \Delta_3 \| = \frac{1}{5}.$$

1.3. *Observaţii*: α) Dacă $[a, b]$ este un interval, atunci $\Delta = (a, b)$ este singura diviziune a lui $[a, b]$ de normă egală cu $b - a$. Orice altă diviziune a intervalului $[a, b]$ va avea norma strict mai mică decât $b - a$.

β) Pentru orice număr real $r > 0$ există diviziuni Δ ale intervalului $[a, b]$ astfel încât

$$\| \Delta \| < r.$$

Într-adevăr, să notăm cu L lungimea intervalului $[a, b]$:

$$L = b - a$$

şi să luăm un număr natural n astfel încât

$$n > \frac{L}{r}.$$

Împărţind intervalul $[a, b]$ în n părţi egale, obţinem diviziunea

$$\Delta = \left(a, a + \frac{L}{n}, a + 2\frac{L}{n}, \ldots, a + (n-1)\frac{L}{n}, b\right),$$

care are norma egală cu $\frac{L}{n}$. Deci

$$\| \Delta \| = \frac{L}{n} < r.$$

1.4. *Exerciţii.* Determinaţi normele diviziunilor:

$$\Delta_1 = \left(0, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\right),$$

$$\Delta_2 = \left(0, \frac{2}{13}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right),$$

$$\Delta_3 = (1, e, e^2, \ldots, e^{11}),$$

$$\Delta_4 = \left(0, \frac{1}{2^{10}}, \frac{1}{2^9}, \ldots, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2}, 1\right).$$

1.5. Definiţie. Fie

$$\Delta_1 = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$$

şi

$$\Delta_2 = (y_0, y_1, \ldots, y_{m-1}, y_m)$$

două diviziuni ale unui interval $[a, b]$.

Se spune că Δ_2 este **mai fină** decât Δ_1 dacă orice punct al diviziunii Δ_1 este şi punct al diviziunii Δ_2, adică mulţimea

$$\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$$

este inclusă în mulţimea

$$\{y_0, y_1, \ldots, y_m\}.$$

Dacă Δ_2 este mai fină decât Δ_1 vom scrie

$$\Delta_1 \subset \Delta_2.$$

1.6. *Exemplu.* Fie

$$\Delta_1 = \left(0, \frac{1}{2}, 1\right),$$

$$\Delta_2 = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, 1\right),$$

$$\Delta_3 = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right)$$

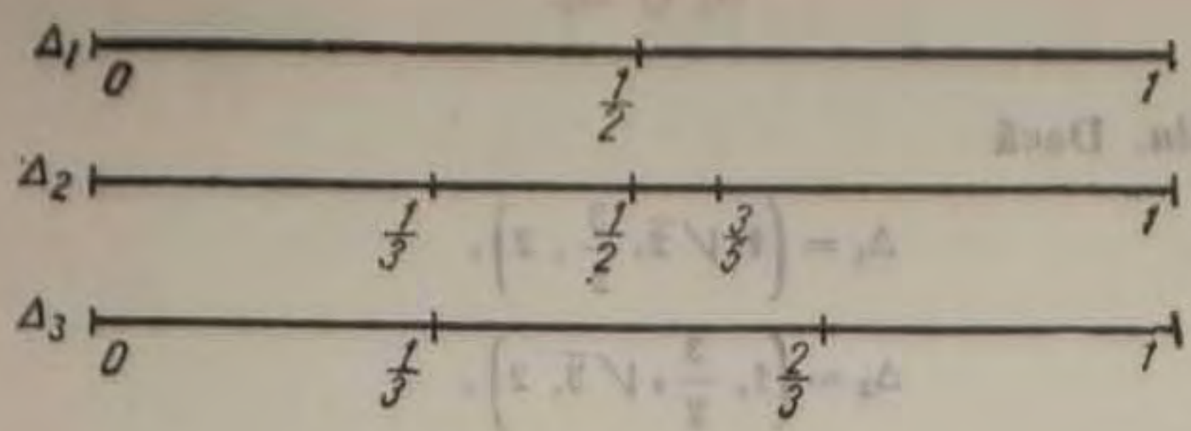


Fig. II.1.

diviziuni ale intervalului [0,1]. Atunci

$$\Delta_1 \subset \Delta_2, \ \Delta_1 \not\subset \Delta_3, \ \Delta_2 \not\subset \Delta_3.$$

1.7. *Observații.* α) Dacă Δ, Δ' sînt diviziuni ale intervalului $[a, b]$ astfel încât

$$\Delta \subset \Delta',$$

atunci

$$\| \Delta' \| \leqslant \| \Delta \|.$$

Deci, prin trecere la o diviziune mai fină, norma diviziunii se micșorează.

β) Din $\| \Delta' \| < \| \Delta \|$ nu rezultă, în general, că $\Delta \subset \Delta'$. De exemplu, dacă

$$\Delta = \Delta_1 = \left(0, \frac{1}{2}, 1\right)$$

$$\Delta' = \Delta_3 = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right),$$

atunci

$$\| \Delta' \| = \frac{1}{3} < \frac{1}{2} = \| \Delta \|$$

și totuși

$$\Delta \not\subset \Delta'.$$

1.8. Definiție. Fie

$$\Delta_1 = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$$

și

$$\Delta_2 = (y_0, y_1, \ldots, y_m)$$

(1)

două diviziuni ale intervalului $[a, b]$. Diviziunea formată din mulțimea

$$\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \cup \{y_0, y_1, \ldots, y_m\},$$

(2)

ale cărei elemente sunt luate în ordine strict crescătoare, se numește **reuniunea diviziunilor** Δ_1, Δ_2 și se notează

1.9. ***Exemplu.*** **Dacă**

$$\Delta_1 = \left(1, \sqrt{2}, \frac{3}{2}, 2\right),$$

$$\Delta_2 = \left(1, \frac{3}{2}, \sqrt{3}, 2\right),$$

$$\Delta_3 = (1, \sqrt{3}, 2)$$

sunt diviziuni ale intervalului [1, 2], atunci

$$\Delta_1 \cup \Delta_2 = \left(1, \sqrt{2}, \frac{3}{2}, \sqrt{3}, 2\right),$$

$$\Delta_1 \cup \Delta_3 = \left(1, \sqrt{2}, \frac{3}{2}, \sqrt{3}, 2\right),$$

$$\Delta_2 \cup \Delta_3 = \left(1, \frac{3}{2}, \sqrt{3}, 2\right).$$

1.10. ***Observaţii.*** **α) Reuniunea $\Delta_1 \cup \Delta_2$ a două diviziuni este mai fină decât fiecare din diviziunile Δ_1, Δ_2:**

$$\Delta_1 \subset \Delta_1 \cup \Delta_2 \text{ şi } \Delta_2 \subset \Delta_1 \cup \Delta_2.$$

β) Dacă

$$\Delta_1 = (x_0, x_1, \ldots, x_n),$$

$$\Delta_2 = (y_0, y_1, \ldots, y_m)$$

şi

$$\Delta_1 \cup \Delta_2 = (z_0, z_1, \ldots, z_p),$$

atunci

$$p \leqslant n + m - 1.$$

1.11. ***Exerciţii.*** a) Determinaţi reuniunea **perechilor de diviziuni**

(1)
$$\Delta' = \left(0, \frac{1}{2^4}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2}, 1\right),$$
$$\Delta'' = \left(0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right);$$

(2)
$$\Delta' = (0, e, e^2, 10),$$
$$\Delta'' = (0, 1, 2, 3, \ldots, 10).$$

b) Fie p, q două numere naturale şi diviziunile

$$\Delta' = \left(0, \frac{1}{p^n}, \frac{2}{p^n}, \ldots, \frac{k}{p^n}, \ldots, \frac{p^n - 1}{p^n}, 1\right),$$

$$\Delta'' = \left(0, \frac{1}{q^n}, \frac{2}{q^n}, \ldots, \frac{k}{q^n}, \ldots, \frac{q^n - 1}{q^n}, 1\right).$$

Să se arate că:

i) $\Delta' \subset \Delta'' \Leftrightarrow p$ divide pe q;

ii) $\Delta' \cup \Delta'' \subset \Delta$ unde

$$\Delta = \left(0, \frac{1}{(pq)^n}, \frac{2}{pq)^n}, \ldots, \frac{k}{(pq)^n}, \ldots, \frac{(pq)^n - 1}{(pq)^n}, 1\right).$$

§ 2. FUNCȚII INTEGRABILE

2.1. Definiție. Considerăm următoarele obiecte:

1) un interval închis și mărginit $[a, b]$;

2) o funcție $f : [a, b] \to \mathbf{R}$;

3) o diviziune $\Delta = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ a intervalului $[a, b]$;

4) un sistem de n puncte $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ astfel încât

$$x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i, \qquad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

numit sistem de puncte intermediare asociat diviziunii Δ. Numărul real

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

se numește suma Riemann asociată funcției f, diviziunii Δ și punctelor intermediare $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Acest număr va fi notat prin $\sigma_\Delta(f, \xi)$ sau prin $\sigma_\Delta(f, \xi_i)$.

2.2. *Observație.* Dacă funcția f este pozitivă, atunci suma Riemann $\sigma_\Delta(f, \xi_i)$ reprezintă suma ariilor dreptunghiurilor de bază $x_i - x_{i-1}$ și de înălțime $f(\xi_i)$, $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Deci $\sigma_\Delta(f, \xi_i)$ aproximează aria mulțimii din plan, denumită **subgraficul** lui f,

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\},$$

delimitată de axa Ox, graficul funcției f și dreptele paralele la axa Oy care trec prin punctele de coordonate $(a, 0)$, respectiv $(b, 0)$ (fig. II.2).

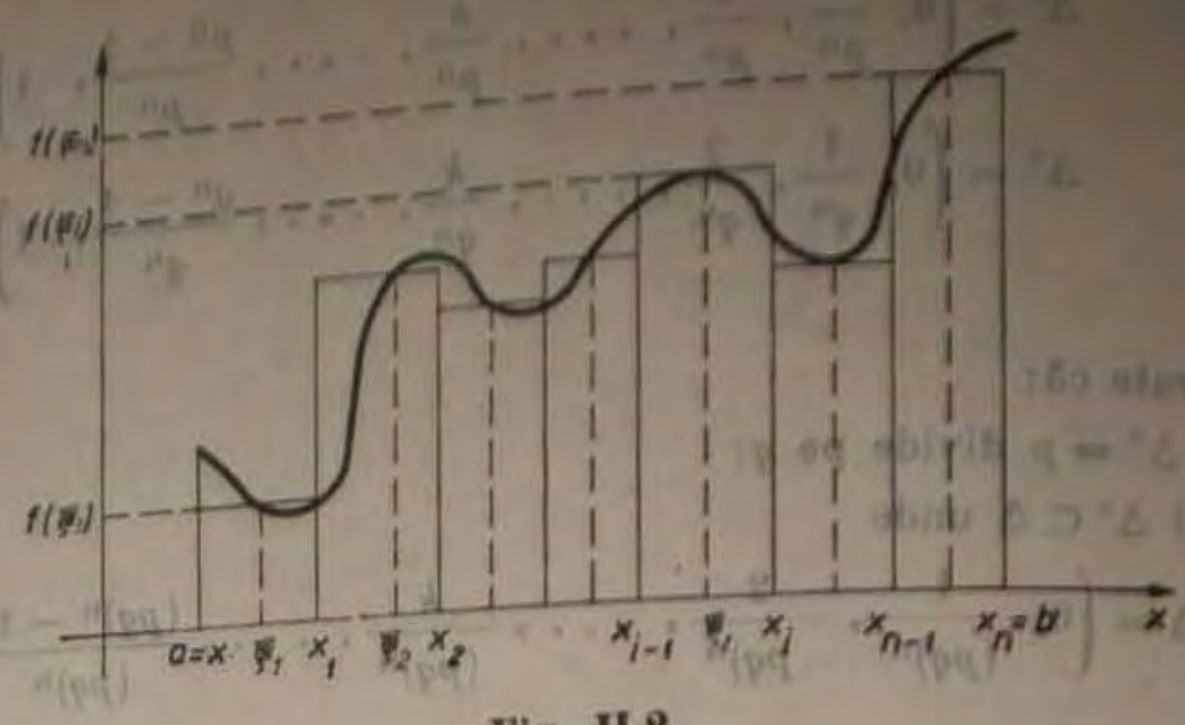


Fig. II.2.

Până acum nu ne-am pus problema ce înseamnă că o mulțime mărginită din plan are arie și cum s-ar defini aceasta. Noțiunea de arie va fi studiată în Capitolul III, paragraful 1, unde se va arăta că dacă funcția f este continuă, atunci mulțimea Γ_f are arie și

$$\text{aria}(\Gamma_f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

2.3. D e f i n i ț i e. **O funcție $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ se numește i n t e g r a b i l ă R i e m a n n (sau, simplu, i n t e g r a b i l ă) dacă există un număr real I_f cu proprietatea:**

oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $\eta_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice diviziune $\Delta = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ a intervalului $[a, b]$ cu $\| \Delta \| < \eta_\varepsilon$ și orice puncte intermediare

$$x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i \qquad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

are loc inegalitatea

$$| \sigma_\Delta(f, \xi) - I_f | < \varepsilon.$$

Numărul real I_f se numește i n t e g r a l a sau i n t e g r a l a d e f i n i t ă a f u n c ț i e i f pe i n t e r v a l u l $[a, b]$ și se notează

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

2.4. *Observații.* (α) Pentru un interval fixat $[a, b]$, *numărul I_f, asociat fiecărei funcții integrabile $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ este unic determinat de f.*

Într-adevăr, dacă I_1, I_2 ar fi două numere care verifică condițiile din definiția 2.3, atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ ar exista $\eta_{k,\varepsilon} > 0$ $(k = 1, 2)$ astfel încât pentru orice diviziune

$\Delta = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ a lui $[a, b]$ cu $\| \Delta \| < \eta_{k,\varepsilon}$ și orice puncte intermediare $x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ să avem

$$| \sigma_\Delta(f, \xi) - I_k | < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (k = 1, 2).$$

Luînd

$$\eta_\varepsilon \overset{\text{def}}{=\!=} \min(\eta_{1,\varepsilon}, \eta_{2,\varepsilon})$$

rezultă că pentru orice diviziune Δ a lui $[a, b]$ cu $\| \Delta \| < \eta_\varepsilon$ și orice sistem (ξ_i) de puncte intermediare asociat lui Δ, avem

$$| \sigma_\Delta(f, \xi) - I_1 | < \frac{\varepsilon}{2} \text{ și } | \sigma_\Delta(f, \xi) - I_2 | < \frac{\varepsilon}{2},$$

deci

$$| I_1 - I_2 | < | I_1 - \sigma_\Delta(f, \xi) | + | \sigma_\Delta(f, \xi) - I_2 | < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Cum $\varepsilon > 0$ a fost arbitrar, rezultă

$$I_1 = I_2.$$

(β) *Orice funcție integrabilă $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ este mărginită, adică există o constantă $M \geqslant 0$ astfel încât*

$$|f(x)| \leqslant M \quad (\forall) x \in [a, b].$$

Într-adevăr, să notăm cu I_f integrala lui f pe intervalul $[a, b]$ și să luăm $\varepsilon = 1$. Din definiția integrabilității lui f, rezultă că există $\eta_\varepsilon > 0$ astfel încât

$$| \sigma_\Delta(f, \xi_i) - I_f | < 1 \tag{1}$$

oricare ar fi diviziunea $\Delta = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$, cu $\| \Delta \| < \eta$, și oricare ar fi punctele intermediare

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \ (1 \leqslant i \leqslant n).$$

Considerînd o diviziune fixată

$$\Delta = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \text{ cu } \| \Delta \| < \eta$$

este suficient să arătăm că f este mărginită pe fiecare interval $[x_{k-1}, x_k]$ al acestei diviziuni. În acest scop, considerăm un element arbitrar $x \in [x_{k-1}, x_k]$ și luăm următorul sistem de puncte intermediare

$$\xi_i = \begin{cases} x_i, & \text{dacă } i \neq k \\ x, & \text{dacă } i = k. \end{cases} \tag{2}$$

Atunci din (1) și (2) rezultă

$$| f(x)(x_k - x_{k-1}) + \sum_{i \neq k} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) - I_f | < 1$$

deci

$$| f(x) | \leqslant M_k$$

unde cu M_k am notat numărul real pozitiv

$$\frac{1}{x_k - x_{k-1}} \left(1 + | I_f | + \sum_{i \neq k} | f(x_i) | (x_i - x_{i-1}) \right).$$

(γ) *Integrala definită a unei funcții f este un număr real, spre deosebire de integrala nedefinită a lui f care este mulțimea tuturor primitivelor lui f.*

2.5. *Exemple.*

1) Fie $f:[a, b] \to \mathbf{R}$ o funcţie constantă

$$f(x) = c, \quad (\forall)\ x \in [a, b].$$

Vom arăta că f este integrabilă şi

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = c(b - a).$$

Se observă că, oricare ar fi diviziunea

$$\Delta = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$$

a lui $[a, b]$ şi oricare ar fi punctele intermediare

$$x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i, \quad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

avem

$$\sigma_\Delta(f, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = c(x_n - x_0) = c(b - a).$$

Deci, luând $I = c(b - a)$, avem

$$|\sigma_\Delta(f, \xi) - I| = 0 < \varepsilon$$

oricare ar fi $\varepsilon > 0$. Prin urmare f este integrabilă şi

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = c(b - a).$$

2) Fie $\alpha \in \mathbf{R}$ şi $f:[a, b] \to \mathbf{R}$ definită prin

$$f(x) = \alpha x, \quad (\forall)\ x \in [a, b]$$

Vom arăta că f este integrabilă şi

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{\alpha}{2}(b^2 - a^2).$$

Pentru orice diviziune $\Delta = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ a intervalului $[a, b]$ cu norma mai mică ca $\eta > 0$ şi orice puncte intermediare

$$x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

avem

$$(1) \qquad \sigma_\Delta(f, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)(x_i - x_{i-1}) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}\left[f(\xi_i) - f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)\right](x_i - x_{i-1}).$$

Deoarece $f(x) = \alpha x$ pentru orice $x \in [a, b]$, deducem

$$f(\xi_i) - f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right) = \alpha\left(\xi_i - \frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right).$$

Observând că $\dfrac{x_i + x_{i-1}}{2}$ este mijlocul intervalului $[x_{i-1}, x_i]$, deducem

(2) $$\left| f(\xi_i) - f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right) \right| < |\alpha| \eta.$$

Pe de altă parte avem

(3) $$\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)(x_i - x_{i-1}) = \frac{\alpha}{2} \sum_{i=1}^{n} (x_i + x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \frac{\alpha}{2} \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - x_{i-1}^2) = \frac{\alpha}{2}(b^2 - a^2);$$

deci din relațiile (1), (2) și (3) deducem

$$\left| \sigma_\Delta(f, \xi) - \frac{\alpha}{2}(b^2 - a^2) \right| \leqslant |\alpha| \eta (b - a).$$

Fie acum $\varepsilon > 0$ și

$$0 < \eta_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{|\alpha| \cdot |b - a|},$$

obținem

$$\left| \sigma_\Delta(f, \xi) - \frac{\alpha}{2}(b^2 - a^2) \right| < \varepsilon,$$

pentru orice diviziune Δ cu $\|\Delta\| < \eta$ și orice sistem de puncte intermediare asociat diviziunii Δ. De aici rezultă că f este integrabilă și că

$$\int_a^b f(x)\, dx = \frac{\alpha}{2}(b^2 - a^2).$$

3) Să se arate că funcția

$$f(x) = \cos x$$

este integrabilă pe orice interval $[a, b] \subset \mathbf{R}$ și

$$\int_a^b \cos x\, dx = \sin b - \sin a.$$

Fie $\Delta = (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$ o diviziune a intervalului $[a, b]$ și fie $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ puncte intermediare arbitrare.

Aplicând teorema creșterilor finite funcției $f(x) = \sin x$ pe fiecare interval $[x_{i-1}, x_i]$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, obținem punctele $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$ astfel încât

$$\sin x_i - \sin x_{i-1} = (x_i - x_{i-1}) \cos c_i, \ (1 \leqslant i \leqslant n).$$

Ținând seama de aceste egalități putem scrie:

(1) $$\sigma_\Delta(f, \xi_i) = \sum_{i=1}^{n} \cos \xi_i (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \cos c_i (x_i - x_{i-1}) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} (\cos \xi_i - \cos c_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (\sin x_i - \sin x_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} (\cos \xi_i - \cos c_i)(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \sin b - \sin a + \sum_{i=1}^{n} (\cos \xi_i - \cos c_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Aplicând acum teorema creşterilor finite funcţiei $f(x) = \cos x$ pe intervalul $[\xi_i, c_i]$ sau $[c_i, \xi_i]$, obţinem un punct $\theta_i \in (\xi_i, c_i)$ astfel încât

$$\cos\xi_i - \cos c_i = (\xi_i - c_i) \sin\theta_i,$$

deci

$$|\cos \xi_i - \cos c_i| \leqslant |\xi_i - c_i| \cdot |\sin\theta_i| \leqslant \|\Delta\|,$$

prin urmare

$$(2) \qquad \left|\sum_{i=0}^{n} (\cos\xi_i - \cos c_i)(x_i - x_{i-1})\right| \leqslant \|\Delta\| \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = \|\Delta\|(b-a).$$

Din (1) şi (2) rezultă:

$$(3) \qquad |\sigma_\Delta(f, \xi_i) - (\sin b - \sin a)| \leqslant \|\Delta\|(b-a).$$

Pentru orice $\varepsilon > 0$, luăm η_ε astfel încât

$$0 < \eta_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Atunci din (3) rezultă că pentru orice diviziune Δ, cu $\|\Delta\| < \eta_\varepsilon$ şi pentru orice puncte intermediare ξ_i are loc inegalitatea

$$|\sigma_\Delta(f, \xi_i) - (\sin b - \sin a)| < \varepsilon.$$

Aceasta arată că funcţia $f(x) = \cos x$ este integrabilă pe $[a, b]$ şi

$$\int_a^b \cos x dx = \sin b - \sin a.$$

2.6. *Exemple de funcţii neintegrabile.* 1) Vom arăta că funcţia lui Dirichlet $g : [0, 1] \to \mathbf{R}$ definită prin

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \text{ este raţional,} \\ 0, & \text{dacă } x \text{ este iraţional} \end{cases}$$

nu este integrabilă.

Fie $\Delta = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ o diviziune a intervalului $[0, 1]$ şi fie

$$\xi_i', \xi_i'' \in [x_{i-1}, x_i], \quad 1 \leqslant i \leqslant n$$

două sisteme de puncte intermediare alese astfel încât

fiecare ξ_i' $(1 \leqslant i \leqslant n)$ este raţional,

iar

fiecare ξ_i'' $(1 \leqslant i \leqslant n)$ este iraţional.

Atunci

$$g(\xi_i') = 1 \text{ şi } g(\xi_i'') = 0, \quad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

deci

$$(1) \qquad \sigma_\Delta(g, \xi') = 1, \ \sigma_\Delta(g, \xi'') = 0.$$

Dacă g ar fi integrabilă, atunci ar exista $I \in \mathbf{R}$ care ar verifica condiţiile definiţiei

2.3. **În particular, pentru** $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{4}$ **ar exista** $\eta_\varepsilon > 0$ **astfel încât pentru orice diviziune**

$$\Delta = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \text{ a lui } [0, 1], \text{ cu } \| \Delta \| < \eta_\varepsilon, \text{ avem}$$

(2) $$| \sigma_\Delta(g, \xi') - I | < \varepsilon \text{ și } | \sigma_\Delta(g, \xi'') - I | < \varepsilon.$$

Din (1) și (2) rezultă

$$| 1 - I | = | \sigma_\Delta(g, \xi') - I | < \varepsilon.$$
$$| I | = | 0 - I | = | \sigma_\Delta(g, \xi'') - I | < \varepsilon,$$

ceea ce conduce la contradicția

$$1 = | 1 - I + I | \leqslant | 1 - I | + | I | < 2\varepsilon < 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Așadar, funcția g ***nu este integrabilă.***

2) Funcția $g_\alpha : [0, 1] \to \mathbf{R}$ definită prin

$$g_\alpha(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^\alpha}, & \text{dacă } x \in [0, 1] \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

fiind nemărginită pentru $\alpha > 0$, rezultă din observația 2.4 (β) că *nu este integrabilă.*

2.7. *Observație. Dacă* $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ *sunt două funcții cu proprietățile:*

(α) f ***este integrabilă pe*** $[a, b]$;

(β) ***există o parte finită*** $A \subset [a, b]$ ***astfel încât***

$$g(x) = f(x), \quad (\forall)\, x \in [a, b] \setminus A,$$

atunci

(1) g ***este integrabilă pe*** $[a, b]$

și

(2) $$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Este suficient ca demonstrația să fie dată pentru cazul cînd mulțimea finită A **este formată dintr-un singur punct** c**, deoarece cazul general se poate obține din acesta prin inducție. Presupunem deci** $A = \{c\}$.

Funcția f fiind integrabilă, este mărginită (observația 2.4(β)), deci există $M_1 \geqslant 0$ astfel încât

$$| f(x) | \leqslant M_1 \quad (\forall) x \in [a, b]$$

luînd

$$M \overset{\text{def.}}{=} \max(M_1, | g(c) |)$$

rezultă

$$| f(x) | \leqslant M \quad (\forall) x \in [a, b]$$

și

$$| g(x) | \leqslant M \quad (\forall) x \in [a, b]$$

f **fiind integrabilă, înseamnă că pentru orice** $\varepsilon > 0$ **există** $\eta_\varepsilon > 0$ **astfel încât**

$$(1)\qquad \left| \sigma_\Delta(f, \xi_i) - \int_a^b f(x)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

oricare ar fi diviziunea $\Delta = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$, cu $\|\Delta\| < \eta'_\varepsilon$, şi oricare ar fi punctele intermediare $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] (1 \leqslant i \leqslant n)$.

Luând

$$\eta_\varepsilon \overset{\text{def.}}{=} \min\left(\eta'_\varepsilon, \frac{\varepsilon}{8M}\right)$$

avem $\eta_\varepsilon \leqslant \eta'_\varepsilon$

şi

$$(2)\qquad 4M\eta_\varepsilon \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dacă c este un punct al diviziunii Δ, atunci există $0 \leqslant j \leqslant n$ astfel încât $c = x_j$. În acest caz singurele puncte intermediare care ar putea coincide cu $c = x_j$ sunt punctele ξ_j sau ξ_{j+1}.

Deci ţinând seama de faptul că $f(x) = g(x)$ $(\forall)$ $x \neq c$, obţinem

$$\left| \sigma_\Delta(f, \xi_i) - \sigma_\Delta(g, \xi_i) \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} (f(\xi_i) - g(\xi_i))(x_i - x_{i-1}) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| f(\xi_j) - g(\xi_j) \right| (x_j - x_{j-1}) + \left| f(\xi_{j+1}) - g(\xi_{j+1}) \right| (x_{j+1} - x_j) \leqslant$$

$$\leqslant 4M \|\Delta\| < 4M\eta_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dacă c nu este un punct al diviziunii Δ, atunci c este conţinut într-un interval deschis (x_{k-1}, x_k). Deci singurul punct intermediar care ar putea coincide cu c este punctul ξ_k, prin urmare

$$\left| \sigma_\Delta(f, \xi_i) - \sigma_\Delta(g, \xi_i) \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} (f(\xi_i) - g(\xi_i))(x_i - x_{i-1}) \right| =$$

$$= \left| f(\xi_k) - g(\xi_k) \right| (x_k - x_{k-1}) \leqslant 2M \|\Delta\| < 2M\eta_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Din analiza făcută până acum rezultă că, oricare ar fi poziţia punctului c, are loc inegalitatea

$$(3)\qquad \left| \sigma_\Delta(f, \xi_i) - \sigma_\Delta(g, \xi_i) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Din inegalităţile (1) şi (3) obţinem

$$\left| \sigma_\Delta(g, \xi_i) - \int_a^b f(x)\,dx \right| < \varepsilon,$$

adică g este integrabilă şi

$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

2.8. *Observaţie.* Observaţia precedentă arată că dacă f este o funcţie integrabilă pe $[a, b]$ şi dacă se modifică valorile funcţiei f într-o mulţime finită de puncte $A =$

$= \{a_1, a_2, \ldots, a_m\} \subset [a, b]$, atunci funcția nou-obținută este încă integrabilă și integralele celor două funcții sunt egale.

Dacă modificarea valorilor funcției f se face într-o mulțime infinită de puncte, atunci funcția nou-obținută poate să nu mai fie integrabilă. Într-adevăr, funcția constantă

$$f_0(x) = 0, \ (\forall) x \in [0, 1]$$

este integrabilă (exemplul 2.5 (1)). Totuși funcția lui Dirichlet (exemplul 2.6 (1))

$$g(x) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } x \in [0, 1] \cap Q, \\ 0, \text{ dacă } x \in [0, 1] \setminus Q, \end{cases}$$

care se poate obține prin modificarea funcției f_0 pe mulțimea infinită

$$[0, 1] \cap Q$$

nu este integrabilă.

2.9. Teoremă. Pentru o funcție $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ următoarele afirmații sunt echivalente:

(α) f este integrabilă;

(β) există un număr real I astfel încât oricare ar fi șirul de diviziuni

$$\Delta_n = (x_0^n, x_1^n, \ldots, x_{k_n}^n), \quad (n \in \mathbf{N})$$

ale intervalului $[a, b]$ cu

$$\lim_{n \to \infty} \| \Delta_n \| = 0$$

și oricare ar fi punctele intermediare

$$x_{i-1}^n \leqslant \xi_i^n \leqslant x_i^n, \quad (1 \leqslant i \leqslant k_n;\ n \in \mathbf{N}),$$

șirul sumelor Riemann

$$\{\sigma_{\Delta_n}(f, \xi^n)\}_{n \in \mathbf{N}}$$

converge la I.

Demonstrație (α) $\Rightarrow$ (β). Presupunem că funcția f este integrabilă și vom arăta că are loc afirmația (β).

Fie deci

$$\Delta_n = (a = x_0^n, x_1^n, \ldots, x_{k_n}^n = b)$$

un șir de diviziuni ale intervalului $[a, b]$ astfel încât

(1) $$\lim_{n \to \infty} \| \Delta_n \| = 0$$

și fie

$$\xi_i^n \in [x_{i-1}^n, x_i^n] \quad (1 \leqslant i \leqslant k_n)$$

puncte intermediare.

Funcția f fiind integrabilă, există $I_f \in \mathbf{R}$ cu proprietatea: pentru orice $\varepsilon > 0$ există η_ε astfel încât oricare ar fi diviziunea Δ cu $\| \Delta \| < \eta_\varepsilon$ și oricare ar fi punctele

intermediare ξ_i are loc inegalitatea

$$|\sigma_\Delta(f, \xi_i) - I_f| < \varepsilon. \tag{2}$$

Din relația (1) rezultă că există un rang $n_\varepsilon = n(\eta_\varepsilon)$ astfel încât

$$\|\Delta_n\| < \eta_\varepsilon, \quad (\forall)\, n \geqslant n_\varepsilon;$$

deci, ținând seamă de (2) obținem

$$|\sigma_{\Delta_n}(f, \xi_i'') - I_f| < \varepsilon, \quad (\forall)\, n \geqslant n_\varepsilon,$$

adică

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}(f, \xi_i^n) \text{ există} = I_f.$$

(β) $\Rightarrow$ (α). Să presupunem că f verifică condiția (β) și să arătăm că f este integrabilă, mai precis, numărul I care figurează în condiția (β) este chiar integrala lui f.

Dacă numărul I n-ar fi integrala lui f, atunci ar exista $\varepsilon_0 > 0$ astfel încât oricare ar fi $\eta > 0$ există o diviziune

$$\Delta_\eta = (x_0^\eta, x_1^\eta, \ldots, x_{k_\eta}^\eta)$$

a lui $[a, b]$ cu $\|\Delta_\eta\| < \eta$ și există punctele intermediare

$$x_{i-1}^\eta \leqslant \xi_i^\eta \leqslant x_i^\eta \quad (1 \leqslant i \leqslant k_\eta)$$

astfel încât

$$|\sigma_{\Delta_\eta}(f, \xi_i^\eta) - I| \geqslant \varepsilon_0.$$

Luînd în particular $\eta = \dfrac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, obținem o diviziune

$$\Delta_n = (x_0^n, x_1^n, \ldots, x_{k_n}^n)$$

a lui $[a, b]$ cu

$$\|\Delta_n\| < \frac{1}{n} \tag{1}$$

și un sistem ξ^n de puncte intermediare

$$x_{i-1}^n \leqslant \xi_i^n \leqslant x_i^n, \quad (1 \leqslant i \leqslant k_n)$$

astfel încât

$$|\sigma_{\Delta_n}(f, \xi^n) - I| \geqslant \varepsilon, \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Din inegalitatea (1) rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} \|\Delta_n\| = 0,$$

iar din (2) rezultă că șirul sumelor Riemann

$$\{\sigma_{\Delta_n}(f, \xi^n)\}_{n\in\mathbf{N}}$$

nu converge la I, ceea ce contrazice ipoteza (β).

2.10. *Observație.* Condiția (β) din enunțul teoremei 2.9 este echivalentă cu condiția următoare (aparent mai slabă)

(β') oricare ar fi șirul de diviziuni

$$\Delta_n = (x_0^n, x_1^n, \ldots, x_{k_n}^n), \quad (n \in \mathbf{N})$$

ale intervalului $[a, b]$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} \| \Delta_n \| = 0$, şi oricare ar fi punctele intermediare

$$x_{i-1}^n \leqslant \xi_i^n \leqslant x_i^n, \quad (1 \leqslant i \leqslant k_n; \quad n \in \mathbf{N}),$$

şirul sumelor Riemann este convergent.

Evident $(\beta) \Rightarrow (\beta')$.

Demonstraţia implicaţiei $(\beta') \Rightarrow (\beta)$ revine la a demonstra că toate sumele Riemann

$$\left\{\sigma_{\Delta_n}(f, \xi^n)\right\}_{n\in N}, \text{ cu } \lim_{n\to\infty} \| \Delta_n \| = 0$$

au o limită comună.

Presupunem că (β') are loc; fie

$$\Delta_n' = \left(a = x_0^n, x_1^n, \ldots, x_{k_n}^n = b\right), \quad (n \in \mathbf{N});$$

$$\Delta_n'' = \left(a = y_0^n, y_1^n, \ldots, y_{p_n}^n = b\right), \quad (n \in \mathbf{N})$$

două şiruri de diviziuni ale intervalului $[a, b]$ cu

$$\lim_{n\to\infty} \| \Delta_n' \| = \lim_{n\to\infty} \| \Delta_n'' \| = 0$$

şi fie punctele intermediare

$$x_{i-1}^n \leqslant \xi_i^n \leqslant x_i^n, \quad (1 \leqslant i \leqslant k_n; \ n \in \mathbf{N}),$$

$$y_{i-1}^n \leqslant \eta_i^n \leqslant y_i^n, \quad (1 \leqslant i \leqslant p_n; \ n \in \mathbf{N}).$$

Considerăm şirul de diviziuni $(\Delta_n)_{n\in N}$ definit în felul următor

$$(\Delta_n)_{n\in\mathbf{N}} \overset{\text{def}}{=} (\Delta_0', \Delta_0'', \Delta_1', \Delta_1'', \ldots, \Delta_n', \Delta_n'', \ldots),$$

iar punctele intermediare le luăm astfel

$$\theta_i^n \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \xi_i^n, & \text{dacă } n = \text{impar}, \\ \eta_i^n & \text{dacă } n = \text{par}. \end{cases}$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} \| \Delta_n \| = 0$, rezultă din ipoteza (β') că şirurile de sume Riemann

$$\left\{\sigma_{\Delta_n'}(f, \xi^n)\right\}, \ \left\{\sigma_{\Delta_n''}(f, \eta^n)\right\}, \ \left\{\sigma_{\Delta_n}(f, \theta^n)\right\}$$

sunt convergente; fie I', I'', respectiv I, limitele lor. Însă primele două şiruri sunt subşiruri ale celui de-al treilea şir, deci (Observaţia A 15) au aceeaşi limită. Aşadar,

$$I' = I = I''.$$

2.11. *Observaţie.* **În cursul demonstraţiei teoremei 2.9 şi a observaţiei precedente s-a arătat că dacă este îndeplinită una din cele trei condiţii echivalente (α), (β), (β'), atunci integrala lui f este obţinută astfel:**

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}(f, \xi^n),}$$

iar limita nu depinde de şirul de diviziuni $\Delta_n = (x_0^n, x_1^n, \ldots, x_{k_n}^n)$ ale intervalului $[a, b]$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} \| \Delta_n \| = 0$ şi nici de punctele intermediare $\xi_i^n \in [x_{i-1}^n, x_i^n]$, $(1 \leqslant i \leqslant k_n; \ n \in \mathbf{N})$.

2.12. Teoremă. *(Formula lui Leibniz — Newton).* **Fie $f:[a, b] \to \mathbf{R}$ o funcţie integrabilă care admite primitive pe $[a, b]$. Atunci pentru orice primitivă F a lui f are loc egalitatea**

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).}$$

Demonstraţie. Fie

$$\Delta_n = (x_0^n, x_1^n, \ldots, x_{k_n}^n)$$

un şir de diviziuni ale intervalului $[a, b]$ astfel încât

$$\lim_{n\to\infty} \| \Delta_n \| = 0.$$

Aplicând teorema creşterilor finite funcţiei F pe intervalul $[x_{i-1}^n, x_i^n]$, obţinem $\xi_i^n \in (x_{i-1}^n, x_i^n)$ cu proprietatea

$$F(x_i^n) - F(x_{i-1}^n) = F'(\xi_i^n)\,(x_i^n - x_{i-1}^n).$$

Însă, prin ipoteză $F'(x) = f(x)$, $(\forall)\ x \in [a, b]$, deci

$$F(x_i^n) - F(x_{i-1}^n) = f(\xi_i^n)\,(x_i^n - x_{i-1}^n).$$

prin urmare

$$\sigma_{\Delta_n}(f, \xi^n) = \sum_{i=1}^{k_n} f(\xi_i^n)\,(x_i^n - x_{i-1}^n) = \sum_{i=1}^{k_n} [F(x_i^n) - F(x_{i-1}^n)] =$$

$$= F(b) - F(a), \quad (\forall)\ n \in \mathbf{N}.$$

Atunci (observaţia 2.11)

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}(f, \xi^n) = F(b) - F(a).$$

2.13. *Notaţie.* În loc de $F(b) - F(a)$ se foloseşte frecvent notaţia

$$F(x)\Big|_a^b$$

sau

$$[F(x)]_a^b$$

şi se citeşte: *$F(x)$ luat între a şi b.*

2.14. *Exemplu de funcţie integrabilă care nu admite primitive.* Fie $f:[a, b] \to \mathbf{R}$ funcţia constantă egală cu 1,

$$f(x) = 1, \ (\forall) x \in [a, b]$$

şi $g:[a, b] \to \mathbf{R}$ definită prin

$$g(x) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } x \neq \dfrac{a+b}{2}; \\ -1, \text{ dacă } x = \dfrac{a+b}{2}. \end{cases}$$

Atunci (exemplul 2.5 (1)) funcţia f este integrabilă, iar funcţia g se obţine din f, modificînd pe f în punctul $\frac{a+b}{2}$. Prin urmare, în baza observaţiei 2.7 şi funcţia g *este integrabilă*.

Dacă g ar admite primitive, atunci g ar avea şi proprietatea lui Darboux (observaţia I. 1.4 (c)). Cum g nu se anulează nicăieri, rezultă că g *nu* are proprietatea lui Darboux.

2.15. *Observaţie.* Din exemplul de mai sus rezultă că *clasa funcţiilor integrabile, care admit primitive, nu coincide cu clasa tuturor funcţiilor integrabile.*

Funcţia $f:[-1, 1] \to \mathbf{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}, & \text{dacă } x \in [-1, 0) \cup (0, 1], \\ 0 & , \text{ dacă } x = 0 \end{cases}$$

fiind nemărginită, nu este integrabilă (observaţia 2.4(β)).

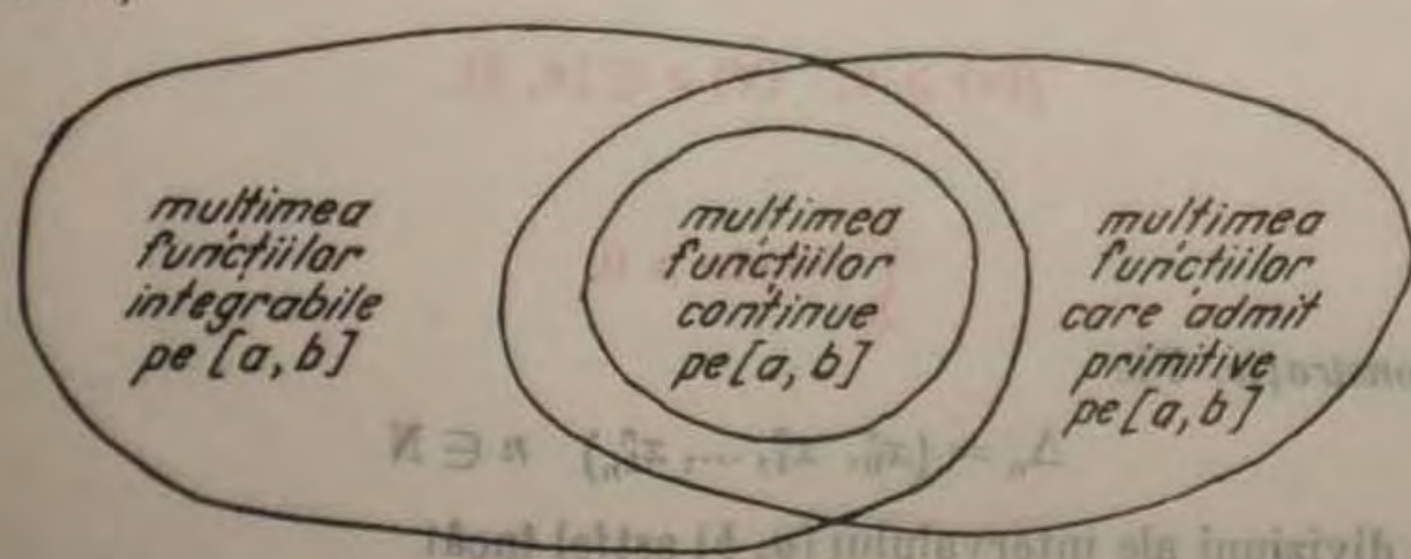
Se observă că funcţia

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x^2}, & \text{dacă } x \in [-1, 0) \cup (0, 1], \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

este derivabilă şi $F' = f$, adică f admite primitive.

Există funcţii mărginite care au primitive, dar care nu sunt integrabile. Prezentarea unui astfel de exemplu necesită noţiuni şi rezultate care depăşesc cadrul acestui manual.

Vom vedea în paragrafele următoare că mulţimea funcţiilor continue pe un interval $[a, b]$ este conţinută atât în mulţimea funcţiilor integrabile pe $[a, b]$ (teorema 3.12) cît şi în mulţimea funcţiilor care admit primitive pe $[a, b]$ (teorema 4.8).



2.16. Propoziţie. Dacă $f, g:[a, b] \to \mathbf{R}$ sunt două funcţii integrabile, iar $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, atunci

$$\lambda f + \mu g$$

este integrabilă şi

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx.$$

Demonstrație. Fie

$$\Delta_n = (x_0^n,\ x_1^n,\ \dots,\ x_{k_n}^n), \quad (n \in \mathbf{N})$$

un șir de diviziuni ale lui $[a, b]$ cu

$$\lim_{n\to\infty} \| \Delta_n \| = 0$$

și fie punctele intermediare

$$x_{i-1}^n \leqslant \xi_i^n \leqslant x_i^n, \quad (1 \leqslant i \leqslant k_n;\ n \in \mathbf{N}).$$

Avem

$$(1) \quad \sigma_{\Delta_n}(\lambda f + \mu g, \xi^n) = \sum_{i=1}^{n} [\lambda f(\xi_i^n) + \mu g(\xi_i^n)](x_i^n - x_{i-1}^n) =$$

$$= \lambda \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i^n)(x_i^n - x_{i-1}^n) + \mu \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i^n)(x_i^n - x_{i-1}^n) = \lambda\sigma_{\Delta_n}(f, \xi^n) + \mu\sigma_{\Delta_n}(g, \xi^n).$$

Funcțiile f și g fiind integrabile, rezultă (observația 2.11) că membrul drept al egalității (1) converge la

$$\lambda \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

Prin urmare șirul $\{\sigma_{\Delta_n}(\lambda f + \mu g,\ \xi^n)\}_{n\in N}$ este convergent, și $\lambda f + \mu g$ este integrabilă. Trecînd la limită în (1), obținem

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

2.17. Propoziție. Dacă $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ este o funcție integrabilă pozitivă

$$f(x) \geqslant 0, \quad (\forall)\, x \in [a, b],$$

atunci

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0.$$

Demonstrație. Fie

$$\Delta_n = (x_0^n,\ x_1^n,\ \dots,\ x_{k_n}^n) \quad n \in \mathbf{N}$$

un șir de diviziuni ale intervalului $[a, b]$ astfel încât

$$\lim_{n\to\infty} \| \Delta_n \| = 0$$

și fie punctele intermediare

$$x_{i-1}^n \leqslant \xi_i^n \leqslant x_i^n, \quad (1 \leqslant i \leqslant k_n;\ n \in \mathbf{N}).$$

Atunci, f fiind pozitivă, avem

$$\sigma_{\Delta_n}(f, \xi^n) = \sum_{i=1}^{k_n} f(\xi_i^n)(x_i^n - x_{i-1}^n) \geqslant 0,$$

deci

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}(f, \xi^n) \geqslant 0.$$

2.18. Consecință. **Dacă $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ sunt funcții integrabile astfel încât**

$$f(x) \leqslant g(x), \quad (\forall)\, x \in [a, b],$$

atunci

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

Demonstrație. Din ipoteză rezultă că funcția $g - f$ este pozitivă. Deci aplicând propozițiile 2.16 și 2.17, obținem

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b (g(x) - f(x))\mathrm{d}x \geqslant 0,$$

adică

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

2.19. Consecință. **Dacă $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ este integrabilă și**

$$m \leqslant f(x) \leqslant M, \quad (\forall)\, x \in [a, b],$$

atunci

$$m(b - a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b - a).$$

Demonstrație. Aplicând consecința 2.18 funcției f și funcțiilor constante m, M și ținând seama de exemplul 2.5 (1), obținem

$$m(b - a) = \int_a^b m\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b M\mathrm{d}x = M(b - a).$$

2.20. *Observație.* Orice funcție integrabilă fiind mărginită (observația 2.4 (β)), există $m, M \in \mathbf{R}$ astfel încât

$$m \leqslant f(x) \leqslant M, \quad (\forall) x \in [a, b].$$

2.21. Propoziție. **Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ și $c \in (a, b)$ astfel încât restricțiile lui f la $[a, c]$ și la $[c, b]$ sunt integrabile. Atunci f este integrabilă și**

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Demonstrație. Notăm cu f_1 restricția lui f la $[a, c]$ și cu f_2 restricția lui f la $[c, b]$. Prin ipoteză funcțiile f_1 și f_2 sunt integrabile deci (observația 2.4 (β)), mărginite. Rezultă că f este mărginită, deci există $M > 0$ astfel încât

$$|f(x)| < M, \quad (\forall) x \in [a, b].$$

Utilizând din nou integrabilitatea lui f_1 și f_2 deducem că pentru $\varepsilon > 0$ există $\eta_\varepsilon > 0$ astfel încât

$$\left| \int_a^c f(x)\mathrm{d}x - \sigma_{\Delta'}(f_1, \xi') \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{1'}$$

$$\left| \int_c^b f(x)\mathrm{d}x - \sigma_{\Delta''}(f_2, \xi'') \right| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{1''}$$

pentru orice diviziuni Δ' și Δ'' ale intervalelor $[a, c]$ și respectiv $[c, b]$ cu $\| \Delta' \| < \eta_\varepsilon$, $\| \Delta'' \| < \eta_\varepsilon$ și orice sisteme ξ' și ξ'' de puncte intermediare asociate diviziunilor Δ' și respectiv Δ''. În plus, putem presupune că, micșorînd eventual pe η_ε, avem

$$2M\,\eta_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Fie acum

$$\Delta = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$$

o diviziune a intervalului $[a, b]$ cu $\| \Delta \| < \eta_\varepsilon$ și punctele intermediare

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i], \qquad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

Vom arăta că

$$| \sigma_\Delta(f, \xi) - I | < \varepsilon,$$

unde

$$I = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Într-adevăr, dacă c este un punct al diviziunii Δ, atunci

$$\Delta' = (x_0, x_1, \ldots, x_{p-1}, c)$$

este o diviziune a lui $[a, c]$, iar

$$\Delta'' = (c, x_{p+1}, \ldots, x_n)$$

este o diviziune a lui $[c, b]$ și avem

$$\| \Delta' \| < \eta_\varepsilon, \quad \| \Delta'' \| < \eta_\varepsilon.$$

Punând

$$\xi' = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{p-1}),$$

$$\xi'' = (\xi_p, \xi_{p+1}, \ldots, \xi_n)$$

avem

$$\sigma_\Delta(f, \xi) = \sigma_{\Delta'}(f_1, \xi') + \sigma_{\Delta''}(f_2, \xi'')$$

și deci din (1') — (1'') rezultă

$$| \sigma_\Delta(f, \xi) - I | \leqslant \left| \sigma_{\Delta'}(f_1, \xi)' - \int_a^c f(x)\mathrm{d}x \right| + \left| \sigma_{\Delta''}(f_2, \xi'') - \int_c^b f(x)\mathrm{d}x \right| < \varepsilon.$$

Dacă c nu este punct al diviziunii Δ, atunci există $p \in \{1, 2, \ldots, n\}$ astfel încât

$$x_{p-1} < c < x_p.$$

Deducem că

$$\Delta' = (x_0, \ldots, x_{p-1}, c)$$

este o diviziune a lui $[a, c]$, iar

$$\Delta'' = (c, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_n)$$

este o diviziune a lui $[c, b]$. Punând

$$\xi' = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{p-1}, c),$$
$$\xi'' = (c, \xi_{p+1}, \ldots, \xi_n),$$

obținem

$$\sigma_\Delta(f, \xi) = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq p}}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) + f(\xi_p)(x_p - x_{p-1}),$$

$$\sigma_{\Delta'}(f_1, \xi') = \sum_{i=1}^{p-1} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) + f(c)(c - x_{p-1}),$$

$$\sigma_{\Delta''}(f_2, \xi'') = \sum_{i=p+1}^{n} f(\xi)(x_i - x_{i-1}) + f(c)(x_p - c)$$

și deci

$$\sigma_\Delta(f, \xi) = \sigma_{\Delta'}(f_1, \xi') + \sigma_{\Delta''}(f_2, \xi'') + f(\xi_p)(x_p - x_{p-1}) - f(c)(x_p - x_{p-1}).$$

De aici și din relațiile (1′) – (1″) deducem

$$|\sigma_\Delta(f, \xi) - I| \leqslant \left|\sigma_{\Delta'}(f_1, \xi') - \int_a^c f(x)\mathrm{d}x\right| + \left|\sigma_{\Delta''}(f_2, \xi'') - \int_c^b f(x)\mathrm{d}x\right| +$$
$$+ |f(\xi_p) - f(c)|(x_p - x_{p-1})$$

și deci

$$|\sigma_\Delta(f, \xi) - I| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + 2M \cdot \eta_\varepsilon < \varepsilon.$$

2.22. Definiție. Dacă $a \leqslant b$ și $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ este integrabilă, atunci punem prin definiție

$$(\alpha) \qquad \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0, \text{ dacă } a = b$$

și

$$(\beta) \qquad \int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

2.23. *Exerciții.*

I. Să se calculeze sumele Riemann asociate funcțiilor, diviziunilor Δ și sistemelor ξ de puncte intermediare specificate mai jos:

1. $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$, $\quad \Delta = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right)$,

   $f(x) = x^2$, $\quad \xi = \left(\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}\right)$;

2. $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbf{R}$, $\quad \Delta = \left(0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$,

   $f(x) = \sin x$, $\quad \xi = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$;

3. $f:[-1, 1] \to \mathbf{R}$,

$f(x) = e^x$,

$$\Delta = \left(-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1,\right),$$

$$\xi = (-\ln 2, 0, \ln 2);$$

4. $f:[0, 3] \to \mathbf{R}$,

$f(x) = x^3$,

$$\Delta = (0, 1, 2, 3),$$

$$\xi = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right);$$

5. $f:[1, 2] \to \mathbf{R}$,

$f(x) = \frac{1}{x}$,

$$\Delta = \left(1, \frac{9}{8}, \frac{7}{6}, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, 2\right),$$

$$\xi = \left(\frac{10}{9}, \frac{8}{7}, \frac{6}{5}, \frac{4}{3}, 2\right).$$

II.

1. Se consideră o funcţie $f:[a, b] \to \mathbf{R}$ integrabilă, astfel încât există o constantă α cu proprietatea: pentru orice interval deschis $(x', x'') \subset [a, b]$, există cel puţin un punct $\xi \in (x', x'')$ în care funcţia f ia valoarea α. Să se arate că

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \alpha(b - a).$$

2. Să se arate că funcţia $f:[0, 1] \to \mathbf{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } 0 \leqslant x < \frac{1}{2}, \\ 1, \text{ dacă } \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

este integrabilă, dar nu posedă nici o primitivă. Să se calculeze integrala lui f.

3. Se consideră o funcţie $f:[a, b] \to \mathbf{R}$ integrabilă, astfel încât pentru orice interval deschis $(x', x'') \subset [a, b]$, există cel puţin un punct $\xi \in (x', x'')$ astfel încât $f(\xi) = 2\xi$. Să se arate că

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = b^2 - a^2$$

4. Se consideră o funcţie $f:[0, 1] \to \mathbf{R}$ integrabilă, astfel încât pentru orice interval deschis $(x', x'') \subset [a, b]$, există cel puţin un punct $\xi \in (x', x'')$ astfel încât $f(\xi) = \frac{1}{1 + \xi}$. Să se arate că

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \ln 2.$$

5. Se consideră o funcţie $f:[a, b] \to \mathbf{R}$ astfel, încât în orice interval deschis $(x', x'') \subset [a, b]$, există două puncte $\xi' \in (x', x'')$, $\xi'' \in (x', x'')$ astfel încât

$$f(\xi') = \xi', f(\xi'') = 2\xi''.$$

Să se arate că f nu este integrabilă.

6. Se consideră o funcţie $f:[a, b] \to \mathbf{R}$ pentru care există o diviziune

$$\Delta = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$$

a lui $[a, b]$ astfel încât f este egală cu o constantă α_i pe fiecare interval deschis

(x_{i-1}, x_i). Să se arate că f este integrabilă şi

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\,(x_i - x_{i-1}).$$

7. Să se arate că funcţia

$$f:\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbf{R}$$

definită prin

$$f(x) = |\sin x|$$

este integrabilă şi să se calculeze integrala sa.

8. Se consideră o funcţie

$$f:[0, 2] \to \mathbf{R}$$

astfel încât

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ dacă } x \in [0, 1], \\ x^2 + 1, \text{ dacă } x \in (1, 2]. \end{cases}$$

Să se arate că f este integrabilă şi să se calculeze integrala sa.

9. Se consideră funcţia

$$f:[0, 1] \to \mathbf{R}$$

definită prin

$$f(x) = [2^5 x],$$

unde $[y]$ înseamnă partea întreagă din y (adică cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu y). Să se arate că f este integrabilă şi să se calculeze integrala sa.

10. Se consideră funcţia

$$f:[0, 2\sqrt{3}] \to \mathbf{R}$$

definită prin

$$f(x) = x - [x].$$

Să se arate că această funcţie este integrabilă şi să se calculeze integrala sa.

§ 3. INTEGRABILITATEA FUNCŢIILOR MONOTONE ŞI A FUNCŢIILOR CONTINUE

3.1. Definiţie. Fie $f:[a, b] \to \mathbf{R}$ o funcţie mărginită şi $\Delta = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ o diviziune a intervalului $[a, b]$. Notăm

$$m_i \overset{\text{def}}{=} \inf_{x\in[x_{i-1}, x_i]} f(x) \quad (= \textit{marginea inferioară a mulţimii } f[x_{i-1}, x_i]);$$

$$M_i \overset{\text{def}}{=} \sup_{x\in[x_{i-1}, x_i]} f(x) \quad (= \textit{marginea superioară a mulţimii } f[x_{i-1}, x_i]);$$

$$s_\Delta(f) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}).$$

$$S_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}),$$

$s_\Delta(f)$ (respectiv $S_\Delta(f)$) se numește **suma Darboux inferioară** (respectiv **superioară**) asociată funcției f și diviziunii Δ.

3.2. *Observație.* Dacă funcția f este pozitivă, atunci $s_\Delta(f)$ (respectiv $S_\Delta(f)$) reprezintă suma ariilor dreptunghiurilor de bază $[x_i - x_{i-1}]$ și înălțime m_i (respectiv M_i).

Deci aria figurii plane mărginite de axa Ox, graficul lui f și dreptele paralele la axa Oy, care trec prin punctele de coordonate $(a, 0)$, respectiv $(b, 0)$, este aproximată de $s_\Delta(f)$ prin lipsă, iar de $S_\Delta(f)$ prin adaos.

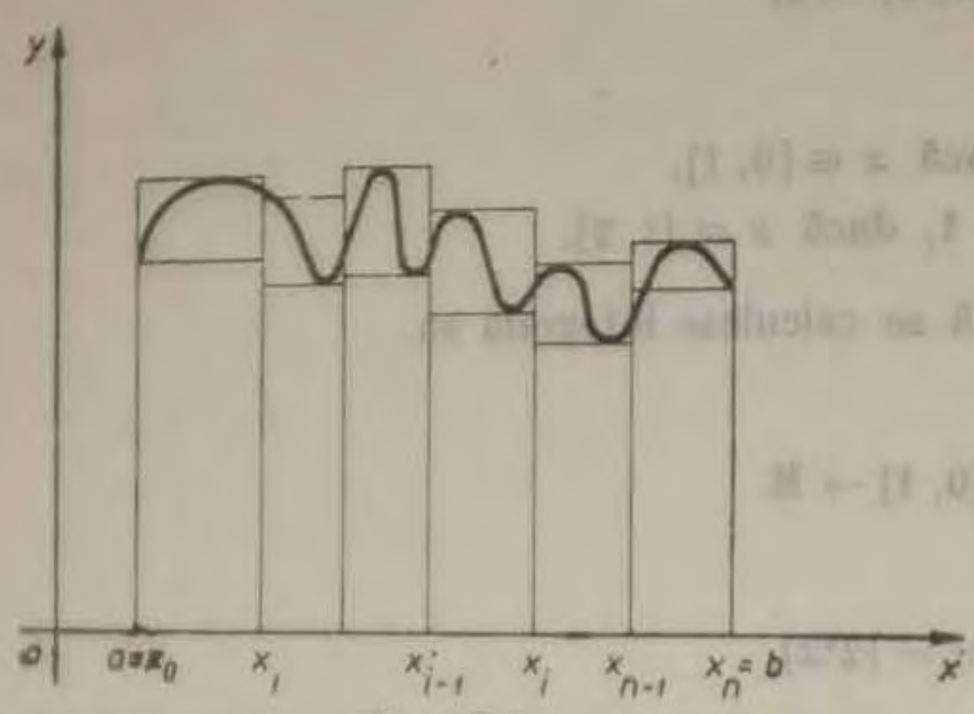


Fig. II.3.

3.3. Propoziție. Sumele Darboux ale unei funcții mărginite $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ au următoarele proprietăți:

(i) $s_\Delta(f) \leqslant \sigma_\Delta(f, \xi_i) \leqslant S_\Delta(f)$, $(\forall)\ \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$;

(ii) dacă Δ' este mai fină decât Δ $(\Delta \subset \Delta')$, atunci

$$s_\Delta(f) \leqslant s_{\Delta'}(f)$$

și

$$S_{\Delta'}(f) \leqslant S_\Delta(f);$$

(iii) pentru orice pereche de diviziuni Δ_1, Δ_2 ale intervalului $[a, b]$ are loc inegalitatea

$$s_{\Delta_1}(f) \leqslant S_{\Delta_2}(f).$$

Demonstrație. (i) Înmulțind în inegalitățile evidente

$$m_i \leqslant f(\xi_i) \leqslant M_i, \quad (\forall)\ \xi_i \in [x_{i-1}, x_i],$$

cu $x_i - x_{i-1}$ și însumând după i, obținem:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \leqslant \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1}),$$

adică

$$s_\Delta(f) \leqslant \sigma_\Delta(f, \xi_i) \leqslant S_\Delta(f).$$

(ii) Fie $\Delta \subset \Delta'$ și să considerăm cazul cel mai simplu: diviziunea Δ' este obținută din diviziunea

$$\Delta = (x_0, x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j, \ldots, x_n)$$

prin adăugarea unui singur punct de diviziune c_j între x_{j-1} și x_j

Notând

$$\Delta' = (x_0, x_1, \ldots, x_{j-1}, c_j, x_j, \ldots, x_n).$$

$$m_j' \overset{\text{def}}{=} \inf_{x\in[x_{j-1},\, c_j]} f(x) \quad \text{și} \quad m_j'' \overset{\text{def}}{=} \inf_{x\in[c_j,\, x_j]} f(x),$$

rezultă

$$m_j \leqslant m_j' \text{ și } m_j \leqslant m_j'',$$

deci

$$s_\Delta(f) = m_j(x_j - x_{j-1}) + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = m_j[(x_j - c_j) + (c_j - x_{j-1})] +$$

$$+ \sum_{i\neq j} m_i(x_i - x_{i-1}) \leqslant m_j''(x_j - c_j) + m_j'(c_j - x_{j-1}) + \sum_{i\neq j} m_i(x_i - x_{i-1}) = s_{\Delta'}(f).$$

Cazul general se reduce la aplicarea succesivă a cazului particular studiat mai sus.

În mod analog se demonstrează inegalitatea

$$S_{\Delta'}(f) \leqslant S_\Delta(f).$$

(iii) Fie Δ_1, Δ_2 două diviziuni ale intervalului $[a, b]$ și fie $\Delta \overset{\text{def}}{=} \Delta_1 \cup \Delta_2$, reuniunea lor. Atunci (observația 1.10 (α))

$$\Delta_k \subset \Delta, \ (\forall)\ k = 1, 2,$$

deci, aplicând punctul (ii), obținem

(1) $$s_{\Delta_k}(f) \leqslant s_\Delta(f) \text{ și } S_\Delta(f) \leqslant S_{\Delta_k}(f), \ (\forall)\ k = 1,2.$$

Însă (punctul (i))

$$s_\Delta(f) \leqslant S_\Delta(f),$$

prin urmare

$$s_{\Delta_1}(f) \leqslant s_\Delta(f) \leqslant S_\Delta(f) \leqslant S_{\Delta_2}(f).$$

3.4. *Observație.* Proprietatea 3.3 (ii) se poate exprima astfel:

Prin trecere de la o diviziune la alta mai fină, sumele Darboux inferioare cresc, iar sumele Darboux superioare descresc.

De asemenea, proprietatea 3.3 (iii) mai poate fi formulată și în modul următor:

Orice sumă Darboux inferioară este mai mică decât orice sumă Darboux superioară.

Aceste rezultate pot fi reformulate astfel:

3.5. Propoziție. Dacă $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ este o funcție mărginită, atunci:

(α) mulțimea $\{s_\Delta(f)\}_\Delta$ a tuturor sumelor Darboux inferioare ale funcției f este majorată (de orice sumă Darboux superioară a lui f);

(β) mulțimea $\{S_\Delta(f)\}_\Delta$ a tuturor sumelor Darboux superioare este minorată (de orice sumă Darboux inferioară).

3.6. *Observații:* (α). Mulțimea $\{s_\Delta(f)\}$ fiind majorată, admite (vezi A_8) o margine superioară), notăm $\underline{I}(f)$ această margine superioară

$$\underline{I}(f) \overset{\text{def}}{=} \sup_\Delta s_\Delta(f).$$

(β) Mulțimea $\{S_\Delta(f)\}$ fiind minorată, are (vezi A_8) o margine inferioară; notăm cu $\overline{I}(f)$ această margine inferioară

$$\bar{I}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{\Delta} S_{\Delta}(f)$$

(γ) Pentru orice diviziune Δ a intervalului $[a, b]$ au loc inegalitățile

$$s_{\Delta}(f) \leqslant \underline{I}(f) \leqslant \bar{I}(f) \leqslant S_{\Delta}(f).$$

3.7. Teoremă. Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție mărginită. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\eta_\varepsilon > 0$ astfel încât

$$S_{\Delta}(f) - s_{\Delta}(f) < \varepsilon,$$

oricare ar fi diviziunea Δ a intervalului $[a, b]$ cu $\|\Delta\| < \eta_\varepsilon$;

(ii) funcția f este integrabilă.

Demonstrație. (i) $\Rightarrow$ (ii) Avem inegalitățile

$$s_{\Delta}(f) \leqslant \underline{I}(f) \leqslant \bar{I}(f) \leqslant S_{\Delta}(f), \quad (\forall)\Delta, \tag{1}$$

deci

$$0 \leqslant \bar{I}(f) - \underline{I}(f) \leqslant S_{\Delta}(f) - s_{\Delta}(f), \quad (\forall)\ \Delta.$$

Însă prin ipoteză, pentru orice $\varepsilon > 0$ există η_ε astfel încât

$$S_{\Delta}(f) - s_{\Delta}(f) < \varepsilon, \quad (\forall)\ \Delta \text{ cu } \|\Delta\| < \eta_\varepsilon, \tag{2}$$

deci

$$0 \leqslant \bar{I}(f) - \underline{I}(f) \leqslant S_{\Delta}(f) - s_{\Delta}(f) < \varepsilon, \quad (\forall)\Delta \text{ cu } \|\Delta\| < \eta_\varepsilon$$

Cum $\varepsilon > 0$ a fost arbitrar, rezultă că numerele reale $\underline{I}(f)$ și $\bar{I}(f)$ sunt egale; fie $I(f)$ valoarea lor comună. Atunci din (1) obținem

$$s_{\Delta}(f) \leqslant I(f) \leqslant S_{\Delta}(f), \qquad (\forall)\Delta. \tag{3}$$

Însă (propoziția 3.3 (i)) pentru orice diviziune $\Delta = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ a lui $[a, b]$ și orice puncte intermediare $x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$, $(1 \leqslant i \leqslant n)$, au loc inegalitățile.

$$s_{\Delta}(f) \leqslant \sigma_{\Delta}(f, \xi_i) \leqslant S_{\Delta}(f). \tag{4}$$

Din inegalitățile (2) – (4) obținem

$$|\sigma_{\Delta}(f, \xi_i) - I(f)| \leqslant S_{\Delta}(f) - s_{\Delta}(f) < \varepsilon,$$

oricare ar fi diviziunea Δ a lui $[a, b]$ și oricare ar fi punctele intermediare ξ_i. Aceasta înseamnă că f este integrabilă și că

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = I(f) = \underline{I}(f) = \bar{I}(f).$$

3.8. *Observație.* Demonstrația implicației inverse este relativ simplă și se bazează pe următoarele relații dintre sumele Riemann și sumele Darboux:

$$s_{\Delta}(f) = \inf \{\sigma_{\Delta}(f, \xi) \mid \xi_i \in [x_{i-1}, x_i],\ 1 \leqslant i \leqslant n\},$$
$$S_{\Delta}(f) = \sup \{\sigma_{\Delta}(f, \xi) \mid \xi_i \in [x_{i-1}, x_i],\ 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

3.9. Teoremă. Orice funcție monotonă $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ este integrabilă.

Demonstrație. Dacă f este constantă, atunci (exemplul 2.5 (1)) f este integrabilă. Considerăm acum cazul când f nu este constantă; în acest caz

$$|f(a) - f(b)| > 0.$$

Presupunem că f este crescătoare și pentru orice $\varepsilon > 0$ să notăm

(1) $$\eta_\varepsilon \overset{\text{def}}{=} \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$$

Fie

$$\Delta = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$$

o diviziune a lui $[a, b]$ astfel incât

(2) $$\|\Delta\| < \eta_\varepsilon.$$

Funcția f fiind crescătoare, avem

(3) $$\begin{cases} f(x_{i-1}) = m_i = \inf\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \\ f(x_i) = M_i = \sup\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x). \end{cases}$$

Din (3), (2) și (1) obținem

$$S_\Delta(f) - s_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})](x_i - x_{i-1})$$

$$\leqslant \|\Delta\| \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})] = \|\Delta\| (f(b) - f(a)) <$$

$$< \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} (f(b) - f(a)) = \varepsilon,$$

deci f este integrabilă.

Observație: În demonstrarea unor rezultate importante ca:

— integrabilitatea funcțiilor continue,

— calculul ariilor (respectiv volumelor) unor mulțimi asociate funcțiilor continue pozitive,

se folosește o condiție mai puternică decât condiția de continuitate. Această condiție este îndeplinită de funcțiile continue pe *intervale închise și mărginite*. Vom admite, deci, fără demonstrație următorul rezultat:

3.10. Orice funcție continuă definită pe un interval închis și mărginit, $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, verifică condiția:

(U) **oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $\eta_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice $x', x'' \in [a, b]$ cu $|x' - x''| < \eta_\varepsilon$ are loc inegalitatea**

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Funcțiile care îndeplinesc condiția (U) se numesc uniform continue.

3.11. *Exemplu* de funcţie continuă, definită pe un interval mărginit neînchis, care *nu* verifică condiţia (U).

Fie $f : (0, 1] \to \mathbf{R}$ definită prin

$$f(x) \overset{\text{def.}}{=} \cos \frac{1}{x}.$$

Funcţia f este continuă pe $(0, 1]$, deoarece este compunerea funcţiilor continue

$$x \to \frac{1}{x} \text{ şi } t \to \cos t.$$

Să arătăm acum că funcţia f nu verifică condiţia (U).

Fie $0 < \varepsilon < 1$. Deoarece şirul $\left(\frac{1}{2n(2n+1)\pi}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ converge la zero, rezultă că există $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ astfel încât

$$\frac{1}{2n(2n+1)\pi} < \varepsilon, \quad (\forall)\ n \geqslant n_\varepsilon.$$

Luând un $n \geqslant n_\varepsilon$ şi

$$x = \frac{1}{2n\pi}, \quad y = \frac{1}{(2n+1)\pi},$$

rezultă

$$|x - y| = \left|\frac{1}{2n\pi} - \frac{1}{(2n+1)\pi}\right| = \frac{1}{2n(2n+1)\pi} < \varepsilon.$$

Însă

$$|f(x) - f(y)| = |\cos 2n\pi - \cos (2n+1)\pi| = |1 - (-1)| = 2,$$

ceea ce arată că funcţia f *nu* verifică condiţia (U).

3.12. Teoremă. Orice funcţie continuă $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ este integrabilă.

Demonstraţie. În baza teoremei precedente f este uniform continuă, deci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\eta_\varepsilon > 0$ astfel încât

(1)
$$(\forall)\ x', x'' \in [a, b],$$

cu

$$|x' - x''| < \eta_\varepsilon \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Fie $\Delta = (a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b)$ o diviziune a lui $[a, b]$ astfel încât

(2)
$$\|\Delta\| < \eta_\varepsilon.$$

Cum orice funcţie continuă pe un interval închis şi mărginit este mărginită şi îşi atinge marginile, rezultă că există

3)
$$u_i, v_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

astfel încât

$$(4)\qquad \begin{cases} f(u_i) = m_i = \inf\limits_{x\in[x_{i-1},\, x_i]} f(x), \\ f(v_i) = M_i = \sup\limits_{x\in[x_{i-1},\, x_i]} f(x). \end{cases}$$

Din (2) și (3) rezultă

$$|\, u_i - v_i \,| < \eta_\varepsilon,$$

deci aplicând (1) pentru $x' = u_i$ și $x'' = v_i$ și ținând seamă de (4), obținem

$$M_i - m_i = |\, f(v_i) - f(u_i) \,| < \frac{\varepsilon}{b-a}, \qquad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

de unde rezultă

$$S_\Delta(f) - s_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

Această inegalitate având loc pentru orice diviziune Δ a lui $[a, b]$ de normă $\|\Delta\| < \eta_\varepsilon$, înseamnă (teorema 3.7) că funcția f este integrabilă.

3.13. *Exerciții.*

I. Să se calculeze sumele Darboux asociate următoarelor funcții și diviziuni:

1. $f:[0, 1] \to \mathbf{R}$, $\qquad \Delta_1 = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right)$,

$f(x) = x^2$, $\qquad \Delta_2 = \left(0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\right)$.

2. $f:\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to R$, $\qquad \Delta_1 = \left(0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$,

$f(x) = \sin x$, $\qquad \Delta_2 = \left(0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$.

3. $f:[1, 2] \to \mathbf{R}$, $\qquad \Delta_1 = \left(1, \frac{9}{8}, \frac{7}{6}, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, 2\right)$,

$f(x) = \dfrac{x}{1+x}$, $\qquad \Delta_2 = \left(1, \frac{7}{6}, \frac{3}{2}, 2\right)$.

4. $f:[0, 3] \to \mathbf{R}$, $\qquad \Delta_1 = (0, 1, 2, 3)$,

$f(x) = \dfrac{x^2}{4-x}$, $\qquad \Delta_2 = (0, 2, 3)$.

5. $f:[-1, 1] \to \mathbf{R}$, $\qquad \Delta_1 = \left(-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\right)$,

$f(x) = e^x$, $\qquad \Delta_2 = (-1, 0, 1)$.

II. Să se arate că următoarele funcții sunt integrabile și să se calculeze integralele lor:

1. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, $\quad x \in [1, 2]$.

2. $f(x) = \sqrt{x}$, $\quad x \in [0, 2]$.

3. $f(x) = x^\alpha$, $\quad x \in [0, a]$, $a > 0$, $\alpha > 0$.

4. $f(x) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } x = 0, \\ \min\left(x, \ln \dfrac{1}{x}\right) \text{ dacă } x \in (0, 2]. \end{cases}$

3.14. *Calculul limitelor unor sume cu ajutorul integralelor.*

1. Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right] = \ln 2.$$

Pentru a vedea ce funcţie trebuie considerată, transformăm suma de mai sus astfel

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \ldots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right].$$

Vom considera deci funcţia $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ definită prin

$$f(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{1+x}$$

şi, pentru fiecare $n \geqslant 1$, formăm diviziunea echidistantă

$$\Delta_n = \left(x_0 = 0 < x_1 = \frac{1}{n} < x_2 = \frac{2}{n} < \ldots < x_n = \frac{n}{n} = 1\right)$$

de normă $\|\Delta_n\| = \dfrac{1}{n}$, iar în fiecare interval $[x_{i-1}, x_i]$ alegem punctul intermediar

$$\xi_i \overset{\text{def}}{=} x_i = \frac{i}{n}.$$

Se observă că termenul general al şirului din enunţ este chiar suma Riemann asociată funcţiei f, diviziunii Δ_n şi punctelor intermediare ξ_i:

$$\sigma_{\Delta_n}(f, \xi_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{i}{n}}\left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+n} =$$

$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

Deci

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right] = \lim_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}(f, \xi_i) = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} =$$

$$= \ln(1+x)\Big|_0^1 = \ln 2.$$

2. Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right] = \frac{\pi}{6}.$$

Scriind suma de mai sus sub forma

$$\frac{1}{n}\left[\frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{1}{n}\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{2}{n}\right)^2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{n}{n}\right)^2}}\right],$$

se observă că această sumă este suma Riemann asociată funcției $f:[0,1]\to\mathbf{R}$, definită prin

$$f(x)\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{\sqrt{4-x^2}},$$

diviziunii Δ_n și punctelor intermediare ξ_i definite ca în exemplul precedent. Deci

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right]=\lim_{n\to\infty}\sigma_{\Delta_n}(f,\ \xi_i)=$$

$$=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=\arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^1=\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}.$$

3.15. *Exerciții.* Folosind metoda de calcul de la punctul precedent, să se calculeze limita șirurilor de termen general:

1. $s_n=\frac{3}{n}\left[1+\sqrt{\frac{n}{n+3}}+\sqrt{\frac{n}{n+6}}+\dots+\sqrt{\frac{n}{n+3(n-1)}}\right].$

2. $s_n=\frac{1}{n}\left[\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\dots+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right].$

3. $s_n=\frac{\pi}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\dots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right].$

4. $s_n=\frac{\pi}{2n}\left[1+\cos\frac{\pi}{2n}+\cos\frac{2\pi}{2n}+\dots+\cos\frac{(n-1)\pi}{2n}\right].$

5. $s_n=n\left[\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\dots+\frac{1}{(2n)^2}\right].$

§ 4. INTEGRAREA FUNCȚIILOR CONTINUE

4.1. *Observație.* În paragraful precedent s-a arătat că orice funcție continuă $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ este integrabilă.

Deci, toate rezultatele, relative la funcțiile integrabile, obținute în paragraful 3, sunt valabile și pentru funcții continue.

Unele rezultate din acest paragraf sunt adevărate numai pentru funcții continue, iar altele se pot demonstra și în cazul general al funcțiilor integrabile. Totuși, pentru simplitate, peste tot în acest paragraf vom lucra cu funcții continue.

4.2. Teorema de medie. Dacă $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ este o funcție continuă, atunci există $\xi\in[a,b]$ astfel încât

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=f(\xi).$$

Demonstrație: Funcția f, fiind continuă pe $[a,b]$, este mărginită și își atinge

marginile. Notând

$$m = \inf_{x \in [a,\, b]} f(x) \quad \text{și} \quad M = \sup_{x \in [a,\, b]} f(x),$$

există $u, v \in [a, b]$ astfel încât

$$f(u) = m \quad \text{și} \quad f(v) = M.$$

Cum pentru orice $x \in [a, b]$ avem $m \leqslant f(x) \leqslant M$, aplicând consecința 2.19 obținem

$$m(b - a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b - a),$$

de unde

$$f(u) = m \leqslant \frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M = f(v).$$

Cum însă f este continuă pe $[a, b]$, f are proprietatea lui Darboux pe $[a, b]$; există deci $\xi \in [a, b]$ astfel încât

$$f(\xi) = \frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

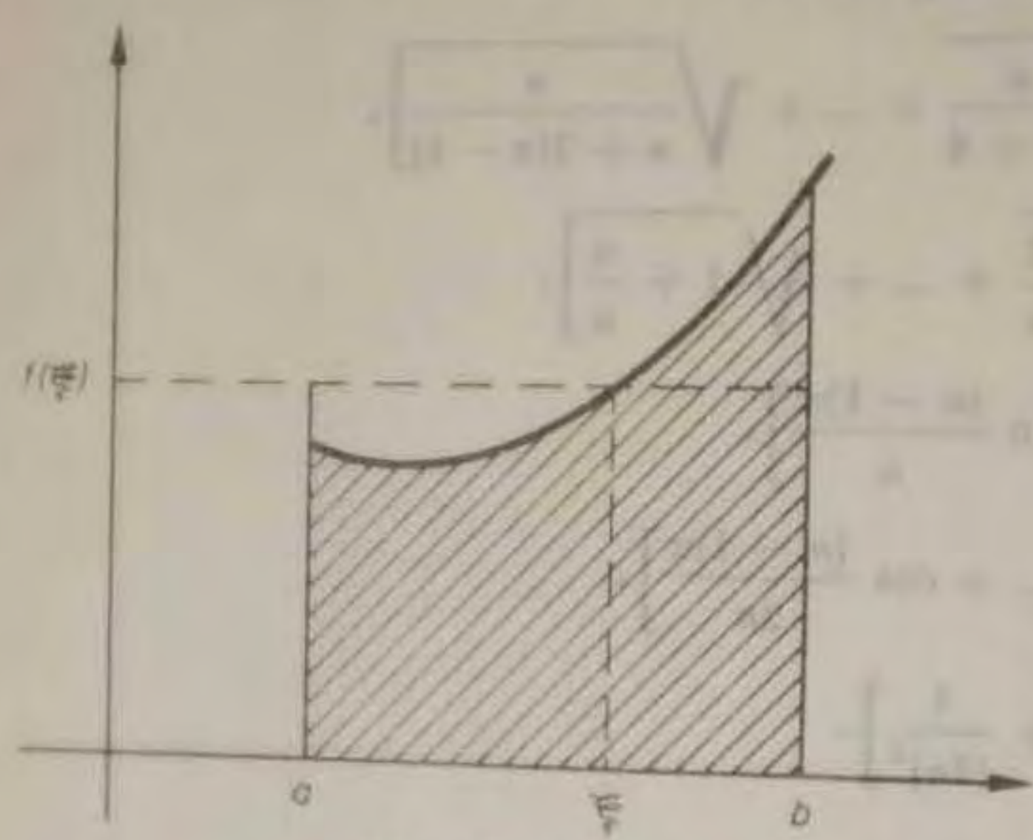


Fig. II. 4.

4.3. *Observație.* Scriind teorema de medie sub forma

$$f(\xi)(b - a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

punem în evidență următoarea interpretare geometrică:

Dacă f este o funcție continuă și pozitivă pe $[a, b]$, există un punct $\xi \in [a, b]$ astfel încât subgraficul lui f (Γ_f; vezi observația 2.2) are aceeași arie cu dreptunghiul de bază $b - a$ și înălțime $f(\xi)$.

4.4. Propoziție. Dacă $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ este o funcție continuă, atunci are loc inegalitatea

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Demonstrație. Întrucât f este continuă rezultă că $|f|$ este continuă. Ținând seama de inegalitățile

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|, \qquad (\forall)\ x \in [a, b]$$

și aplicând consecința 2.18, obținem

$$-\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x,$$

deci

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

4.5. *Observaţie.* Rezultatul precedent este adevărat şi pentru funcţii integrabile oarecare.

4.6 Propoziţie. Dacă $f:[a, b] \to \mathbf{R}$ este o funcţie continuă şi pozitivă iar $[c, d]$ este un interval inclus în $[a, b]$, atunci are loc inegalitatea

$$\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Demonstraţie. Aplicând propoziţiile 2.21 şi 2.17, obţinem

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x + \int_d^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_c^d f(x)\mathrm{d}x.$$

4.7. Consecinţă. Dacă $a < b$ şi $f:[a, b] \to \mathbf{R}$ este o funcţie continuă şi pozitivă, neidentic nulă pe (a, b), atunci

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0.$$

Demonstraţie. Prin ipoteză există un punct $x_0 \in (a, b)$ astfel încât

$$f(x_0) > 0.$$

Funcţia f fiind continuă, rezultă (propoziţia $A_{12}(\beta)$) că există un interval deschis J astfel încît $x_0 \in J \subset [a, b]$ şi

$$f(x) > 0, \qquad (\forall)\ x \in J.$$

Fie $[c, d] \subset J$, $c < d$ şi

$$m \overset{\text{def}}{=} \inf_{x\in[c,\ d]} f(x).$$

Atunci există $x_1 \in [c, d]$ astfel încât

$$m = f(x_1).$$

Însă $x_1 \in [c, d] \subset J$, deci $f(x_1) > 0$, prin urmare

$$m > 0.$$

Aplicând propoziţia precedentă, obţinem

$$0 < m(d - c) \leqslant \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

4.8. Teorema de existenţă a primitivelor unei funcţii continue. Pentru orice funcţie continuă $f:[a, b] - \mathbf{R}$, funcţia $F:[a, b] \to \mathbf{R}$ definită prin

$$F(x) \overset{\text{def}}{=} \int_a^x f(t)dt, \qquad (\forall)\ x \in [a, b]$$

este o primitivă a lui f care se anulează în punctul a.

Demonstrație. Fie $x_0 \in [a, b]$ și $x \in [a, b]$ cu $x \neq x_0$. Atunci (definiția 2.22(β) și propoziția 2.21)

$$F(x) - F(x_0) = \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)dt = \int_{x_0}^x f(t)dt.$$

Aplicând teorema de medie integralei $\int_{x_0}^x f(t)dt$, obținem $\xi_x \in [x_0, x]$ sau $\xi_x \in [x, x_0]$, (după cum $x_0 < x$ sau $x > x_0$) astfel încât

$$\int_{x_0}^x f(t)dt = f(\xi_x)(x - x_0).$$

Din (1) și (2) rezultă

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(\xi_x),$$

deci

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} f(\xi_x) = f(x_0)$$

(deoarece ξ_x este cuprins între x și x_0, iar f este continuă).

Dacă $x_0 = a$ (respectiv $x_0 = b$), atunci

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{F(x) - F(a)}{x - a} = f(a)$$

$$\left(\text{respectiv } \lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} \frac{F(x) - F(b)}{x - b} = f(b)\right).$$

În concluzie F este derivabilă pe $[a, b]$ și $F' = f$, adică F este o primitivă a funcției f. În baza definiției 2.22(α), avem

$$F(a) = \int_a^a f(t)dt = 0.$$

Teorema următoare determină toate primitivele unei funcții continue date, primitive care se anulează în același punct.

4.9. Teoremă. Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție continuă și $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ o primitivă a lui f care se anulează într-un punct $x_0 \in [a, b]$. Atunci g are forma

$$g(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt, \qquad (\forall)\ x \in [a, b].$$

Demonstrație. Am văzut (teorema 4.8) că funcția

(1)
$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

este o primitivă a lui f. Cum diferența a două primitive ale aceleiași funcții este o constantă (propoziția I. 1.3), rezultă că există $k \in \mathbf{R}$ astfel încât

(2)
$$F(x) = g(x) + k, \qquad (\forall)\ x \in [a, b].$$

Însă

$$g(x_0) = 0,$$

deci

$$k = F(x_0). \tag{3}$$

Din relațiile (2), (3), (1) și propoziția 2.21, rezultă că pentru orice $x \in [a, b]$ avem

$$g(x) = F(x) - k = F(x) - F(x_0) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\mathrm{d}t = \int_{x_0}^x f(t)\mathrm{d}t.$$

4.10. Teoremă *(formula de integrare prin părți)*. **Dacă** $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ **sînt două funcții derivabile, cu derivate continue, atunci**

$$\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)\mathrm{d}x.$$

Demonstrație. Formula de derivare a produsului a două funcții derivabile

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x), \qquad (\forall)\, x \in [a, b]$$

arată că funcția produs, $f \cdot g$, este o primitivă a funcției $f' \cdot g + f \cdot g'$. Deci, aplicând formula lui Leibniz-Newton (teorema 2.12) și propoziția 2.16, obținem:

$$(f \cdot g)(b) - (f \cdot g)(a) = \int_a^b (f \cdot g)'(x)\mathrm{d}x = \int_a^b [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]\mathrm{d}x =$$

$$= \int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x + \int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x,$$

adică

$$\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x = (f \cdot g)(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)\mathrm{d}x.$$

4.11. *Exemple.*

1) Să se calculeze integrala

$$\int_0^1 x^2 e^x \mathrm{d}x.$$

Avem

$$\int_0^1 x^2 e^x \mathrm{d}x = x^2 e^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x (x^2)' \mathrm{d}x = \mathrm{e} - \int_0^1 2xe^x \mathrm{d}x = \mathrm{e} - 2xe^x\Big|_0^1 +$$

$$+ \int_0^1 e^x (2x)' \mathrm{d}x = \mathrm{e} - 2\mathrm{e} + 2\int_0^1 e^x \mathrm{d}x = -\mathrm{e} + 2e^x\Big|_0^1 = -\mathrm{e} + 2\mathrm{e} - 2 = \mathrm{e} - 2.$$

2) Să se calculeze integrala

$$\int_0^\pi x^2 \cos x \mathrm{d}x.$$

Avem

$$\int_0^\pi x^2 \cos x\, \mathrm{d}x = x^2 \sin x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin x (x^2)'\, \mathrm{d}x = -2\int_0^\pi x \sin x\, \mathrm{d}x =$$

$$= 2x\cos x\Big|_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi}\cos x\cdot(x)'\mathrm{d}x = -2\pi - 2\int_0^{\pi}\cos x\mathrm{d}x = -2\pi - 2\sin x\Big|_0^{\pi} = -2\pi.$$

3) Să se calculeze integrala

$$\int_4^5\sqrt{x^2-9}\,\mathrm{d}x.$$

Utilizând metoda integrării prin părţi (exemplul 2.2 (7), cap I) deducem că o primitivă a funcţiei

$$x \longrightarrow \sqrt{x^2-9},$$

pe intervalul [4, 5], va fi funcţia

$$g(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-9} - \frac{9}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-9}\right|$$

şi deci

$$\int_4^5\sqrt{x^2-9}\,\mathrm{d}x = g(x)\Big|_4^5.$$

4) Să se calculeze

$$\int_1^2 x^2\ln x\,\mathrm{d}x.$$

Avem

$$\int_1^2 x^2\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\ln x\Big|_1^2 - \frac{1}{3}\int_1^2 x^3(\ln x)'\mathrm{d}x = \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{1}{3}\int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{1}{9}x^3\Big|_1^2 =$$

$$= \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{8}{9} + \frac{1}{9} = \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{7}{9}.$$

5) Să se calculeze

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\,\mathrm{tg}^2 x\,\mathrm{d}x.$$

Avem

$$\mathrm{tg}^2 x = (\mathrm{tg}^2 x + 1) - 1 = (\mathrm{tg}\,x)' - 1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\,\mathrm{tg}^2 x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x(\mathrm{tg}\,x)'\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\mathrm{d}x = x\,\mathrm{tg}\,x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{tg}\,x\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}x^2\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \ln\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{32} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

4.12. Teoremă. *(Formula de schimbare de variabilă)*
Fie $[a, b] \xrightarrow{\varphi} J \xrightarrow{f} \mathbf{R}$ (J interval din $\mathbf{R}$) două funcţii cu proprietăţile:
1) f este continuă pe J,
2) φ este derivabilă, cu derivata continuă pe $[a, b]$. Atunci

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\mathrm{d}x.$$

Demonstrație. Funcția f fiind continuă, admite primitive. Dacă F este o primitivă a lui f pe J, atunci

(1) $$F'(x) = f(x), \qquad (\forall)\ x \in J$$

și (formula lui Leibniz-Newton)

(2) $$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\mathrm{d}x = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)).$$

Folosind formula de derivare a funcțiilor compuse și relația (1) deducem că $F \circ \varphi$ este o primitivă a funcției $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = (f \circ \varphi)(t) \cdot \varphi'(t), \qquad (\forall)\ t \in [a,b].$$

Aplicând formula lui Leibniz-Newton și ținând seama de (2) obținem

$$\int_a^b (f \circ \varphi)(t) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = (F \circ \varphi)(b) - (F \circ \varphi)(a) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\mathrm{d}x.\ .$$

4.13. *Observație. Dacă* $[a,b] \xrightarrow{\varphi} [c,d] \xrightarrow{f} \mathbf{R}$ *sînt două funcții cu proprietățile:*

(α) f este continuă pe $[c, d]$,

(β) φ este bijectivă, φ și φ^{-1} derivabile cu derivate continue,

atunci

$$\int_a^b f(\varphi(t))\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)(\varphi^{-1})'(x)\mathrm{d}x.$$

Într-adevăr, funcțiile φ și f fiind continue, rezultă că $f \circ \varphi$ este continuă, deci admite primitive. Fie $P : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție derivabilă astfel încât

(1) $$P' = f \circ \varphi.$$

Atunci (formula lui Leibniz-Newton)

(2) $$\int_a^b f(\varphi(t))\mathrm{d}t = P(b) - P(a).$$

Pe de altă parte, ținând seamă că (1) avem

$$(P \circ \varphi^{-1})'(x) = P'(\varphi^{-1}(x)) \cdot (\varphi^{-1})'(x) = f(\varphi(\varphi^{-1}(x))) \cdot (\varphi^{-1})'(x) = f(x)(\varphi^{-1})'(x)$$

deci

(3) $$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)(\varphi^{-1})'(x)\mathrm{d}x = (P \circ \varphi^{-1})(\varphi(b)) - (P \circ \varphi^{-1})(\varphi(a)) = P(b) - P(a).$$

Din (2) și (3) se obține egalitatea din enunț, egalitatea care se mai numește și *a doua formulă de schimbare de variabilă.*

4.14. ***Exemple.***

1) Să se calculeze

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin^5 x dx$$

Avem

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin^5 x \, dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin^4 x \sin x \, dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (1 - \cos^2 x)^2 \sin x \, dx.$$

Considerând aplicaţia

$$x \to \varphi(x) = \cos x, \quad x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right],$$

obţinem

$$\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \ \varphi\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin^5 x \, dx = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (1 - \varphi^2(x))^2 \cdot \varphi'(x) dx = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} [1 - 2\varphi^2(x) + \varphi^4(x)] \, \varphi'(x) dx =$$

$$= -\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} (1 - 2u^2 + u^4) \, du = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (1 - 2u^2 + u^4) \, du =$$

$$= \left(u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5\right)\Bigg|_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2\left[\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5\right] = \frac{43}{60}\sqrt{2}.$$

2) Să se calculeze

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} \, dx.$$

Avem, ca în exemplul 3.3 (2), cap. I,

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}\right)}{\operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\operatorname{tg} \frac{t}{2}\right)'}{\operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt =$$

$$= \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} \Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \ln \sqrt{3}.$$

3) Să se calculeze

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x} \, dx.$$

Avem, ca în exemplul 3.3 (1) cap. I,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+\sin^2 x)'}{1+\sin^2 x}\,dx = \ln(1+\sin^2 x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \ln 2.$$

4) Să se calculeze

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}\,dx.$$

Avem

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(x^2)'}{1+(x^2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x^2\Big|_0^1 = \frac{\pi}{8}.$$

5) Fie $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $\alpha < \beta$ și $f : [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}$ definită prin

$$f(x) \overset{\text{def}}{=} \sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}.$$

Se cere să se calculeze

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx.$$

În acest scop definim funcția $\varphi : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to [\alpha, \beta]$ prin

$$\varphi(t) \overset{\text{def}}{=} \alpha + (\beta-\alpha)\sin^2 t.$$

Avem deci situația următoare

$$\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \xrightarrow{\varphi} [\alpha, \beta] \xrightarrow{f} \mathbf{R},$$

unde f este continuă, iar φ este derivabilă cu derivata continuă; deci sunt îndeplinite condițiile teoremei 4.12 (formula de schimbare de variabilă). Aplicând această teoremă, obținem:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_{\varphi(0)}^{\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\varphi(t)-\alpha)(\beta-\varphi(t))}\cdot\varphi'(t)\,dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{[(\beta-\alpha)\sin^2 t]\cdot[(\beta-\alpha)(1-\sin^2 t)]}\;2(\beta-\alpha)\sin t\cos t\,dt =$$

$$= (\beta-\alpha)^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(\sin t\cos t)^2\,dt = \frac{(\beta-\alpha)^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2t)^2\,dt = \frac{(\beta-\alpha)^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 4t)\,dt =$$

$$= \frac{(\beta-\alpha)^2}{4}\left(t - \frac{\sin 4t}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = (\beta-\alpha)^2\frac{\pi}{8}.$$

Așadar,

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}\,dx = (\beta-\alpha)^2\frac{\pi}{8}.$$

Observăm că funcția $x \to \sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}$ este un caz particular al funcției studiate în exemplul 3.5 (4), capitolul I. Însă primitivele găsite acolo nu sunt definite pe întreg intervalul $[\alpha, \beta]$ ci doar pe (α, β).

6) Să se calculeze integrala

$$\int_1^4 \sqrt{1+\sqrt{x}}\,dx$$

Avem

$$f(x) = \sqrt{1+\sqrt{x}} \qquad (\forall)x \in [1,\ 4]$$

și luăm $\varphi : [1,\ 2] \to [1,\ 4]$ definită prin

$$\varphi(t) = t^2.$$

Atunci

$$\varphi'(t) = 2t$$

și

$$f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = \sqrt{1+t} \cdot 2t$$

deci

$$\int_1^4 \sqrt{1+\sqrt{x}}\,dx = \int_{\varphi(1)}^{\varphi(2)} f(x)dx = \int_1^2 f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt = 2\int_1^2 t\sqrt{1+t}\,dt.$$

Facem o nouă schimbare de variabilă.

În acest caz notăm

$$g(t) = t\sqrt{1+t} \qquad (\forall)\ t \in [1,\ 2]$$

și definim u: $[2,3] \to [1,2]$ prin

$$u(s) = s - 1.$$

Atunci

$$u'(s) = 1$$

și

$$g(u)(s))u'(s) = (s-1)\sqrt{s} = s^{3/2} - s^{1/2}$$

deci

$$2\int_1^2 t\sqrt{1+t}\,dt = 2\int_{n(2)}^{n(3)} g(t)dt = 2\int_2^3 g(u(t))u'(t)dt = 2\int_2^3 (s^{3/2} - s^{1/2})\,ds =$$

$$= 2\left[\frac{2}{5}\cdot s^{5/2} - \frac{2}{3}\cdot s^{3/2}\right]\Bigg|_2^3 = \frac{8}{15}(6\sqrt{3} - \sqrt{2}).$$

7) Să se calculeze integrala

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\,dx\ .$$

Avem

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} = \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x + 1}$$

și luăm $\varphi : [0,\ 1] \to \left[0,\ \frac{\pi}{4}\right]$ definită prin

$$\varphi(t) = \operatorname{Arc\,tg} t.$$

Atunci

$$\varphi'(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

și

$$f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) = \frac{t}{1+t}\cdot\frac{1}{1+t^2} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{t+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{t+1}{t^2+1}.$$

Ultima egalitate se obține calculând coeficienții A, B, C din identitatea

$$\frac{t}{(t+1)(t^2+1)} = \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+1}{t^2+1}.$$

Aceste calcule dau $A = -\frac{1}{2}$ și $B = C = \frac{1}{2}$.

Așadar

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{t+1}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^1\left(-\frac{1}{2}\,\frac{1}{t+1} + \frac{1}{4}\cdot\frac{2t}{t^2+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t =$$

$$= \left[-\frac{1}{2}\ln(t+1) + \frac{1}{4}\ln(t^2+1) + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} t\right]\Big|_0^1 =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{4}\ln 2 + \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{4} = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} - \ln 2\right).$$

4.15. *Observație.* Fie $a > 0$ și $f : [-a, a] \to \mathbf{R}$ o funcție continuă. Atunci

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a [f(x) + f(-x)]\mathrm{d}x.$$

Într-adevăr, aplicând propoziția 2.21, avem

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\mathrm{d}x. \tag{1}$$

În baza definiției 2.22 (β), are loc relația

$$\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x = -\int_0^{-a} f(x)\mathrm{d}x. \tag{2}$$

Luând funcția $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin

$$\varphi(t) = -t$$

și aplicând formula de schimbare de variabilă (teorema 4.12), obținem

$$\int_0^{-a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\varphi(0)}^{\varphi(a)} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\mathrm{d}t = -\int_0^a f(-t)\mathrm{d}t. \tag{3}$$

Din relațiile (1), (2) și (3), rezultă

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a [f(x) + f(-x)]\mathrm{d}x.$$

4.16. Definiție. Fie J un interval simetric (adică J este de forma $(-a, a)$ sau $[-a, a]$) și $f : J \to \mathbf{R}$. Spunem că f este o **funcție pară** (respectiv **impară**) dacă

$$f(-x) = f(x) \text{ (respectiv } f(-x) = -f(x)), \quad (\forall)\ x \in J.$$

4.17. *Observaţie.* Fie $f: [-a, a] \to \mathbf{R}$ o funcţie continuă. Atunci

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x, & \text{dacă } f \text{ este pară,} \\ 0, & \text{dacă } f \text{ este impară.} \end{cases}$$

Într-adevăr, dacă f este pară, atunci

$$f(-x) = f(x), \quad (\forall)\ x \in [-a, a],$$

deci (observaţia 4.15)

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a [f(x) + f(-x)]\mathrm{d}x = \int_0^a 2f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x).$$

Dacă f este impară, atunci

$$f(x) + f(-x) = 0, \quad (\forall)\ x \in [-a, a],$$

deci (observaţia 4.15)

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a [f(x) + f(-x)]\mathrm{d}x = 0.$$

4.18. Exerciţii.

I.

1. Fie $f:[a, b] \to \mathbf{R}$ o funcţie continuă şi strict crescătoare. Să se arate că există un singur punct $c \in [a, b]$ astfel încât

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b - a)\cdot f(c).$$

2. Se consideră funcţia

$$f(x) = x^2, \quad x \in [1, 3].$$

Să se determine $c \in (1, 3)$ astfel încât

$$\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x = 2f(c).$$

3. Fie $f:[a, b] \to \mathbf{R}$ o funcţie continuă neidentic nulă, astfel încât

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$$

Să se arate că există în $[a, b]$ două puncte x_1, x_2, $x_1 < x_2$ astfel încât

$$f(x_1)\cdot f(x_2) < 0.$$

4. Fie $f:[a, b] \to \mathbf{R}$ o funcţie continuă. Se presupune că pentru orice interval deschis $(a', b') \subset [a, b]$ există un interval $[a'_0, b'_0] \subset (a', b')$ astfel încât

$$\int_{a'_0}^{b'_0} f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

Să se arate că f este identic nulă.

II. Să se verifice egalităţile:

1. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^3 x\, \mathrm{d}x = \frac{4}{3}$.

2. $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^3 x\, \mathrm{d}x = 0$.

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin 2x \, dx = \frac{2}{5}\left(e^{\frac{\pi}{2}} + 1\right)$.

4. $\int_0^{\pi} x \sin x \, dx = \pi$.

5. $\int_0^{\pi} x \sin^2 x \, dx = \frac{\pi^2}{4}$.

6. $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2$.

7. $\int_0^2 x^2 \sqrt{1 + x^3} \, dx = \frac{52}{9}$

8. $\int_0^4 x \sqrt{x^2 + 9} \, dx = \frac{98}{3}$.

9. $\int_0^1 \sqrt{4 - x^2} \, dx = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}$.

10. $\int_0^1 \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = \operatorname{arc\,tg} e - \frac{\pi}{4}$.

11. $\int_0^1 \frac{x + 1}{\sqrt{1 + x^2}} dx = \sqrt{2} - 1 + \ln(\sqrt{2} + 1)$.

12. $\int_0^1 \frac{1}{2 + \sqrt{x}} dx = 2 - 4 \ln \frac{3}{2}$.

III. Să se calculeze integralele:

1. $\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{5 + 4x - x^2}} dx$.

2. $\int_{-1}^2 \frac{1}{4x^2 + 4x + 5} dx$.

3. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \operatorname{tg} x) dx$.

4. $\int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$.

5. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^3 x \, dx$.

6. $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} \, dx$.

7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^2 x \, dx$.

8. $\int_0^{\pi} \sin^2 x \cos 2x \, dx$.

9. $\int_0^1 x^2 \operatorname{arc\,tg} x \, dx$.

10. $\int_0^1 e^{2x} \sin 3x \, dx$.

11. $\int_0^2 x^3 e^x dx$.

12. $\int_0^2 x \ln(1 + x) dx$.

13. $\int_0^1 \frac{x}{x^4 + 1} dx$.

14. $\int_1^2 \frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$.

15. $\int_0^1 \frac{2x + 1}{\sqrt{2 - x^2}} dx$.

III

Aplicaţii ale integralei definite şi metode de calcul

§ 1. INTERPRETAREA GEOMETRICĂ A INTEGRALEI DEFINITE A UNEI FUNCŢII POZITIVE

În acest paragraf vom defini clasa mulţimilor din planul $\mathbf{R}^2$ care au arie şi vom arăta că dacă $f : [a, b] \to \mathbf{R}_+$ este o funcţie continuă, atunci mulţimea

$$\Gamma_f \overset{\text{def}}{=} \{(x, y \in \mathbf{R}^2 \mid a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\},$$

numită *subgraficul lui f*, are arie şi aria sa este egală cu integrala lui f pe intervalul $[a, b]$:

$$\text{aria}\,(\Gamma_f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

1.1. Definiţie. O mulţime E din planul $\mathbf{R}^2$ se numeşte elementară dacă

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} D_i,$$

unde D_i sunt dreptunghiuri cu laturile paralele cu axele de coordonate, iar oricare două dreptunghiuri diferite D_i, D_j au cel mult o latură comună. Punem prin definiţie

$$\text{aria}\,(E) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} \text{aria}\,(D_i).$$

1.2. *Observaţii.* a) Reprezentarea unei mulţimi elementare E sub forma

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} D_i,$$

nu este unică.

b) Reuniunea, intersecţia şi diferenţa a două mulţimi elementare sunt tot mulţimi elementare.

c) Aria unei mulţimi elementare E nu depinde de scrierea lui E sub forma $E = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$ ca în definiţia 1.1, adică dacă

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} D_i \quad \text{şi} \quad E = \bigcup_{j=1}^{m} G_j,$$

sunt două reprezentări ale lui E ca în definiţia 1.1, atunci

$$\sum_{i=1}^{n} \text{aria}\,(D_i) = \sum_{j=1}^{m} \text{aria}\,(G_j).$$

d) Dacă E, F sunt mulțimi elementare disjuncte, sau care au în comun cel mult laturi ale unor dreptunghiuri componente, atunci

$$\text{aria } (E \cup F) = \text{aria } (E) + \text{aria } (F).$$

e) Dacă E, F sînt mulțimi elementare astfel încât $E \subset F$, atunci

$$\text{aria } (E) \leqslant \text{aria } (F)$$

și

$$\text{aria } (F \setminus E) = \text{aria } (F) - \text{aria } (E).$$

1.3. Definiție. Fie A o mulțime mărginită din plan. Spunem că mulțimea A are arie, dacă există două șiruri $(E_n)_{n \in \mathbf{N}}$, $(F_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de mulțimi elementare astfel încât:

(1) $$E_n \subset A \subset F_n, \quad (\forall)\, n \in \mathbf{N},$$

(2) șirurile de numere reale pozitive

$$\{\text{aria } (E_n)\}_{n \in \mathbf{N}} \text{ și } \{\text{aria } (F_n)\}_{n \in \mathbf{N}}$$

sunt convergente și

$$\lim_{n \to \infty} \text{aria } (E_n) = \lim_{n \to \infty} \text{aria } (F_n).$$

În acest caz punem

$$\text{aria } (A) \overset{\text{def}}{=} \lim_{n \to \infty} \text{aria } (E_n) = \lim_{n \to \infty} \text{aria } (F_n).$$

1.4. *Observații.* (α) Definiția ariei lui A este corectă; adică dacă luăm $(U_n)_{n \in \mathbf{N}}$, $(V_n)_{n \in \mathbf{N}}$ alte două șiruri de mulțimi elementare care satisfac condițiile (1) și (2) din definiția 1.3, atunci

$$\lim_{n \to \infty} \text{aria } (U_n) = \lim_{n \to \infty} \text{aria } (V_n) = \lim_{n \to \infty} \text{aria } (E_n) = \lim_{n \to \infty} \text{aria } (F_n).$$

(β) Dacă A și B au arie, atunci $A \cup B$, $A \cap B$ și $A \setminus B$ au arie.

(γ) Dacă A, B au arie și $A \cap B = \emptyset$, atunci

$$\text{aria } (A \cup B) = \text{aria } (A) + \text{aria } (B).$$

(δ) Dacă A, B au arie și $B \subset A$, atunci

$$\text{aria } (A \setminus B) = \text{aria } (A) - \text{aria } (B).$$

Nu demonstrăm aici aceste rezultate.

1.5. *Exemplu de funcție al cărei subgrafic nu are arie.* Fie $g : [0, 1] \to \mathbf{R}_+$ funcția lui Dirichlet

$$g(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in [0, 1] \cap Q, \\ 0, & \text{dacă } x \in [0, 1] \setminus Q \end{cases}$$

și

$$\Gamma_g \overset{\text{def}}{=} \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant g(x)\}.$$

Vom arăta că:

(α) dacă E elementară $\subset \Gamma_g$, atunci aria $(E) = 0$,

(β) dacă F elementară $\supset \Gamma_g$, atunci aria $(F) \geqslant 1$.

Din faptul că între două numere reale există întotdeauna un număr iraţional, rezultă că orice dreptunghi $D \subset \Gamma_g$ are înălţimea egală cu 0, deci aria sa este egală cu 0

$$\text{aria } (D) = 0.$$

Cum orice mulţime elementară $E \subset \Gamma_g$ este alcătuită din dreptunghiuri $D \subset \Gamma_g$, rezultă afirmaţia (α).

Pătratul $D_1 = [0, 1] \times [0, 1]$ este cea mai mică mulţime elementară care include pe Γ_g; adică dacă F elementară $\supset \Gamma_g$, atunci $F \supset D_1$, aşadar,

$$\text{aria } (F) \geqslant \text{aria } (D_1) = 1.$$

Fie acum $(E_n)_{n \in \mathbf{N}}$, $(F_n)_{n \in \mathbf{N}}$ două şiruri de mulţimi elementare astfel încât şirurile ariilor lor sunt convergente şi

$$E_n \subset \Gamma_g \subset F_n, \quad (\forall)\, n \in \mathbf{N}.$$

Atunci din (α) rezultă

$$\text{aria } (E_n) = 0, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N},$$

iar din (β) se obţine

$$\text{aria } (F_n) \geqslant 1, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N},$$

deci

$$\lim_{n \to \infty} \text{aria } (E_n) = 0 < 1 \leqslant \lim_{n \to \infty} \text{aria } (F_n).$$

Aşadar, mulţimea Γ_g *nu* are arie.

Din cele arătate mai sus se vede că: *dacă A este o mulţime care are arie, nu rezultă neapărat că orice submulţime B a lui A are arie.*

1.6. Teoremă. Dacă $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ este o funcţie continuă pozitivă atunci

$$(\alpha) \qquad \Gamma_f \text{ are arie}$$

$$(\beta) \qquad \text{aria } (\Gamma_f) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Demonstraţie. Fie

$$\Delta_n = (a = x_0^n < x_1^n < \ldots < x_{p_n}^n = b) \qquad (n \in \mathbf{N})$$

un şir de diviziuni astfel încât

(1)
$$\lim_{n \to \infty} \| \Delta_n \| = 0$$

şi să notăm cu m_i^n (respectiv M_i^n) marginea inferioară (respectiv superioară) a funcţiei f pe intervalul închis şi mărginit $[x_{i-1}^n, x_i^n]$.

Se ştie (vezi Elemente de analiză matematică, cl. a XI-a) că orice funcţie continuă pe un interval închis şi mărginit J, îşi atinge marginile pe J. Deci, în cazul nostru există

$$u_i^n \in [x_{i-1}^n, x_i^n] \quad \text{şi } v_i^n \in [x_{i-1}^n, x_i^n]$$

astfel încît

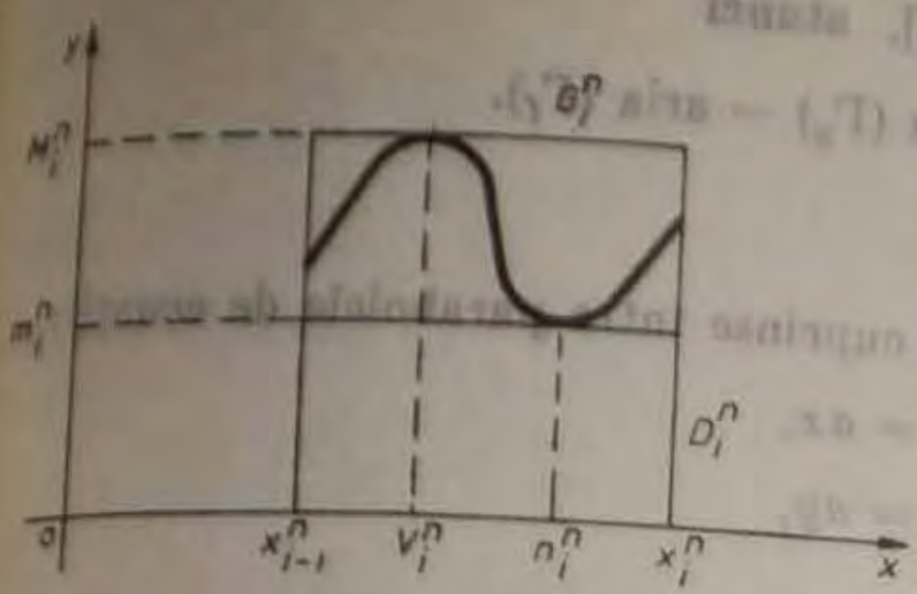


Fig. III.1

$$f(u_i^n) = m_i^n \quad \text{și} \quad f(v_i^n) = M_i^n.$$

Fie (fig. III.1)

$$D_i^n \overset{\text{def}}{=} [x_{i-1}^n,\ x_i^n] \times [0,\ m_i^n],$$

$$G_i^n \overset{\text{def}}{=} [x_{i-1}^n,\ x_i^n] \times [0,\ M_i^n]$$

dreptunghiurile de bază $x_i^n - x_{i-1}^n$ și înălțime m_i^n, respectiv M_i^n. Mulțimile elementare

$$E_n \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{i=1}^{p_n} D_i^n, \text{ respectiv } F_n \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{i=1}^{p_n} G_i^n$$

verifică incluziunile

(2) $$E_n \subset \Gamma_f \cup F_n,$$

iar ariile lor sunt

(3) $$\text{aria}\,(E_n) = \sum_{i=1}^{p_n} m_i^n\,(x_i^n - x_{i-1}^n) = \sum_{i=1}^{p_n} f(u_i^n)\,(x_i^n - x_{i-1}^n) = \sigma_{\Delta_n}(f,\ u_i^n)$$

respectiv

(4) $$\text{aria}\,(F_n) = \sigma_{\Delta_n}(f,\ v_i^n).$$

Funcția f fiind continuă, este integrabilă (cap. II, teorema 3.12), deci (cap. II, observația 2.11), ținând seama de relațiile (1), (3) și (4), obținem:

(5) $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}(f, u_i^n) = \lim_{n\to\infty} \text{aria}(E_n) = \lim_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}(f,\ v_i^n) = \lim_{n\to\infty} \text{aria}\,(F_n).$$

Șirurile de mulțimi elementare (E_n) și (F_n) verificând relațiile (2) și (5), rezultă că mulțimea Γ_f are arie și (definiția 1.3)

$$\text{aria}\,(\Gamma_f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

1.7. Consecință. Dacă $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ sunt funcții continue astfel încât

$$f(x) \leqslant g(x), \quad (\forall)\ x \in [a,\ b]$$

atunci mulțimea (fig. III.2)

$$\Gamma_{f,g} \overset{\text{def}}{=} \{(x,\ y) \in \mathbf{R}^2 \mid a \leqslant x \leqslant b;\ f(x) \leqslant y \leqslant g(x)\},$$

cuprinsă între graficele funcțiilor f, g și dreptele paralele la Oy care taie axa Ox în punctele a și b respectiv, are arie și

$$\text{aria}\,(\Gamma_{f,g}) = \int_a^b [g(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x.$$

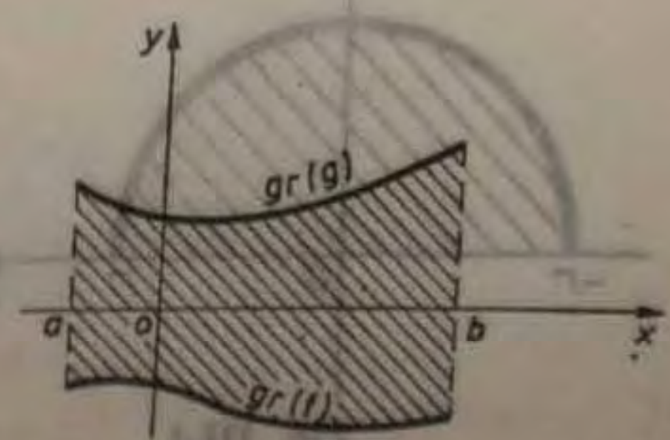


Fig. III.2

Dacă $g(x) \geqslant f(x) \geqslant 0$, $(\forall)\, x \in [a, b]$, atunci

$$\text{aria } (\Gamma_{f,g}) = \text{aria } (\Gamma_g) - \text{aria } (\Gamma_f).$$

1.8. *Exemple*

1) Să se calculeze aria mulțimii cuprinse între parabolele de ecuații:

$$y^2 = ax, \tag{1}$$

$$x^2 = ay, \tag{2}$$

unde $a > 0$ (fig. III.3).

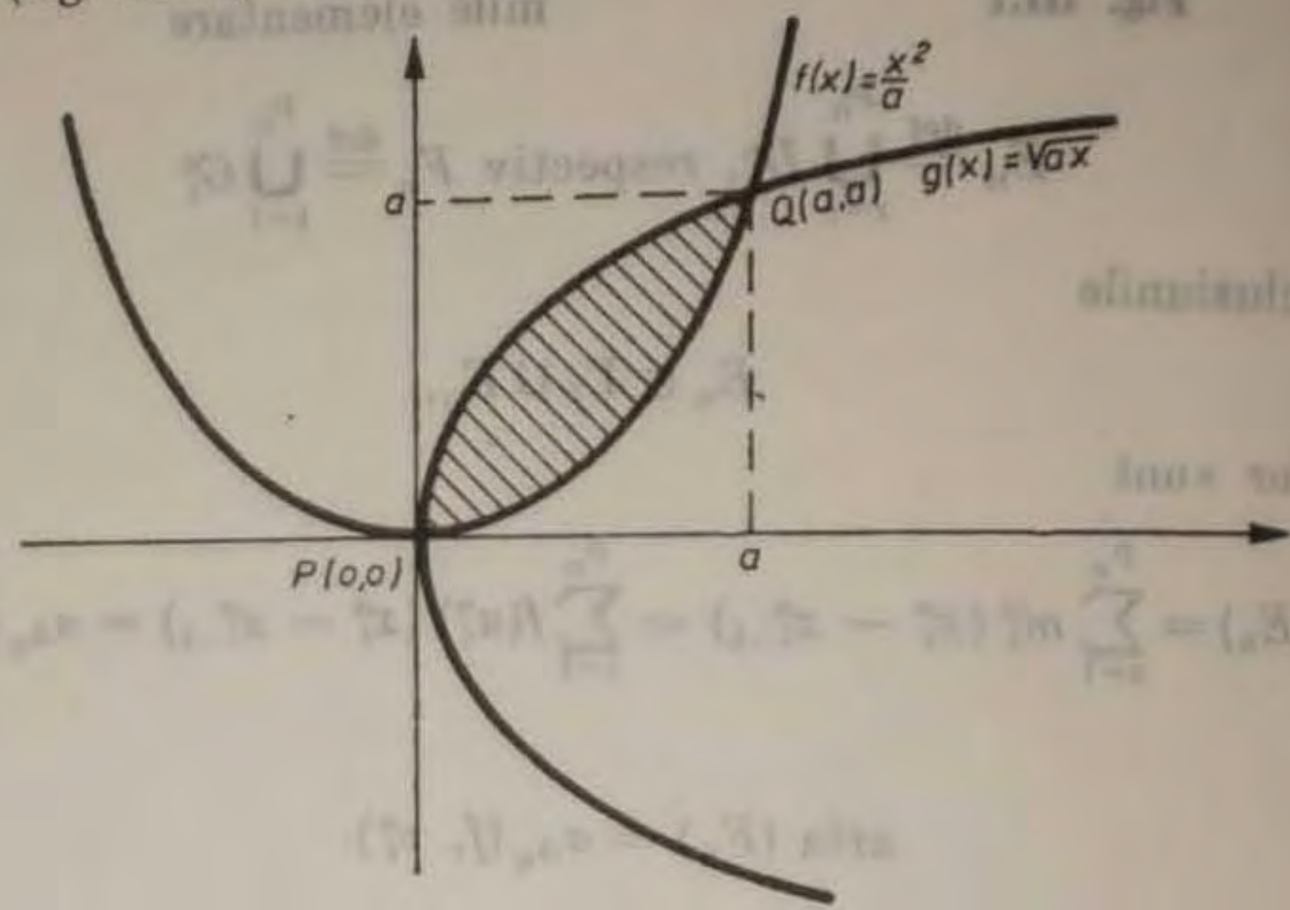


Fig. III.3

Rezolvând acest sistem de ecuații, obținem punctele de intersecție ale acestor parabole.

$$\text{aria } (\Gamma_{f,g}) = \int_0^a (g(x) - f(x))\, dx = \int_0^a \left(\sqrt{ax} - \frac{x^2}{a}\right) dx =$$

$$= \left(\sqrt{a}\, \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3a}\right)\Bigg|_0^a = \frac{2}{3}\, a^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}\, a^2 = \frac{a^2}{3}.$$

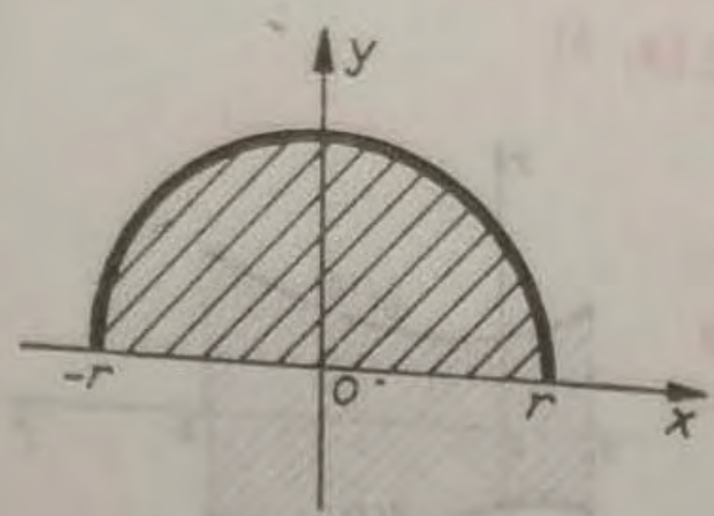


Fig. III.4

2) Să se calculeze aria mulțimii (fig. III.4)

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant r^2,\ y \geqslant 0\},$$

$$(r > 0).$$

Observăm că mulțimea A este subgraficul funcției $f : [-r, r] \to \mathbf{R}_+$ definite prin

$$f(x) \overset{\text{def}}{=\!=} \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Am văzut în capitolul I, exemplul 3.5 (2), că funcția

$$F(x) \overset{\text{def}}{=\!=} \frac{1}{2}\left[r^2 \arcsin \frac{x}{r} + x\sqrt{r^2 - x^2}\right], \quad (-r \leqslant x \leqslant r)$$

este o primitivă a lui f. Deci

$$\text{aria } (A) = \text{aria } (\Gamma_f) = \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left[r^2 \arcsin \frac{x}{r} + x\sqrt{r^2 - x^2}\right]\Bigg|_{-r}^{r} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[r^2 \arcsin 1 - r^2 \arcsin(-1)\right] = \frac{r^2}{2}\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\pi r^2.$$

3) Să se găsească aria mulțimii A (fig. III.5) cuprinse între cercul de ecuație

(I) $$x^2 + y^2 = 4px$$

și parabola de ecuație

(II) $$y^2 = 2px.$$

Scriind ecuația (I) sub forma

(I') $$(x - 2p)^2 + y^2 = (2p)^2,$$

se observă că cercul considerat are centrul în punctul $(2p, 0)$, iar raza sa este $2p$.

Pentru a determina punctele în care parabola intersectează cercul, vom rezolva sistemul format din ecuațiile (I) și (II). Dacă se înlocuiește y^2 din (II) în (I), atunci

$$x^2 = 2\,px,$$

deci se obțin soluțiile

$$x = 0 \text{ și } x = 2p.$$

Înlocuind pe $x = 0$ (respectiv $x = 2p$) în ecuația (II), obținem soluțiile

$$y = 0 \text{ și } y = \pm 2p.$$

Așadar, parabola de ecuație (II) și cercul de ecuație (I) se intersectează în punctele

$$O\,(0, 0), \quad P\,(2p, 2p), \quad Q\,(2p, -2p).$$

Este suficient să calculăm aria mulțimii A_1 cuprinse între arcul de parabolă OP și arcul de cerc OP, adică aria mulțimii cuprinse între graficele funcțiilor

$$f(x) \overset{\text{def}}{=\!=} \sqrt{2px}, \quad (0 \leqslant x \leqslant 2p),$$

$$h(x) \overset{\text{def}}{=\!=} \sqrt{4px - x^2}, \quad (0 \leqslant x \leqslant 2p).$$

Funcțiile f și h fiind pozitive, avem

(1) $$\text{aria } (A_1) = \text{aria } (\Gamma_{f,h}) = \text{aria } (\Gamma_h) - \text{aria } (\Gamma_f),$$

(2) $$\text{aria } (\Gamma_f) = \int_0^{2p} f(x)dx = \sqrt{2p}\int_0^{2p} x^{\frac{1}{2}} dx =$$

$$= \sqrt{2p} \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{2p} = \frac{8}{3}p^2.$$

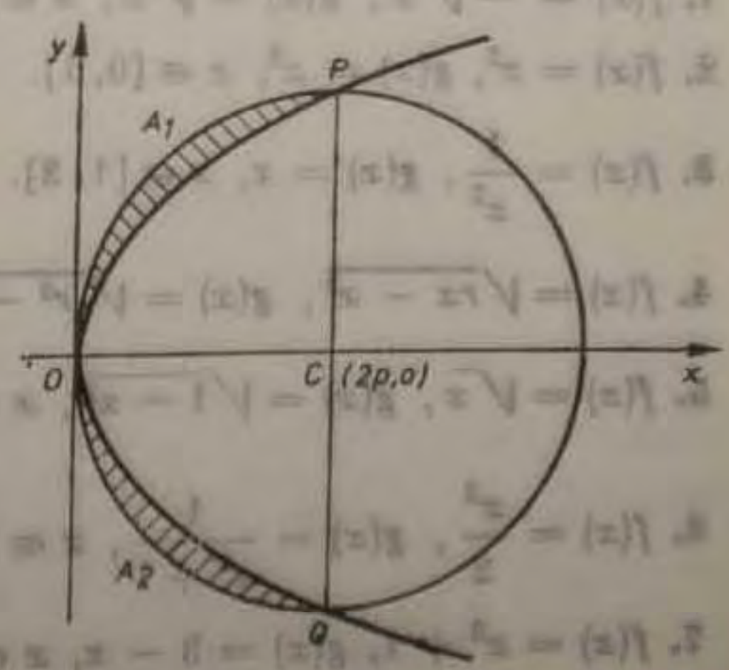


Fig. III.5

Deşi se observă uşor că

$$\text{aria } (\Gamma_h) = \frac{1}{4} \text{ aria cercului de rază } 2p = \frac{1}{4}\pi(2p)^2 = \pi p^2,$$

totuşi vom folosi integrala pentru a calcula aria (Γ_h).

Scriind $\sqrt{4px - x^2}$ sub forma

$$\sqrt{x(4p - x)},$$

se vede că avem de integrat o funcţie de forma

$$\sqrt{(x - \alpha)(\beta - x)}.$$

Pentru a putea aplica rezultatul obţinut în exemplul 4.13 (5), din capitolul II, considerăm funcţia h_1 definită pe $[0, 4p]$ (şi nu numai pe $[0, 2p]$ cum era definită h), prin aceeaşi relaţie

$$h_1(x) \overset{\text{def}}{=\!=} \sqrt{x(4p - x)}, \quad (\forall)\, x \in [0, 4p]. \tag{3}$$

Atunci are loc relaţia

$$\text{aria } (\Gamma_h) = \frac{1}{2} \text{ aria } (\Gamma_{h_1}). \tag{4}$$

În exemplul 4.13(5) s-a obţinut egalitatea

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{(x - \alpha)(\beta - x)}\, dx = (\beta - \alpha)^2 \frac{\pi}{8}. \tag{5}$$

Din (3), (4) şi (5) (pentru $\alpha = 0$ şi $\beta = 4p$), obţinem:

$$\text{aria } (\Gamma_h) = \frac{1}{2}\int_0^{4p} \sqrt{x(4p - x)}\, dx = \frac{1}{2}(4p)^2 \cdot \frac{\pi}{8} = \pi p^2. \tag{6}$$

În sfîrşit din relaţiile (1), (2) şi (6) rezultă

$$\text{aria } (A) = \text{aria } (A_1) + \text{aria } (A_2) = 2 \text{ aria } (A_2) =$$

$$= 2\,[\text{aria } (\Gamma_h) - \text{aria } (\Gamma_f)] = 2\pi p^2 - \frac{16}{3} p^2.$$

1.9. *Exerciţii*

I. Să se calculeze aria mulţimii $\Gamma_{f,g}$:

1. $f(x) = -\sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, 4]$.
2. $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2$, $x \in [0, 1]$.
3. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $g(x) = x$, $x \in [1, 3]$.
4. $f(x) = \sqrt{rx - x^2}$, $g(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in [0, r]$.
5. $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in \left[0, \dfrac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)\right]$.
6. $f(x) = \dfrac{x^2}{2}$, $g(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$, $x \in [-1, 1]$.
7. $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = 3 - x$, $x \in [-2, 1]$.
8. $f(x) = e^{-x}$, $g(x) = e^x$, $x \in [0, 1]$.

6. $f(x) = |x|$, $g(x) = 1$, $x \in [-1, 1]$.

10. $f(x) = 0$, $g(x) = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$, $x \in [0, a]$.

11. $f(x) = \frac{x^2}{4a}$, $g(x) = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$, $x \in [-2a, 2a]$.

II.

1. Să se calculeze aria mulțimii cuprinsă între parabola de ecuație $y^2 = 4x$ și dreapta de ecuație $y = 2x$.

2. Să se calculeze aria mulțimii din semiplanul $\{(x, y) \mid y > 0\}$ cuprinsă între hiperbola echilateră de ecuație $xy = a^2$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = a$ și $x = 2a$.

3. Interiorul cercului de ecuație $x^2 + y^2 = 16$ este despărțit de parabola de ecuație $y^2 = 6x$ în două regiuni. Să se găsească aria fiecăreia din ele.

4. Interiorul elipsei de ecuație $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ este despărțit de hiperbola de ecuație $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ în trei regiuni. Să se calculeze aria fiecăreia din ele.

5. Să se calculeze aria figurii cuprinsă între parabolele de ecuații

$$y^2 = 8(2 - x) \quad \text{și} \quad y^2 = 24(2 + x).$$

6. Interiorul cercului de ecuație $x^2 + y^2 = 8$ este despărțit de parabola de ecuație $y^2 = 2x$ în două regiuni. Să se calculeze aria fiecăreia din ele.

7. Fie hiperbola echilateră de ecuație $x^2 - y^2 = a^2$ și dreapta de ecuație $y = kx$ $(0 < k < 1)$. Să se calculeze aria mulțimii cuprinsă între semidreapta Ox $(x > 0)$, arcul de hiperbolă $x^2 - y^2 = a^2$ $(y > 0)$ și dreapta $y = kx$.

8. Să se calculeze aria mulțimii cuprinsă între parabola de ecuație $y^2 = x$ și dreapta de ecuație $y = 2x - 1$.

9. Să se calculeze aria mulțimii cuprinsă între parabolele de ecuație $y^2 = x$, $x^2 = 8y$.

§ 2. VOLUMUL CORPURILOR DE ROTAȚIE

În acest paragraf vom presupune că cititorul este familiarizat cu calculul volumului unor corpuri uzuale ca: paralelipiped, prismă, piramidă, cilindru, con, trunchi de con. Pornind de la volumul cilindrului, vom defini ce înseamnă că un corp de rotație (corp obținut prin rotirea subgraficului unei funcții pozitive f în jurul axei Ox) are volum și vom deduce o formulă de calcul al volumului unor astfel de corpuri.

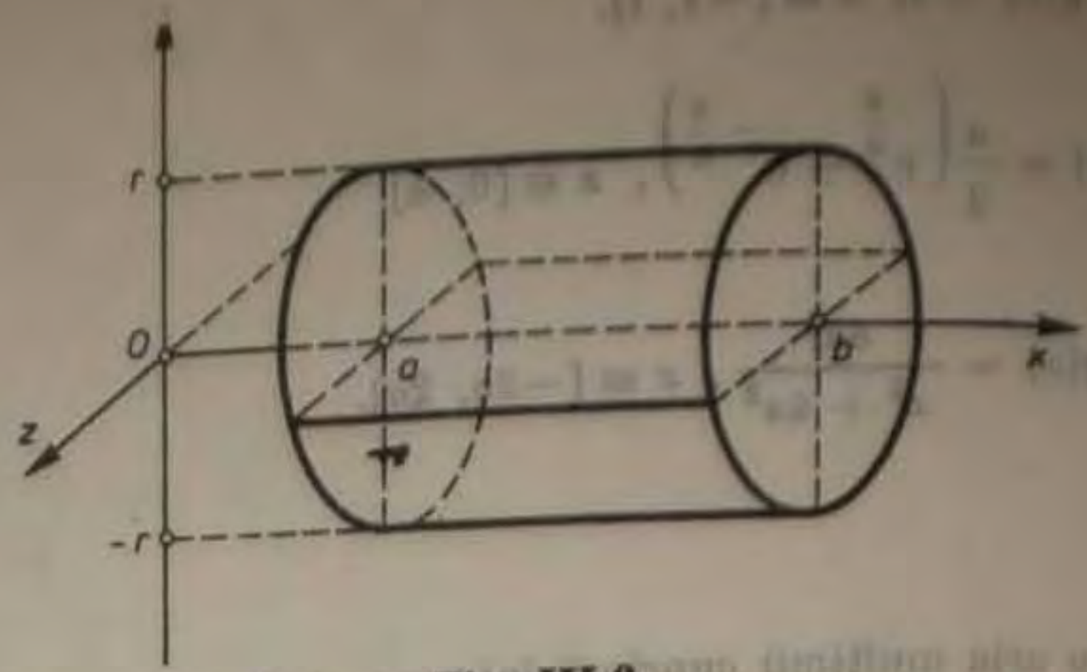


Fig. III.6

Cel mai simplu corp de rotaţie se obţine rotind subgraficul unei funcţii constante pozitive:

$$f(x) = r, \ (\forall)\ x \in [a,\ b]$$

în jurul axei Ox (fig. III.6). Această mulţime (care este un cilindru de rază r şi înălţime $b - a$) poate fi scrisă sub forma

$$C_r = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, \sqrt{y^2 + z^2} \leqslant r,\ \ a \leqslant x \leqslant b\right\}.$$

Volumul acestui cilindru C_r este

$$\text{vol}\ (C_r) = \pi r^2 (b - a).$$

2.1. Definiţie. Fie $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ şi $f : [a,\ b] \to \mathbf{R}_+$. Mulţimea

$$C_f \overset{\text{def}}{=} \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, \sqrt{y^2 + z^2} \leqslant f(x),\ \ a \leqslant x \leqslant b\right\}$$

se numeşte **corpul de rotaţie determinat de funcţia** f sau corpul obţinut prin rotirea subgraficului funcţiei f în jurul axei Ox (fig. III.7).

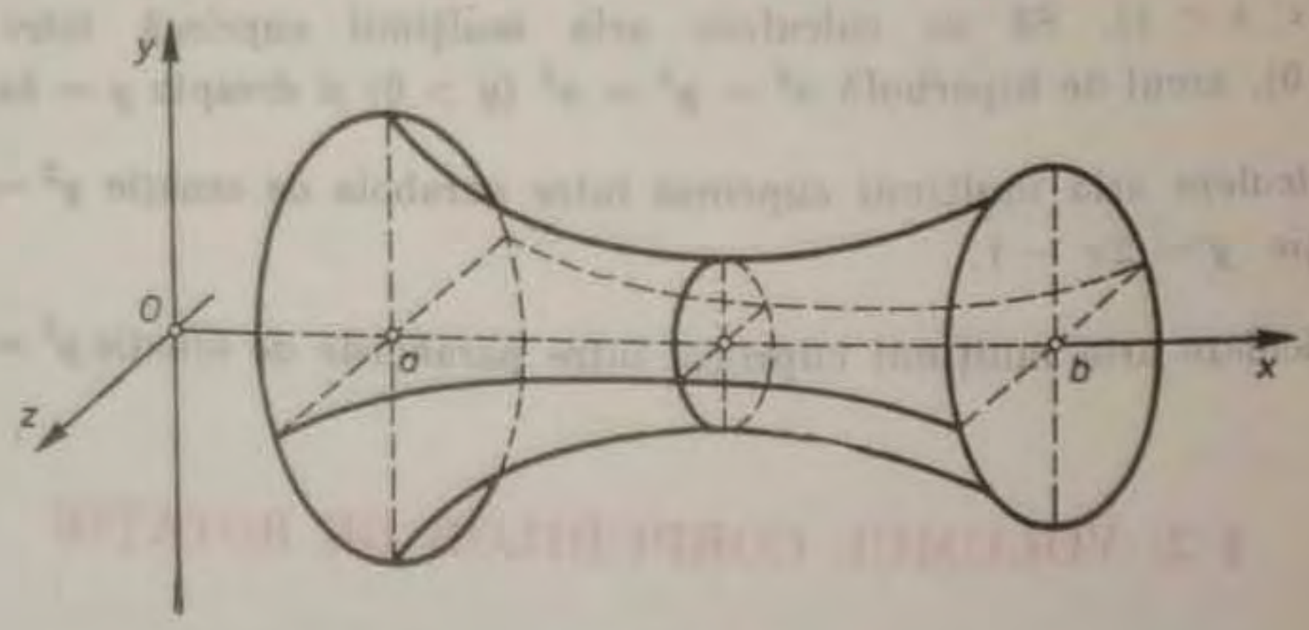


Fig. III.7

2.2. *Observaţie.* Dacă funcţia $g : [a,\ b] \to \mathbf{R}_+$ este *constantă pe porţiuni*, adică dacă există o diviziune $\Delta = (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$ a lui $[a, b]$ astfel încât g este constantă pe fiecare interval $(x_{i-1},\ x_i)$:

$$g(x) = c_i, \qquad (\forall)\ x \in (x_{i-1},\ x_i),$$

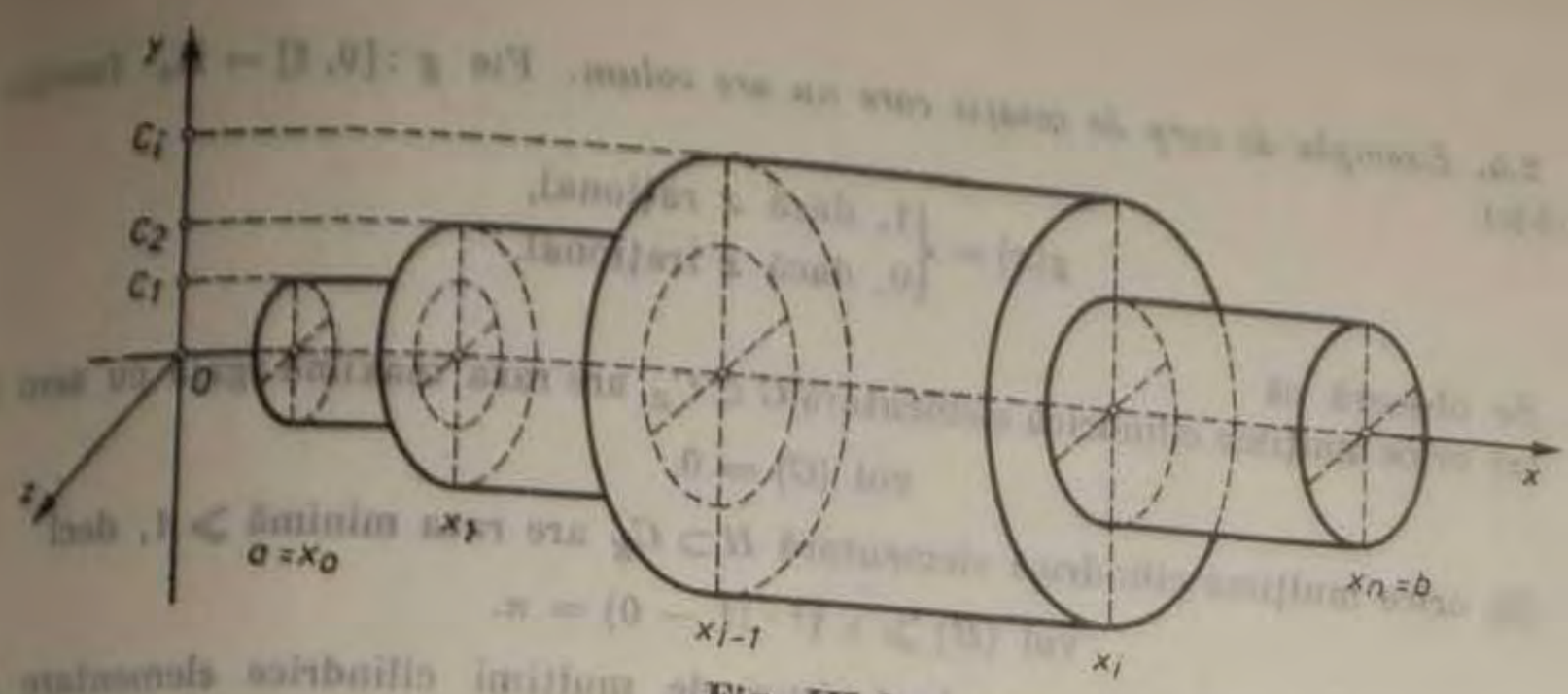


Fig. III.8

atunci corpul de rotaţie determinat de f are forma următoare (fig. III.8): adică este o reuniune finită de cilindri. Volumul unui asemenea corp de rotaţie este

$$\mathrm{vol}\,(C_g) = \pi \sum_{i=1}^{n} c_i^2 (x_i - x_{i-1}).$$

Prin analogie cu noţiunea de mulţime elementară introdusă în paragraful precedent, vom numi *mulţime cilindrică elementară*, orice mulţime care se obţine prin rotirea subgraficului unei funcţii constante pe porţiuni în jurul axei Ox.

Cel mai mic (respectiv cel mai mare) dintre numerele pozitive $c_1, c_2, \ldots, c_n$ va fi numit *raza minimă* (resp. *raza maximă*) a mulţimii cilindrice elementare $C(f)$.

Aşa cum am folosit mulţimile elementare pentru a defini aria unei mulţimi din plan, vom folosi mulţimile cilindrice elementare pentru a defini volumul corpurilor de rotaţie.

2.3. Definiţie. Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}_+$ şi C_f corpul de rotaţie determinat de funcţia f. Spunem că C_f **are volum** dacă există două şiruri $(G_n)_{n\in\mathbf{N}}$ şi $(H_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de mulţimi cilindrice elementare (fiecare G_n şi H_n fiind determinate de funcţiile constante pe porţiuni $g_n, h_n : [a, b] \to \mathbf{R}$) astfel încât

(1) $$G_n \subset C_f \subset H_n, \quad (\forall)\ n \in \mathbf{N}$$

şi

(2) $$\lim_{n\to\infty} \mathrm{vol}\,(G_n) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{vol}\,(H_n).$$

În acest caz volumul lui C_f se defineşte prin

$$\mathrm{vol}\,(C_f) \overset{\mathrm{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \mathrm{vol}\,(G_n) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{vol}\,(H_n).$$

2.4. *Observaţie.* Definiţia volumului corpului de rotaţie C_f nu depinde de şirurile $(G_n)_{n\in\mathbf{N}}$ şi $(H_n)_{n\in\mathbf{N}}$ considerate.

2.5. *Exemplu de corp de rotaţie care nu are volum.* Fie $g:[0,1]\to \mathbf{R}_+$ funcţia lui Dirichlet

$$g(x)=\begin{cases}1, & \text{dacă } x \text{ raţional},\\ 0, & \text{dacă } x \text{ iraţional}.\end{cases}$$

Se observă că

(α) orice mulţime cilindrică elementară $G\subset C_g$ are raza maximă egală cu zero deci,

$$\text{vol}\ (G)=0,$$

(β) orice mulţime cilindrică elementară $H\supset C_g$ are raza minimă $\geqslant 1$, deci

$$\text{vol}\ (H)\geqslant \pi\, 1^2\cdot(1-0)=\pi.$$

Fie acum $(G_n)_{n\in N}$, $(H_n)_{n\in N}$ două şiruri de mulţimi cilindrice elementare astfel încât

(1) $$G_n\subset C_g\subset H_n,\ (\forall)\ n\in \mathbf{N},$$

(2) şirurile de numere pozitive $(\text{vol}\ (G_n))_{n\in \mathbf{N}}$ şi $(\text{vol}\ (H_n))_{n\in \mathbf{N}}$ sunt convergente.

Atunci din (1), (α) şi (β) rezultă

$$\text{vol}\ (G_n)=0 \text{ şi } \text{vol}\ (H_n)\geqslant \pi,\ (\forall)\ n\in \mathbf{N},$$

deci (2)

$$\lim_{n\to\infty}\text{vol}\ (G_n)=0<\pi\leqslant \lim_{n\to\infty}\text{vol}\ (H_n),$$

de unde rezultă că C_g *nu* are volum.

2.6. Teoremă. Dacă $f:[a,b]\to \mathbf{R}_+$ este o funcţie continuă, atunci (i) corpul de rotaţie determinat de f are volum şi

(ii) $$\text{vol}\ (C_f)=\pi\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Demonstraţie. (Modelată după demonstraţia teoremei 1.6). Fie

$$\Delta_n=(a=x_0^n<x_1^n<\ldots<x_{p_n}^n=b),\quad (n\in \mathbf{N})$$

un şir de diviziuni ale intervalului $[a,b]$ astfel încât

(1) $$\lim_{n\to\infty}\|\ \Delta_n\ \|=0$$

şi să notăm cu m_i^n (respectiv M_i^m) marginea inferioară (respectiv superioară) a funcţiei f pe intervalul închis şi mărginit $[x_{i-1}^n,\ x_i^n]$. Atunci există $u_i^n,\ v_i^n\in[x_{i-1}^n,\ x_i^n]$ astfel încât

$$f(u_i^n)=m_i^n \text{ şi } f(v_i^n)=M_i^n.$$

Pentru fiecare $n\in \mathbf{N}$ definim funcţiile constante pe porţiuni $g_n,\ h_n:[a,b]\to \mathbf{R}_+$

$$g_n(x)\overset{\text{def}}{=}\begin{cases}m_i^n=f(u_i^n), & \text{dacă } x\in(x_{i-1}^n,\ x_i^n),\ (1\leqslant i\leqslant p_n),\\ f(x_i), & \text{dacă } x=x_i,\quad (0\leqslant i\leqslant p_n),\end{cases}$$

$$h_n(x)\overset{\text{def}}{=}\begin{cases}M_i^n=f(v_i^n), & \text{dacă } x\in(x_{i-1}^n,\ x_i^n),\ (1\leqslant i\leqslant p_n),\\ f(x_i), & \text{dacă } x=x_i,\quad (0\leqslant i\leqslant p_n).\end{cases}$$

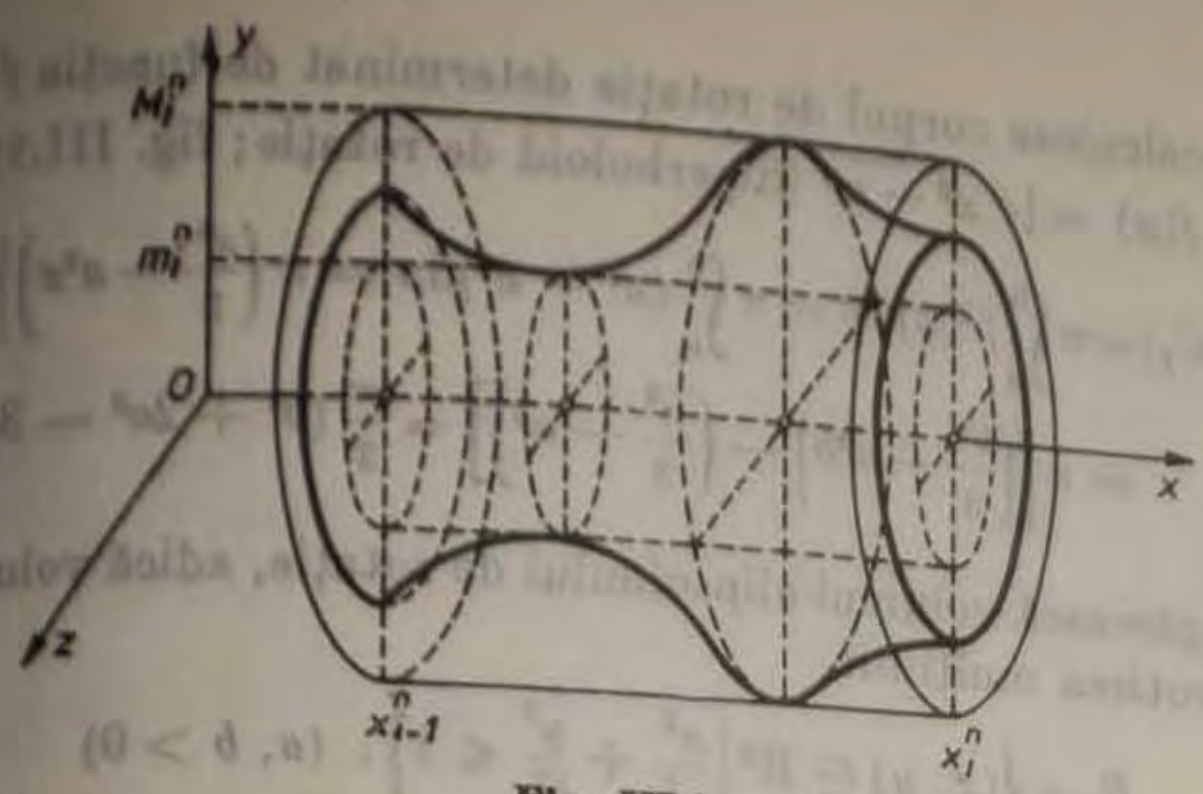


Fig. III.9

Atunci corpurile de rotaţie G_n şi H_n determinate de g_n şi h_n, respectiv, sunt mulţimi cilindrice elementare cu proprietăţile:

$$G_n \subset C_f \subset H_n, \qquad (\forall)\ n \in \mathbf{N}, \tag{2}$$

$$\begin{cases} \mathrm{vol}\,(G_n) = \pi \sum_{i=1}^{p_n} f^2(u_i^n)\,(x_i^n - x_{i-1}^n) = \sigma_{\Delta_n}(\pi f^2,\ u_i^n), \\ \mathrm{vol}\,(H_n) = \pi \sum_{i=1}^{p_n} f^2(v_i^n)\,(x_i^n - x_{i-1}^n) = \sigma_{\Delta_n}(\pi f^2,\ v_i^n). \end{cases} \tag{3}$$

Funcţia f fiind continuă, rezultă că şi funcţia πf^2 este continuă, deci (capitolul II, teorema 3.12) πf^2 este integrabilă, prin urmare, ţinând seamă de (1) şi (3), obţinem:

$$\begin{cases} \pi \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}(\pi f^2,\ u_i^n) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{vol}\,(G_n) = \\ \qquad = \lim_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}(\pi f^2,\ v_i^n) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{vol}\,(H_n). \end{cases} \tag{4}$$

Şirurile de mulţimi cilindrice elementare $(G_n)_{n\in\mathbf{N}}$ şi $(H_n)_{n\in\mathbf{N}}$ verificând relaţiile (2) şi (4), rezultă că $C(f)$ are volum şi

$$\mathrm{vol}\,(C_f) = \pi \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$$

2.7. *Exemple*

α) Să se calculeze volumul corpului de rotaţie determinat de funcţia $f:[0,b]\to\mathbf{R}_+$ definită prin $f(x) = \sqrt{2ax}$ (paraboloid de rotaţie; fig. III.10).

Avem

$$\mathrm{vol}\,(C_f) = \pi \int_0^b f^2(x)\mathrm{d}x =$$

$$= 2\pi a \int_0^b x\,\mathrm{d}x = 2\pi a \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^b = \pi a b^2.$$

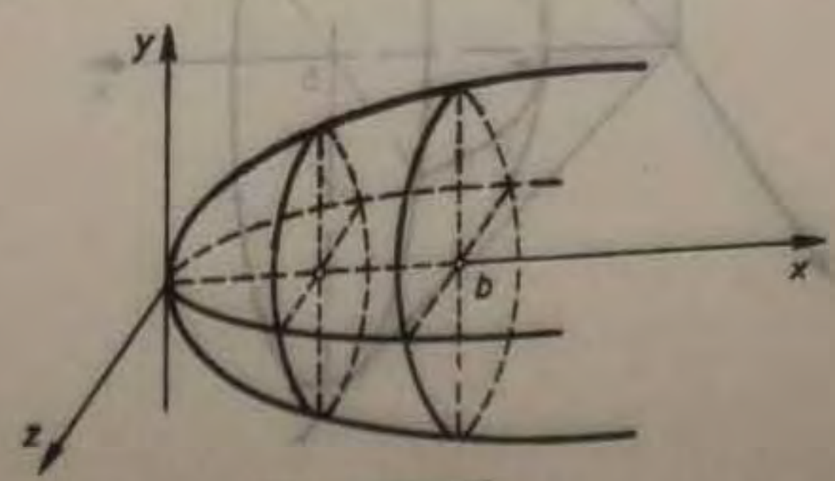


Fig. III.10

β) Să se calculeze corpul de rotație determinat de funcția $f:[a, b] \to \mathbf{R}$, definită prin $f(x) = \sqrt{x^2 - a^2}$ (hiperboloid de rotație; fig. III.11)

$$\text{vol}\,(C_f) = \pi \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x = \pi \int_a^b (x^2 - a^2)\mathrm{d}x = \pi \left(\frac{x^3}{3} - a^2 x\right)\Big|_a^b =$$

$$= \pi \left[\left(\frac{b^3}{3} - a^2 b\right) - \left(\frac{a^3}{3} - a^3\right)\right] = \frac{\pi}{3}(b^3 + 2a^3 - 3a^2 b).$$

γ) Să se găsească volumul elipsoidului de rotație, adică volumul corpului obținut prin rotirea mulțimii

$$E = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}, \quad (a, b > 0)$$

în jurul axei Ox (fig. III.12)

Datorită simetriei elipsoidului față de planul yOz, este suficient să calculăm numai volumul jumătății situate în partea dreaptă ($x > 0$) a planului yOz. Fie deci,

$$f:[0, a] \to \mathbf{R}_+, \; f(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Atunci

$$\text{vol}\,(C_f) = \pi \int_0^a f^2(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi b^2}{a^2}\int_0^a (a^2 - x^2)\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{\pi b^2}{a^2}\left(a^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a = \frac{\pi b^2}{a^2}\left(a^3 - \frac{a^3}{3}\right) = \frac{2\pi}{3} b^2 a,$$

deci

$$\text{volumul elipsoidului} = \frac{4\pi}{3} ab^2.$$

Dacă $a = b = r$, atunci regăsim

$$\text{volumul sferei de rază } a = \frac{4\pi}{3} a^3.$$

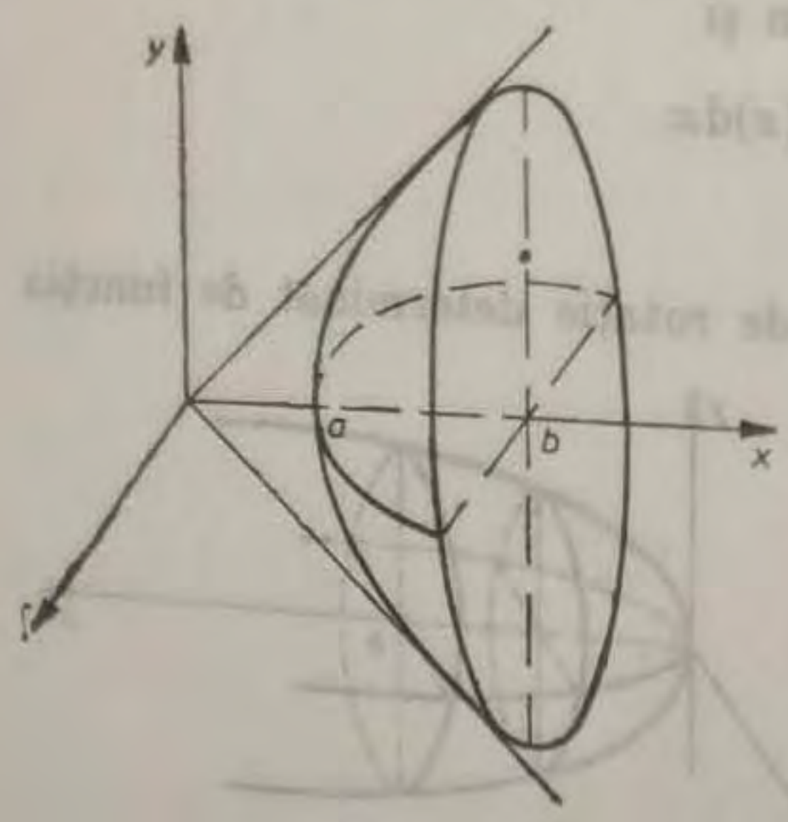


Fig. III.11

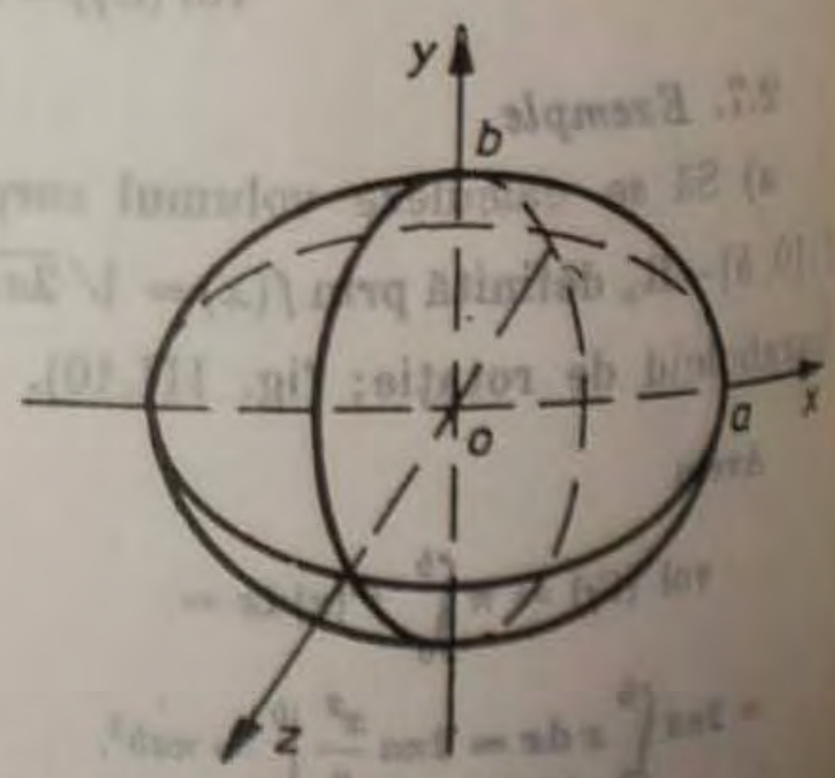


Fig. III.12

8) Fie $a > 0$ şi astroida de ecuaţie

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, \quad (a > 0).$$

Să se calculeze volumul astroidului de rotaţie (corpul obţinut prin rotirea mulţimii mărginite de astroidă, în jurul axei Ox; fig. III.13).

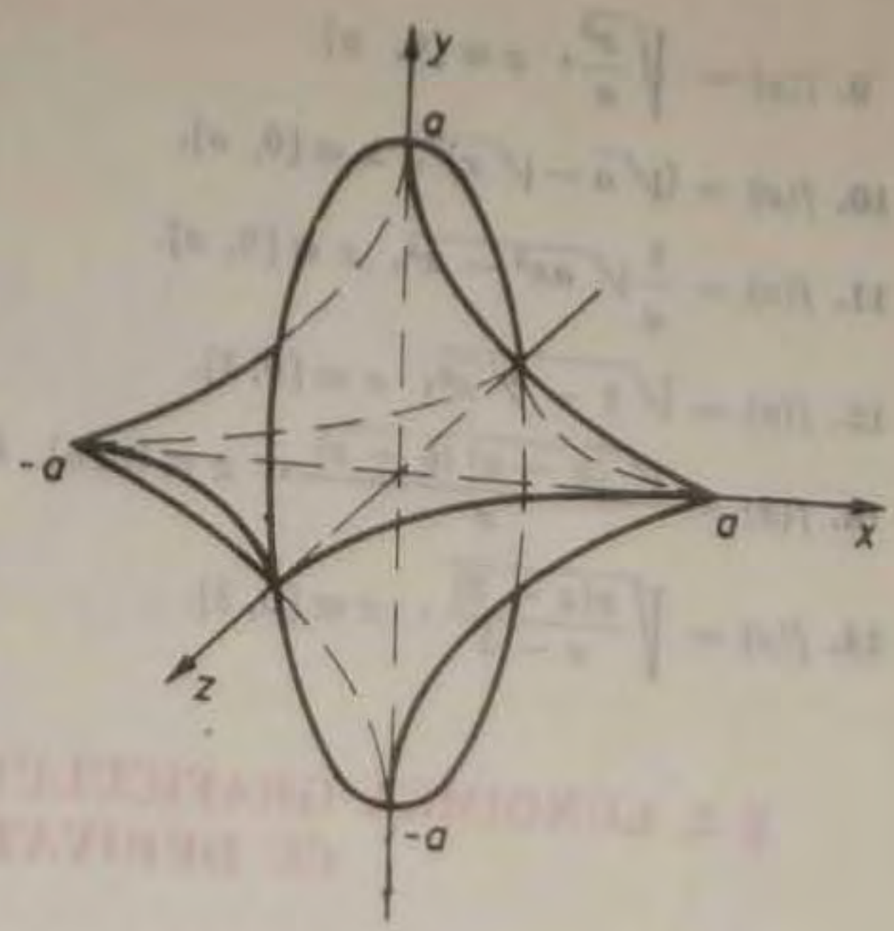


Fig. III.18

Datorită simetriei este suficient să calculăm volumul corpului de rotaţie determinat de funcţia

$$f(x) = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad x \in [0, a].$$

Avem

$$\text{vol}\,(C_f) = \pi \int_0^a f^2(x)\,\mathrm{d}x = \pi \int_0^a \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^3 \mathrm{d}x =$$

$$= \pi \int_0^a \left(a^2 - 3a^{\frac{4}{3}} x^{\frac{2}{3}} + 3a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{4}{3}} - x^2\right) \mathrm{d}x =$$

$$= \pi \left(a^2 x - \frac{9}{5} a^{\frac{4}{3}} x^{\frac{5}{3}} + \frac{9}{7} a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{7}{3}} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^a = \frac{18}{105}\pi a^3.$$

Deci volumul astroidului de rotaţie este

$$\frac{32}{105}\pi a^2.$$

2.8. *Exerciţii*

Să se calculeze volumele corpurilor de rotaţie determinate de funcţiile:

1. $f(x) = b\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad x \in [a, b], \; a, b > 0.$
2. $f(x) = 2x - x^2, \; x \in [0, 2].$
3. $f(x) = \sin x, \; x \in [0, \pi].$
4. $f(x) = e^{-x}, \; x \in [0, 2].$
5. $f(x) = \arcsin x, \; x \in \left[0, \frac{1}{2}\right].$
6. $f(x) = x \ln x, \; x \in [1, e].$
7. $f(x) = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right), \; x \in [0, a].$
8. $f(x) = xe^x, \; x \in [0, 1].$

9. $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{a}}$, $x \in [0, a]$.

10. $f(x) = (\sqrt{a} - \sqrt{x})^2$, $x \in [0, a]$.

11. $f(x) = \frac{1}{a}\sqrt{ax^3 - x^4}$, $x \in [0, a]$.

12. $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt[3]{x^2}}$, $x \in [0, 1]$.

13. $f(x) = \frac{\sqrt{(x-a)(b-x)}}{x}$, $x \in [a, b]$, $b > a > 0$.

14. $f(x) = \sqrt{\frac{x(x-3)}{x-4}}$, $x \in [0, 3]$.

§ 3. LUNGIMEA GRAFICULUI UNEI FUNCȚII DERIVABILE CU DERIVATA CONTINUĂ

În acest paragraf vom defini lungimea graficului unei funcții continue $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ și vom arăta că dacă f este derivabilă cu derivata continuă, atunci graficul lui f are lungime finită și

$$\text{lungimea graficului lui } f = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

3.1. Definiție. Pentru orice funcție $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ și orice diviziune

$$\Delta = (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$$

a intervalului $[a, b]$ definim funcția $f_\Delta : [a, b] \to \mathbf{R}$ prin

$$f_\Delta(x) \overset{\text{def}}{=} f(x_{i-1}) + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1}) \text{ dacă } x \in [x_{i-1}, x_i],\ (1 \leq i \leq n);$$

f_Δ se numește funcția poligonală asociată lui f și lui Δ (fig. III.14).

3.2. *Observație.* Funcția f_Δ se obține, pe fiecare interval $[x_{i-1}, x_i]$, scriind ecuația dreptei care trece prin punctele din plan

$$A_{i-1}(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$$

și

$$A_i(x_i, f(x_i)).$$

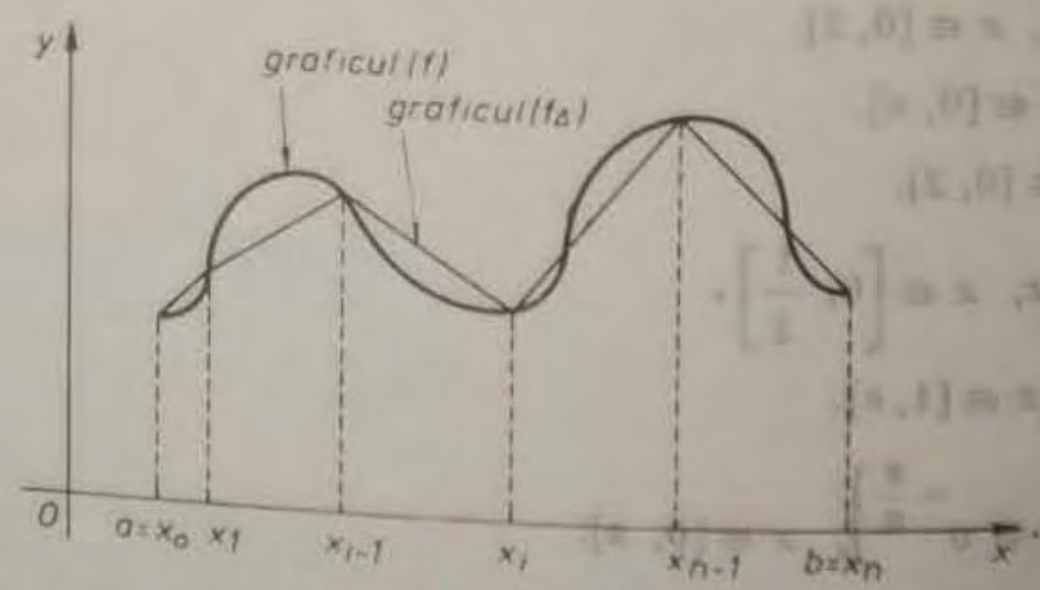


Fig. III.14

Distanța dintre punctele A_{i-1} și A_i este (aplicând teorema lui Pitagora):

$$d(A_{i-1}, A_i) = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.$$

3.3. Definiție. Numărul pozitiv

$$l(f_\Delta) \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{n} d(A_{i-1}, A_i)$$

se numește **lungimea** graficului funcției poligonale f_Δ.

3.4. *Observație.* Dacă Δ, Δ' sunt diviziuni ale intervalului $[a, b]$ și $\Delta \subset \Delta'$, atunci

$$l(f_\Delta) \leqslant l(f_{\Delta'}).$$

Ținând seama că orice diviziune Δ' mai fină ca Δ se obține prin adăugarea la Δ a noi puncte de diviziune, este suficient să considerăm cazul în care Δ' se obține din Δ prin adăugarea unui singur punct $c \in (x_{j-1}, x_j)$:

$$\Delta = (a = x_0 < \ldots < x_{j-1} < x_j < \ldots < x_n = b),$$

iar

$$\Delta' = (a = x_0 < \ldots < x_{j-1} < c < x_j < \ldots < x_n = b).$$

Notînd cu B punctul de coordonate $(c, f(c))$ avem (fig. III.15):

$$d(A_{j-1}, A_j) \leqslant d(A_{j-1}, B) + d(B, A_j),$$

deci

$$l(f_\Delta) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} d(A_{i-1}, A_i) + d(A_{j-1}, A_j) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} d(A_{i-1}, A_i) + d(A_{j-1}, B) + d(B, A_j) = l(f_{\Delta'}).$$

3.5. Definiție. Spunem că graficul unei funcții continui $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ **are lungime finită** dacă există o constantă $M \geqslant 0$ astfel încât

$$l(f_\Delta) \leqslant M,$$

pentru orice diviziune Δ a intervalului $[a, b]$.

În acest caz marginea superioară a mulțimii

$$\{l(f_\Delta) \mid \Delta \text{ diviziune a lui } [a, b]\}$$

este $< \infty$. Numărul real pozitiv

$$l(f_\Delta) \overset{def}{=} \sup\{l(f_\Delta) \mid \Delta \text{ diviziune a lui } [a, b]\}$$

se numește **lungimea** graficului funcției f.

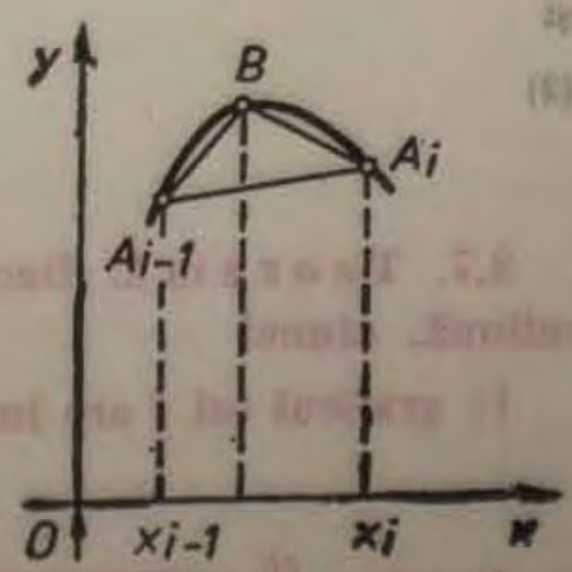


Fig. III.15

3.6. *Observaţie.* Dacă graficul lui f are lungime finită, atunci există un şir de diviziuni $(\Delta_n)_{n\in N}$ ale intervalului $[a, b]$ astfel încât

(1) $$\lim_{n\to\infty} \| \Delta_n \| = 0$$

şi

(2) $$\lim_{n\to\infty} l(f_{\Delta_n}) = l(f).$$

Într-adevăr, pentru orice $n \geqslant 1$ avem

$$l(f) - \frac{1}{n} < l(f) = \text{cel mai mic majorant al mulţimii } \{l(f_\Delta)\}_\Delta,$$

deci $l(f) - \frac{1}{n}$ nu este majorant pentru această mulţime, adică există o diviziune $\bar{\Delta}_n$ a lui $[a, b]$ astfel încât

(3) $$l(f) - \frac{1}{n} < l(f_{\bar{\Delta}_n}) \leqslant l(f)$$

(a doua inegalitate rezultînd din faptul că $l(f)$ este majorant pentru mulţimea $\{l(f_\Delta)\}_\Delta$). Din (3) rezultă

(4) $$l(f) = \lim_{n\to\infty} l(f_{\bar{\Delta}_n}).$$

Luând, pentru fiecare $n \geqslant 1$, o diviziune Δ_n cu proprietăţile

$$\bar{\Delta}_n \subset \Delta_n$$

şi

$$\| \Delta_n \| \leqslant \frac{1}{n},$$

rezultă (observaţia 3.4) că:

(5) $$l(f_{\bar{\Delta}_n}) \leqslant l(f_{\Delta_n}) \quad (\leqslant l(f))$$

şi

(1) $$\lim_{n\to\infty} \| \Delta_n \| = 0.$$

Din (4) şi (5) rezultă că şirul $\{l(f_{\Delta_n})\}_{n\in N}$ este convergent

şi

(2) $$\lim_{n\to\infty} l(f_{\Delta_n}) = l(f).$$

3.7. Teoremă. Dacă funcţia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ este derivabilă, cu derivata continuă, atunci

1) graficul lui f are lungime finită

şi

2) $l(f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$

Demonstrație. Din ipoteză rezultă că funcția

$$x \to \sqrt{1 + (f'(x))^2}$$

este continuă, deci mărginită, adică există $M \geqslant 0$ astfel incît

$$\sqrt{1 + (f'(x))^2} \leqslant M, \quad (\forall)\ x \in [a, b].$$

Fie $\Delta = (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$ o diviziune oarecare a lui $[a, b]$ Aplicând teorema creșterilor finite lui f, pe fiecare interval $[x_{i-1}, x_i]$, $(1 \leqslant i \leqslant n)$ obținem un $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ astfel incât

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

deci

$$l(f_\Delta) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \cdot (x_i - x_{i-1}) \leqslant M \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = M(b - a),$$

oricare ar fi diviziunea Δ a intervalului $[a, b]$. În concluzie, graficul lui f are lungime finită.

Fie acum

$$\Delta_n = \left(a = x_0^n < x_1^n < \ldots < x_{p_n}^n = b\right), \quad n \in \mathbf{N},$$

un șir de diviziuni ale intervalului $[a, b]$ cu proprietățile (vezi observația 3.6)

$$\lim_{n \to \infty} \| \Delta_n \| = 0$$

și

(1) $$\lim_{n \to \infty} l(f_{\Delta_n}) = l(f).$$

Aplicând, ca mai sus, teorema creșterilor finite lui f pe fiecare interval $[x_{i-1}^n, x_i^n]$, obținem un $\xi_i^n \in [x_{i-1}^n, x_i^n]$ astfel incât

(2) $$f(x_i^n) - f(x_{i-1}^n) = f'(\xi_i^n)(x_i^n - x_{i-1}^n).$$

Notând $\xi^n = (\xi_1^n, \xi_2^n, \ldots, \xi_{p_n}^n)$ și ținând seamă de (2), obținem

$$l(f_{\Delta_n}) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i^n - x_{i-1}^n)^2 + (f(x_i^n) - f(x_{i-1}^n))^2} =$$

(3) $$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_i^n))^2} \cdot (x_i^n - x_{i-1}^n) = \sigma_{\Delta_n}(\sqrt{1 + (f')^2}, \xi^n).$$

Funcția $\sqrt{1 + (f')^2}$ fiind continuă, este integrabilă (teorema II.3.12), deci (observația II.2.11)

(4) $$\lim_{n \to \infty} \sigma_{\Delta_n}(\sqrt{1 + (f')^2}, \xi^n) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Din egalitățile (1), (3) și (4) obținem

$$l(f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

3.8. *Exemple*

α) Să se calculeze lungimea graficului funcţiei (fig. III.16)

$$f(x) = x^2, \quad x \in [-1, 1].$$

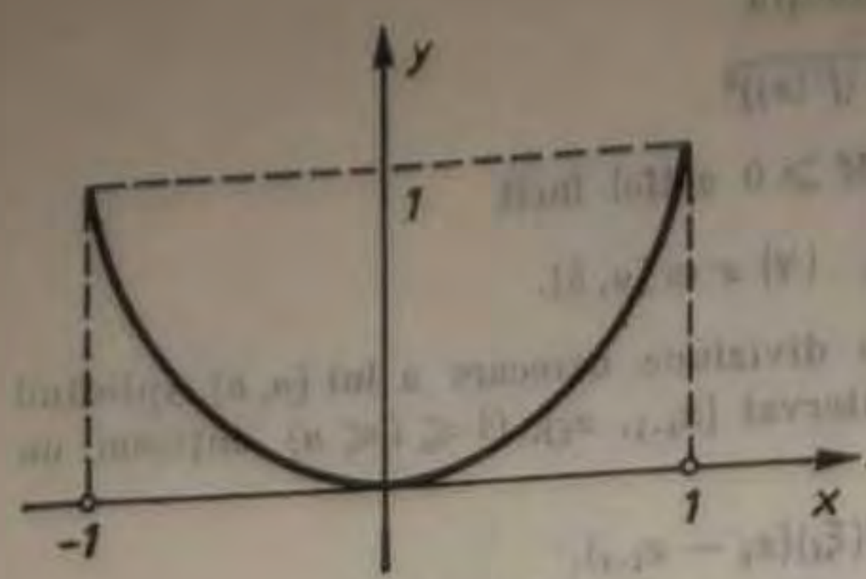


Fig. III.16

Datorită simetriei este suficient să calculăm lungimea graficului restricţiei f_0 a lui f la $[0, 1]$. Avem

$$l(f) = 2l(f_0) = 2\int_0^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx = 2\int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2}\,dx,$$

deci aplicând exerciţiul 2.2 (7) din capitolul I, obţinem

$$l(f) = 2\left[\frac{1}{2}\,2x\sqrt{1+4x^2} + \frac{1}{2}\ln\left(2x + \sqrt{1+4x^2}\right)\right]\Bigg|_0^1 = 2\sqrt{5} + \ln(2+\sqrt{5}).$$

β) Să se calculeze lungimea graficului funcţiei

$$f(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \ln\sqrt{x}, \quad x \in [1, e].$$

Avem

$$f'(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right),$$

deci

$$l(f) = \int_1^e \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}\,dx = \int_1^e \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}\right)}\,dx =$$

$$= \int_1^e \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2x}\right)^2}\,dx = \int_1^e \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + \ln x\right)\Bigg|_1^e =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{2} + 1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}(e^2 + 1).$$

γ) Să se calculeze lungimea astroidei (fig. III.17) de ecuaţie

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, \qquad (a > 0).$$

Prima bisectoare ($y = x$) intersectează (în primul cadran) astroida în punctul

$$M\left(2^{-\frac{3}{2}}a,\ 2^{-\frac{3}{2}}a\right).$$

Datorită simetriei avem egalităţile:

lungimea arcului $(\widehat{AM}) = \frac{1}{2}$ lungimea arcului $(\widehat{AMB}) = \frac{1}{8}$ lungimea astroidei,

deci este suficient să calculăm lungimea graficului funcţiei

$$f(x) = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}, \qquad x \in \left[2^{-\frac{3}{2}}a,\ a\right]$$

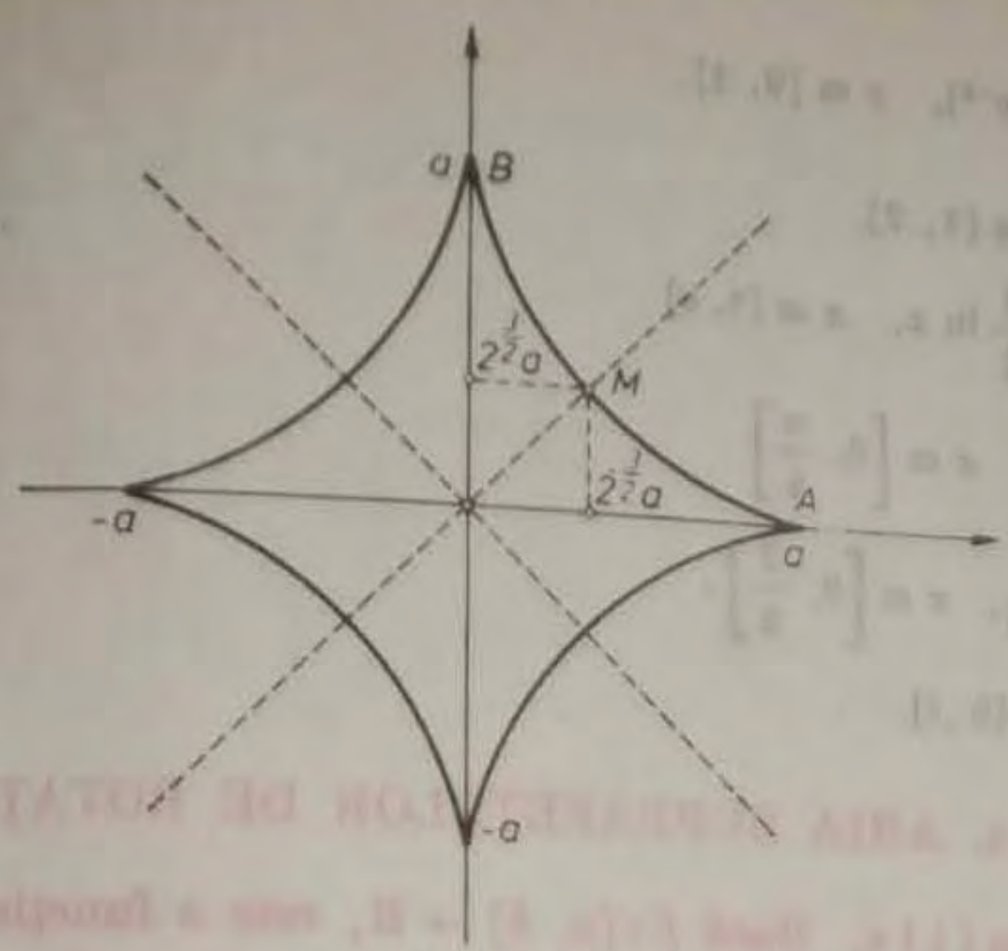


Fig. III.17

Derivând funcția f, obținem

$$f'(x) = \frac{3}{2}\left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-\frac{1}{3}} = -\frac{\left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}},$$

deci

$$\sqrt{1 + (f'(x))^2} = \sqrt{1 + \frac{a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}}{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2}} = \sqrt{\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{2}{3}}} = \left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{3}},$$

prin urmare

$$l(f) = \int_{2^{-\frac{3}{2}}a}^{a} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx = a^{\frac{1}{3}} \int_{2^{-\frac{3}{2}}a}^{a} x^{-\frac{1}{3}}\,dx =$$

$$= a^{\frac{1}{3}} \left.\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\right|_{2^{-\frac{3}{2}}a}^{a} = \frac{3}{2}a^{\frac{1}{3}}\left[a^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{a}{2^{\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{2}{3}}\right] = \frac{3}{4}a.$$

Așadar, lungimea astroidei este

$$8l(f) = 6a.$$

3.9. *Exerciții.* Să se calculeze lungimile graficelor următoarelor funcții:

1. $f(x) = \ln x, \quad x \in [\sqrt{3}, \sqrt{8}]$.

2. $f(x) = \ln(1 - x^2), \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

3. $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad x \in [0, 1]$.

4. $f(x) = \sqrt{x}, \quad x \in [1, 2]$.

5. $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x, \quad x \in [1, e]$

6. $f(x) = \ln \cos x, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

7. $f(x) = \ln \frac{1}{1 - x^2}, \quad x \in \left[0, \frac{2}{3}\right]$.

8. $f(x) = e^x, \quad x \in [0, 1]$.

§ 4. ARIA SUPRAFEȚELOR DE ROTAȚIE

4.1. Definiție. Dacă $f : [a, b] \to \mathbf{R}_+$ este o funcție continuă, atunci mulțimea

$$S_f \overset{\text{def}}{=} \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid \sqrt{y^2 + z^2} = f(x), \quad (\forall)\, x \in [a, b]\}$$

se numește suprafața de rotație determinată de funcția f (fig. III.18) sau suprafața obținută prin rotirea graficului funcției f în jurul axei Ox.

Am văzut în paragraful precedent cum se asociază lui f și fiecărei diviziuni $\Delta = (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$ a intervalului $[a, b]$ o funcție poligonală f_Δ. Considerăm acum suprafața de rotație $S(f_\Delta)$ determinată de funcția f_Δ.

4.2. *Observație.* Presupunând cunoscut faptul că aria laterală a unui trunchi de con de raze r_1, r_2 și generatoare g (fig. III.19) este dată de relația

$$\pi(r_1 + r_2)g,$$

putem calcula aria laterală a suprafeței de rotație $S(f_\Delta)$ determinată de funcția poligonală f_Δ.

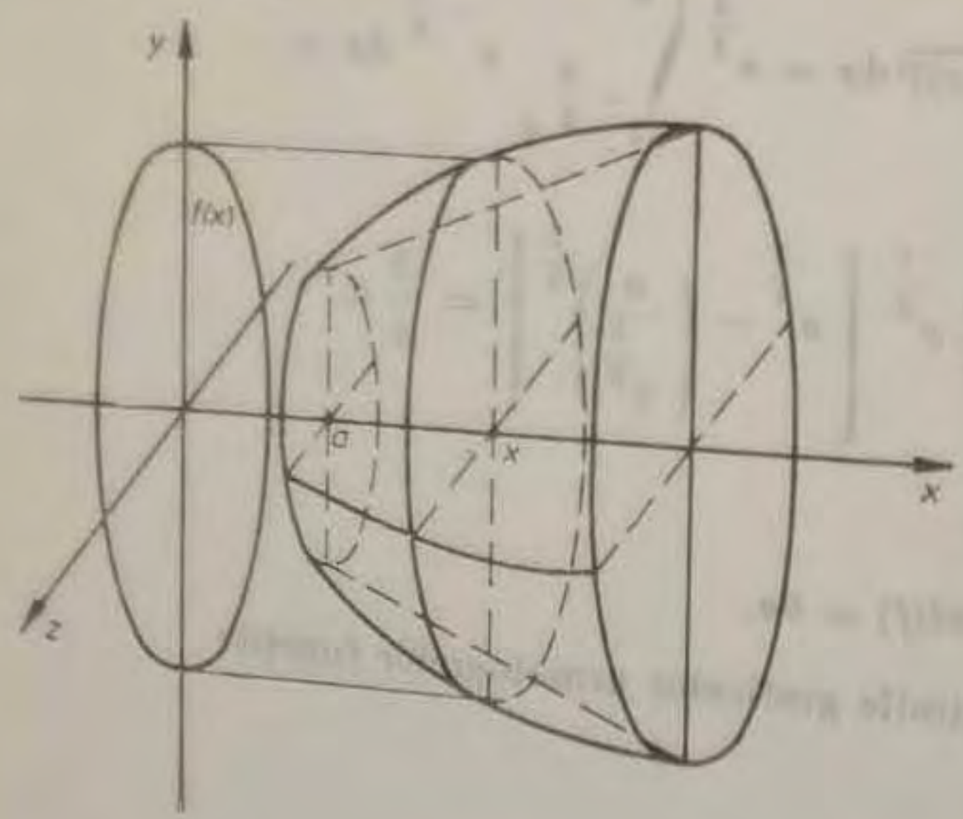


Fig. III.18

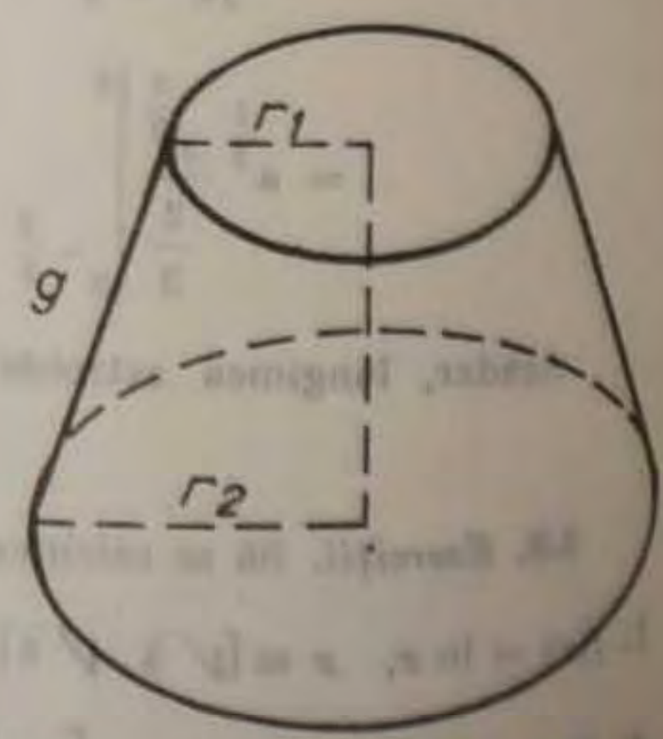


Fig. III.19

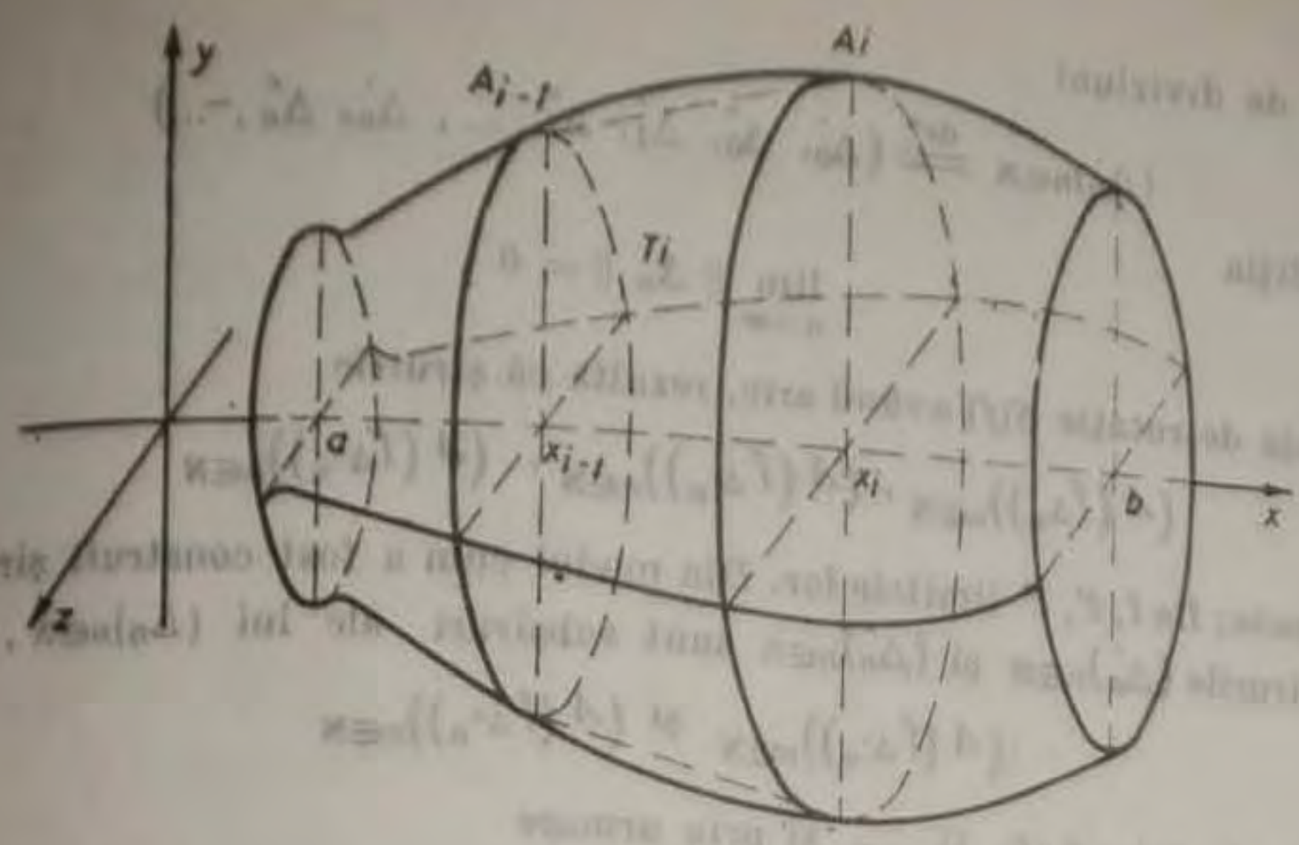


Fig. III.20

Într-adevăr, aria laterală a trunchiului de con T_i (fig. III.20) de raze $f(x_{i-1})$, $f(x_i)$ și generatoare $d(A_{i-1}, A_i)$ (distanța dintre A_{i-1} și A_i) fiind

$$\pi(f(x_{i-1}) + f(x_i)) \cdot d(A_{i-1}, A_i),$$

rezultă că aria laterală a suprafeței $S(f_\Delta)$ este

$$A(f_\Delta) = \pi \sum_{i=1}^{n} (f(x_{i-1}) + f(x_i)) \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.$$

După această observație putem defini ce înseamnă că o suprafață de rotație are arie, precum și aria laterală a unei astfel de suprafețe.

4.3. Definiție. Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}_+$ o funcție continuă. Spunem că suprafața de rotație $S(f)$ are arie, dacă oricare ar fi șirul de diviziuni $(\Delta_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ale intervalului $[a, b]$ astfel încât

$$\lim_{n\to\infty} \| \Delta_n \| = 0,$$

șirul

$$(A(f_{\Delta_n}))_{n\in\mathbf{N}}$$

al ariilor laterale ale suprafețelor de rotație $S(f_{\Delta_n})$ $(n\in\mathbf{N})$ este convergent în $\mathbf{R}$. În acest caz numărul real pozitiv

$$A(f) \overset{\text{def}}{=\!=} \lim_{n\to\infty} A(f_{\Delta_n})$$

se numește aria laterală a suprafeței de rotație $S(f)$.

4.4. *Observație.* Numărul real pozitiv $A(f)$ este corect definit, adică nu depinde de șirul de diviziuni $(\Delta_n)_{n\in\mathbf{N}}$ considerat.

Într-adevăr, fie $(\Delta_n')_{n\in\mathbf{N}}$ și $(\Delta_n'')_{n\in\mathbf{N}}$ două șiruri de diviziuni ale intervalului $[a, b]$ astfel încât

$$\lim_{n\to\infty} \| \Delta_n' \| = 0 = \lim_{n\to\infty} \| \Delta_n'' \|.$$

Atunci şirul de diviziuni

$$(\Delta_n)_{n\in\mathbf{N}} \overset{\text{def}}{=\!=} (\Delta_0', \Delta_0'', \Delta_1', \Delta_1'', \ldots, \Delta_n', \Delta_n'', \ldots)$$

verifică condiţia

$$\lim_{n\to\infty} \| \Delta_n \| = 0$$

deci, suprafaţa de rotaţie $S(f)$ având arie, rezultă că şirurile

$$(A(f_{\Delta_n}))_{n\in\mathbf{N}}, \ (A(f_{\Delta'_n}))_{n\in\mathbf{N}}, \ (A(f_{\Delta''_n}))_{n\in\mathbf{N}}$$

sunt convergente; fie l, l', l'' limitele lor. Din modul cum a fost construit şirul $(\Delta_n)_{n\in\mathbf{N}}$, se vede că şirurile $(\Delta_n')_{n\in\mathbf{N}}$ şi $(\Delta_n'')_{n\in\mathbf{N}}$ sunt subşiruri ale lui $(\Delta_n)_{n\in\mathbf{N}}$, deci şirurile

$$(A(f_{\Delta'_n}))_{n\in\mathbf{N}} \text{ şi } (A(f_{\Delta''_n}))_{n\in\mathbf{N}}$$

sunt subşiruri ale lui $(A(f_{\Delta_n}))_{n\in N}$ şi prin urmare

$$l' = l \quad \text{şi} \quad l'' = l,$$

adică

$$l' = l''.$$

4.5. Teoremă. Dacă $f : [a, b] \to \mathbf{R}_+$ este o funcţie derivabilă, cu derivata continuă, atunci

(α) suprafaţa de rotaţie determinată de f are arie şi

(β) $A(f) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$

Demonstraţie: Funcţia f fiind continuă pe intervalul închis şi mărginit $[a, b]$, verifică (vezi, cap. II, 3.10) condiţia (U), adică pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\eta_\varepsilon > 0$ astfel încât

(1) $$(\forall)\ x', x'' \in [a, b] \text{ cu } |x' - x''| < \eta_\varepsilon \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{4\pi l(f)},$$

unde $l(f)$ este lungimea graficului lui f.

Fie acum

$$\Delta_n = (a = x_0^n < x_1^n < \ldots < x_{p_n}^n = b) \qquad (n \in \mathbf{N})$$

un şir de diviziuni ale intervalului $[a, b]$ astfel încât $\lim_{n\to\infty} \| \Delta_n \| = 0$. Atunci există un $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ astfel încât

$$\| \Delta_n \| < \eta_\varepsilon, \quad (\forall)\ n \geqslant n_\varepsilon.$$

Aplicând teorema creşterilor finite lui f pe fiecare interval $[x_{i-1}^n, x_i^n]$, obţinem un $\xi_i^n \in (x_{i-1}^n, x_i^n)$ cu proprietatea

(2) $$f(x_i^n) - f(x_{i-1}^n) = f'(\xi_i^n) \cdot (x_i^n - x_{i-1}^n).$$

Atunci

$$\lim \sigma_{\Delta_n}(f\sqrt{1 + (f')^2}, \xi_i^n) = \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx,$$

deci există $n_\varepsilon'' \in \mathbf{N}$ astfel încât

(3) $$\left| \sigma_{\Delta_n}(f\sqrt{1 + (f')^2}, \xi_i^n) - \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

oricare ar fi $n \geqslant n_\varepsilon''$.

Deşi aria laterală a lui $S(f_{\Delta_n})$

$$A(f_{\Delta_n}) = \pi \sum_{i=1}^{p_n} (f(x_{i-1}^n) + f(x_i^n)) \sqrt{1 + (f'(\xi_i^n))^2}\,(x_i^n - x_{i-1}^n)$$

nu reprezintă suma Riemann

$$\sigma_{\Delta_n}(2\pi f \sqrt{1 + (f')^2}, \xi_i^n) = 2\pi \sum_{i=1}^{p_n} f(\xi_i^n) \sqrt{1 + (f'(\xi_i^n))^2}\,(x_i^n - x_{i-1}^n),$$

vom arăta totuşi că diferenţa lor în modul este mai mică decît $\frac{\varepsilon}{2}$.

Fie $n \geqslant n_\varepsilon \overset{\text{def}}{=\!=} \max(n_\varepsilon', n_\varepsilon'')$. Atunci

$$|x_{i-1}^n - \xi_i^n|, |x_i^n - \xi_i^n| \leqslant x_i^n - x_{i-1}^n < \|\Delta_n\| < \eta_\varepsilon,$$

deci, ţinînd seamă de (1), obţinem

$$|f(x_{i-1}^n) - f(\xi_i^n)| < \frac{\varepsilon}{4\pi l(f)}$$

şi

$$|f(x_i^n) - f(\xi_i^n)| < \frac{\varepsilon}{4\pi l(f)},$$

de unde

$$|f(x_{i-1}^n) + f(x_i^n) - 2f(\xi_i^n)| < \frac{\varepsilon}{2\pi l(f)}, \quad (\forall)\ n \geqslant n_\varepsilon. \tag{4}$$

Folosind inegalitatea (4), obţinem

$$\left| A(f_{\Delta_n}) - \sigma_{\Delta_n}(2\pi f \sqrt{1 + (f')^2}, \xi_i^n) \right| =$$

$$= \left| \pi \sum_{i=1}^{p_n} (f(x_{i-1}^n) + f(x_i^n) - 2f(\xi_i^n)) \sqrt{1 + (f'(\xi_i^n))^2}\,(x_i^n - x_{i-1}^n) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \pi \sum_{i=1}^{p_n} |f(x_{i-1}^n) + f(x_i^n) - 2f(\xi_i^n)| \sqrt{1 + (f'(\xi_i^n))^2}\,(x_i^n - x_{i-1}^n) <$$

$$< \pi \frac{\varepsilon}{2\pi l(f)} \sum_{i=1}^{p_n} \sqrt{1 + (f'(\xi_i^n))^2}\,(x_i^n - x_{i-1}^n) = \frac{\varepsilon}{2l(f)}\, l(f_{\Delta_n}) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2l(f)} \cdot l(f) = \frac{\varepsilon}{2}, \quad (\forall)\ n \geqslant n_\varepsilon.$$

Din această inegalitate şi inegalitatea (3) rezultă că, pentru orice $n \geqslant n_\varepsilon$,

$$\left| A(f_{\Delta_n}) - 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| A(f_{\Delta_n}) - \sigma_{\Delta_n}(2\pi f \sqrt{1 + (f')^2}, \xi_i^n) \right| +$$

$$+ \left| \sigma_{\Delta_n}(2\pi f \sqrt{1 + (f')^2}, \xi_i^n) - 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx \right| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad (\forall) n \geqslant n_\varepsilon,$$

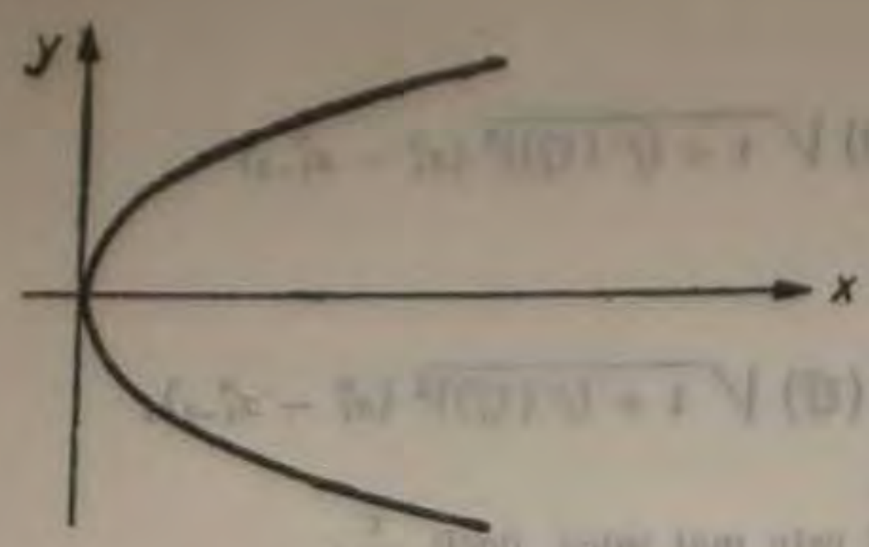


Fig. III.21

deci

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}\left(2\pi f\sqrt{1+(f'(x))^2},\ \xi_i^n\right)$$

există şi este egală cu

$$2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

Cum aceasta are loc pentru orice şir de diviziuni $(\Delta_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ale lui $[a, b]$ de normă tinzând la zero, rezultă (definiţia 4.3) că suprafaţa de rotaţie determinată de f are arie şi

$$A(f) = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

4.6. *Observaţie.* Considerând parabola de ecuaţie

$$y^2 = 2ax,\ (a > 0)$$

se observă că panta tangentei la parabolă în origine este infinită (fig. III.21), adică funcţia

$$f(x) = \sqrt{2ax},\quad x \in [0, \infty)$$

nu este derivabilă în 0. Ţinînd seamă de această observaţie şi de faptul că integrala

$$\int_a^b g(x)\,dx$$

a fost definită pentru funcţii *g definite pe întregul interval* $[a, b]$, rezultă că, în cazul considerat, nu se poate vorbi de

$$\int_0^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

Totuşi, se observă (intuitiv) că această suprafaţă de rotaţie are arie. În observaţia care urmează vom încerca să arătăm că au arie şi suprafeţele de rotaţie determinate de funcţii f care nu sunt neapărat derivabile la capetele intervalului $[a, b]$, dar pentru care funcţia $f\sqrt{1+(f')^2}$ are limită finită în punctele a şi b.

4.7. *Observaţie.* Să considerăm funcţia $f:[a, b] \to \mathbf{R}_+$ cu proprietăţile:

(c_1) f este derivabilă, cu derivata continuă pe (a, b),

(c_2) funcţia $f\sqrt{1+(f')^2}$ are limite finite în punctele a şi b.

În acest caz funcţia $f\sqrt{1+(f')^2}$ poate fi prelungită la o funcţie continuă $h:[a, b] \to \mathbf{R}_+$. Într-adevăr, dacă y_a (respectiv y_b) este limita funcţiei $f\sqrt{1+(f')^2}$ în punctul a (respectiv b), atunci definim funcţia $h:[a, b] \to \mathbf{R}_+$ prin egalitatea

$$h(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} y_a, & \text{dacă } x = a, \\ f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}, & \text{dacă } x \in (a, b), \\ y_b, & \text{dacă } x = b. \end{cases}$$

Funcţia h are următoarele proprietăţi:

(α) restricţia lui h la (a, b) coincide cu $f\sqrt{1+(f')^2}$;

(β) $\lim\limits_{x\to a} h(x) = y_a = h(a)$;

(γ) $\lim\limits_{x\to b} h(x) = y_b = h(b)$.

Din (β) și (γ) rezultă că h este continuă în punctele a și b, iar din ipoteza (c_1) și proprietatea (α) rezultă continuitatea lui h pe (a, b); deci h este continuă pe întregul interval închis $[a, b]$, prin urmare h este *integrabilă* pe $[a, b]$.

Observăm că, în cursul demonstrației teoremei 4.5, nu s-a utilizat nicăieri nici $f'(a)$ și nici $f'(b)$, ci numai $f'(\xi_i^n)$, unde $\xi_i^n \in (x_{i-1}^n, x_i^n) \subset (a, b)$ au fost obținuți aplicând teorema creșterilor finite.

Pe de altă parte, ținând seama de proprietatea (α) a lui f, rezultă că pentru acești ξ_i^n, avem

$$\sigma_{\Delta_n}(2\pi f\sqrt{1 + (f')^2}, \xi_i^n) = \sigma_{\Delta_n}(2\pi h, \xi_i^n),$$

deci se obține inegalitatea (cu notațiile din demonstrația teoremei 4.5)

$$|A(f_{\Delta_n}) - \sigma_{\Delta_n}(2\pi h, \xi_i^n)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \ (\forall)\, n \geqslant n_\varepsilon.$$

Însă

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}(2\pi h, \xi_i^n) = 2\pi \int_a^b h(x)\mathrm{d}x,$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} A(f_{\Delta_n}) \text{ există} = 2\pi \int_a^b h(x)\mathrm{d}x.$$

Așadar, putem formula următorul rezultat:

4.8. Teoremă. **Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ este o funcție derivabilă, cu derivata continuă pe (a, b) astfel încât funcția $f\sqrt{1 + (f')^2}$ are limite finite în punctele a și b, atunci suprafața de rotație determinată de f are arie și**

$$A(f) = 2\pi \int_a^b h(x)\mathrm{d}x,$$

unde h este prelungirea (prin continuitate) a lui $f\sqrt{1 + (f')^2}$ la intervalul închis $[a, b]$.

4.9. ***Exemple***

α) Să se calculeze aria suprafeței de rotație determinată de funcția

$$f(x) \overset{\text{def}}{=} \sin x, \ x \in [0, \pi), \text{ (fig. III.22).}$$

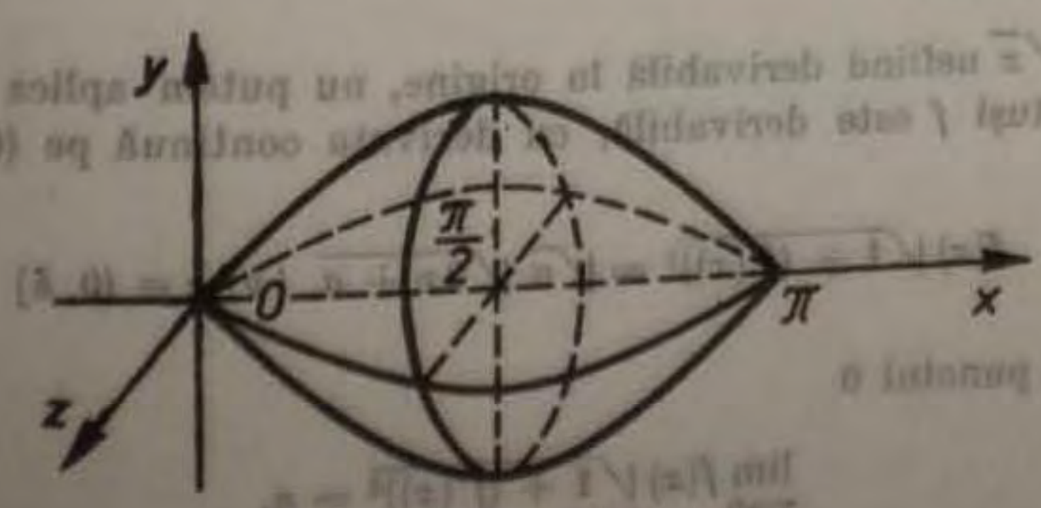


Fig. III.22

Funcția $x \to \sin x$ este derivabilă, cu derivata continuă pe toată mulțimea $\mathbf{R}$, deci f satisface condițiile teoremei 4.5. Datorită simetriei, este suficient să se calculeze aria suprafeței determinate de restricția f_0 a lui f la intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Deci

$$A(f) = 2A(f_0) = 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x}\, dx.$$

Făcînd schimbarea de variabilă

$$u = \varphi(x) \overset{\text{def}}{=} \cos x, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

obținem

$$\varphi(0) = 1, \ \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

și

$$(1) \qquad A(f) = -4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \varphi^2(x)} \cdot \varphi'(x) dx =$$

$$= -4\pi \int_1^0 \sqrt{1 + u^2} du = 4\pi \int_0^1 \sqrt{1 + u^2}\, du.$$

O primitivă a funcției $u \to \sqrt{1 + u^2}$ este funcția (vezi cap. I, exemplul 2.2 (7)):

$$(2) \qquad F(u) = \frac{1}{2}\left[u\sqrt{1 + u^2} + \ln(u + \sqrt{1 + u^2})\right].$$

Din relațiile (1), (2) și formula Leibniz-Newton, obținem:

$$A(f) = 2\pi \left[u\sqrt{1 + u^2} + \ln\left(u + \sqrt{1 + u^2}\right)\right]_0^1 =$$

$$= 2\pi\left[\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})\right].$$

β) Să se calculeze aria suprafeței de rotație determinată de funcția

$$f(x) \overset{\text{def}}{=} \sqrt{2ax}, \quad x \in [0, b] \ (a > 0)$$

(paraboloid de rotație).

Funcția $x \to \sqrt{x}$ nefiind derivabilă în origine, nu putem aplica teorema 4.5 (vezi observația 4.6). Totuși f este derivabilă, cu derivata continuă pe $(0, b]$, iar funcția

$$f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2} = \sqrt{a}\sqrt{2x + a}, \ (\forall)\ x \in (0, b]$$

are limită finită în punctul 0

$$\lim_{x \to 0} f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2} = a,$$

deci funcția $h:[0, b] \to \mathbf{R}_+$ definită prin

$$h(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} a, & \text{dacă } x = 0, \\ f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}, & \text{dacă } x \in (0, b] \end{cases}$$

este continuă pe $[0, b]$.

Aplicând teorema 4.8, rezultă că suprafața de rotație determinată de funcția

$$f(x) = \sqrt{2ax}, \quad x \in [0, b]$$

are arie

$$A(f) = 2\pi \int_0^b h(x)\mathrm{d}x = 2\pi\sqrt{a}\int_0^b \sqrt{2x + a}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \pi\sqrt{a}\int_0^b (2x + a)^{\frac{1}{2}}(2x + a)'\mathrm{d}x = \pi\sqrt{a}\,\frac{(2x + a)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^b =$$

$$= \frac{2\pi\sqrt{a}}{3}\left[(a + 2b)^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}}\right].$$

γ) Să se calculeze aria suprafeței (fig.III.23) obținute prin rotirea în jurul axei Ox a elipsei de ecuație

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (a > b > 0)$$

Deci se cere să se calculeze aria suprafeței de rotație determinată de funcția

$$f(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad x \in [-a, a].$$

Derivând în egalitatea

$$f^2(x) = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2,$$

obținem

$$f(x)f'(x) = -\frac{b^2}{a^2}x,$$

deci

$$A(f) = 2\pi\int_{-a}^{a} f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= 2\pi\int_{-a}^{a}\sqrt{f^2(x) + (f(x)f'(x))^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= 2\pi\int_{-a}^{a}\sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 + \frac{b^4}{a^4}x^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{2\pi b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}x^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{2\pi b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2 - e^2x^2}\,\mathrm{d}x.$$

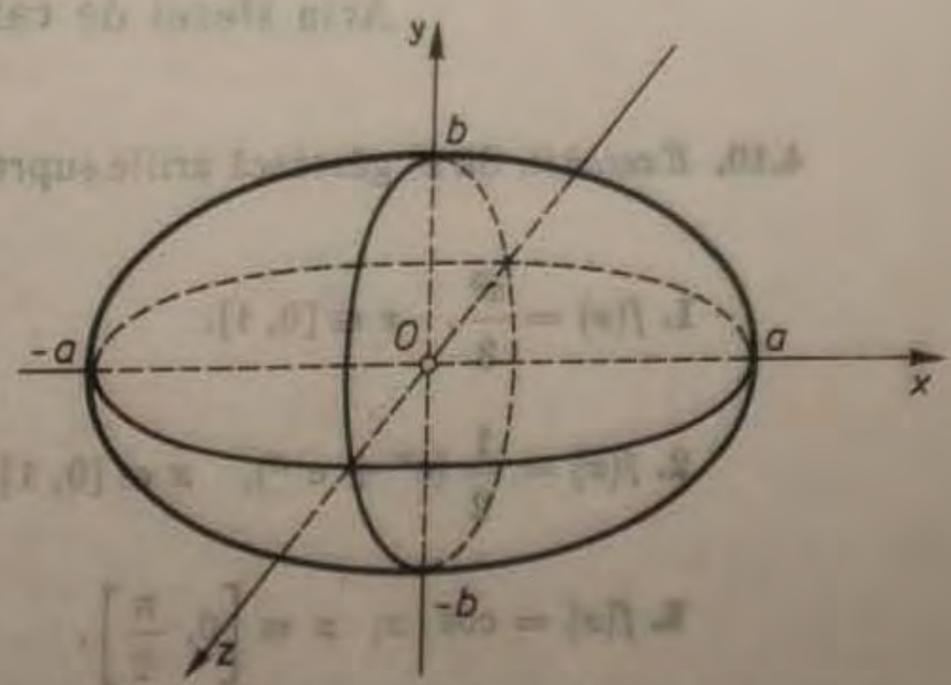


Fig. III.23

Numărul pozitiv

$$e \overset{\text{def}}{=} \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{c}{a}$$

se numeşte *excentricitatea elipsei.*

Funcţia $x \to \sqrt{a^2 - (ex)^2}$ fiind pară, avem (vezi cap. II, observaţia 4.16)

$$A(f) = \frac{4\pi b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - (ex)^2}\, dx = \frac{4\pi be}{a} \int_0^a \sqrt{\left(\frac{a}{e}\right)^2 - x^2}\, dx.$$

Se ştie (vezi cap. I, exemplul 3.5 (2)) că o primitivă a funcţiei $x \to \sqrt{\alpha^2 - x^2}$ este funcţia

$$F(x) = \frac{1}{2}\left[\alpha^2 \arcsin \frac{x}{\alpha} + x\sqrt{\alpha^2 - x^2}\right].$$

Deci

$$A(f) = \frac{2\pi be}{a}\left[\left(\frac{a}{e}\right)^2 \arcsin \frac{x}{\frac{a}{e}} + x\sqrt{\left(\frac{a}{e}\right)^2 - x^2}\right]\Bigg|_0^a =$$

$$= \frac{2\pi be}{a}\left[\left(\frac{a}{e}\right)^2 \arcsin e + a\sqrt{\left(\frac{a}{e}\right)^2 - a^2}\right] =$$

$$= \frac{2\pi be}{a}\left[\left(\frac{a}{e}\right)^2 \arcsin e + \frac{a^2}{e}\sqrt{1 - e^2}\right] =$$

$$= 2\pi ab\left[\frac{\arcsin e}{e} + \sqrt{1 - e^2}\right].$$

Observăm că dacă b tinde către a, atunci excentricitatea elipsei tinde la zero şi elipsa devine un cerc de rază a. În acest caz

$$\lim_{e \to 0} \frac{\arcsin e}{e} = 1$$

şi

Aria sferei de rază a este $4\pi a^2$.

4.10. *Exerciţii.* Să se găsească ariile suprafeţelor de rotaţie determinate de funcţiile:

1. $f(x) = \dfrac{x^3}{3}$, $x \in [0, 1]$.

2. $f(x) = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $x \in [0, 1]$.

3. $f(x) = \cos x$, $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

4. $f(x) = e^x$, $x \in [0, 1]$.

5. $f(x) = b + \sqrt{a^2 - x^2}$, $x \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$.

6. $f(x) = 2\sqrt{1 - x^2}$, $x \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$.

7. $f(x) = \frac{x}{4}\sqrt{1 - x^2}$, $x \in [0, 1]$.

8. $f(x) = \frac{1}{3\sqrt{a}}\sqrt{x(3a - x)^2}$, $x \in [0, 3a]$.

§ 5. CALCULUL APROXIMATIV AL INTEGRALELOR DEFINITE

Am văzut în capitolul II (teorema 2.12) că dacă $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ este o funcție integrabilă, care admite primitive, atunci integrala definită a lui f poate fi calculată cu ajutorul formulei lui Leibniz-Newton:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a),$$

unde F este o primitivă a lui f.

În cazul funcțiilor integrabile care nu au primitive (astfel de funcții există, vezi exemplul II.2.13), sau al funcțiilor care au primitive, dar acestea sînt greu de calculat (de exemplu: nu se pot exprima cu ajutorul unor funcții elementare cunoscute), nu putem utiliza formula Leibniz-Newton. În asemenea situații trebuie recurs la alte metode. De obicei se folosesc metode de aproximare a integralei prin anumite sume $\sigma(f, \Delta)$ asociate unor diviziuni particulare Δ ale intervalului $[a, b]$.

Atunci când folosim o anumită metodă de aproximare a integralei $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, trebuie să cunoaștem, în funcție de diviziunea aleasă Δ, cât de mare poate fi diferența (în valoare absolută) dintre integrala $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ și suma $\sigma(f, \Delta)$ asociată diviziunii Δ.

Dacă se lucrează cu diviziuni *echidistante*, adică diviziuni:

$$\Delta_n = (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$$

la care distanța dintre oricare două puncte consecutive este aceeași

$$x_i - x_{i-1} = \frac{b - a}{n}, \quad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

atunci problema de mai sus poate fi reformulată astfel:

„Dat fiind un $\varepsilon > 0$, cât de mare trebuie să fie n pentru ca eroarea care o facem, atunci când luăm $\sigma(f, \Delta_n)$ în loc de $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, să fie mai mică decât ε?"

5.1. *Metoda dreptunghiurilor.* Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție integrabilă, $\Delta_n = (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$ o diviziune echidistantă a intervalului $[a, b]$ și drept puncte „intermediare" luăm punctele $x_1, x_2, \ldots, x_n$, adică în

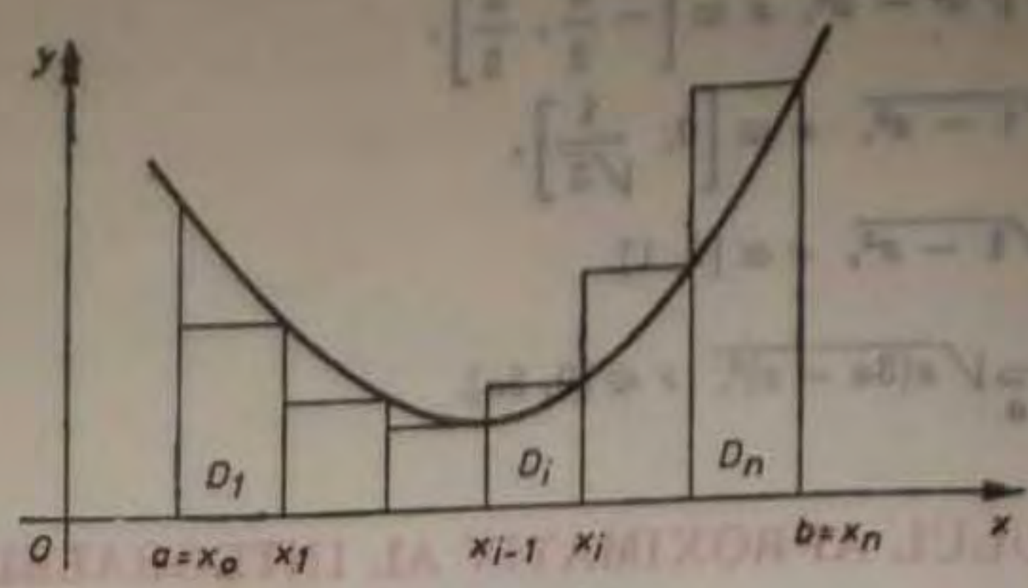


Fig. III.24

fiecare interval $[x_{i-1}, x_i]$, drept punct „intermediar" luăm extremitatea din dreapta a acestui interval. Atunci

$$(1) \qquad \sigma_{\Delta_n}(f, x_i) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) = \frac{b-a}{n}[f(x_1) + \ldots + f(x_n)].$$

Întrucât această sumă depinde numai de f şi de n, o vom nota simplu prin $D_n(f)$.

În cazul particular, când f este pozitivă, suma $D_n(f)$ reprezintă suma ariilor dreptunghiurilor $D_1, D_2, \ldots, D_n$, unde (fig. III.24)

$$D_i \overset{\text{def}}{=\!=} [x_{i-1}, x_i] \times [0, f(x_i)] = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i;\ 0 \leqslant y \leqslant f(x_i)\}.$$

Aşadar, când f este pozitivă,

$$D_n(f) = \sum_{i=1}^{n} \text{aria } (D_i).$$

Din acest motiv, metoda de aproximare a integralei definite a unei funcţii integrabile prin suma $D_n(f)$ se numeşte metoda dreptunghiurilor.

5.2. Estimarea erorii în metoda dreptunghiurilor. Dacă $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ este o funcţie derivabilă, cu derivata continuă, atunci

$$\left| \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - D_n(f) \right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{n} M(f'),$$

unde

$$M(f') \overset{\text{def}}{=\!=} \sup_{x \in [a, b]} |f'(x)|.$$

Demonstraţie. Fie ca mai sus

$$\Delta_n = (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b),$$

$$x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}, \quad (\forall)\ i = 1, \ldots, n$$

şi

$$D_n(f) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$

Notând, ca de obicei,

$$m_i \overset{\text{def}}{=} \inf \{ f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i] \},$$

$$M_i \overset{\text{def}}{=} \sup \{ f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i] \}$$

și ținând seamă că funcția f este continuă (fiind derivabilă), rezultă că f este mărginită și își atinge marginile pe intervalul închis și mărginit $[x_{i-1}, x_i]$. Deci există $u_i, v_i \in [x_{i-1}, x_i]$ astfel încât

(1) $$m_i = f(u_i), \; M_i = f(v_i).$$

Aplicând teorema creșterilor finite lui f, obținem un punct ξ_i cuprins între u_i și v_i astfel încât

(2) $$f(v_i) - f(u_i) = f'(\xi_i)(v_i - u_i).$$

Având

$$m_i \leqslant f(\xi_i) \leqslant M_i$$

rezultă

(3) $$\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \leqslant \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}),$$

adică (vezi cap. II, propoziția 3.3 (i)).

(4) $$s_{\Delta_n}(f) \leqslant D_n(f) \leqslant S_{\Delta_n}(f).$$

Ținînd seamă de relațiile (1) — (4) și de inegalitatea

$$| v_i - u_i | \leqslant x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n},$$

obținem

(5) $$S_{\Delta_n}(f) - s_{\Delta_n}(f) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} [f(v_i) - f(u_i)] = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f'(\xi_i)(v_i - u_i) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} | f'(\xi_i) | \cdot (v_i - u_i) \leqslant \frac{(b-a)^2}{n^2} n M(f') = \frac{(b-a)^2}{n} M(f').$$

Pe de altă parte (vezi cap. II, relația (3) din demonstrația teoremei 3.7)

(6) $$s_{\Delta_n}(f) \leqslant \int^b f(x) \leqslant S_{\Delta_n}(f).$$

Din (4), (5) și (6) obținem

$$\left| \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - D_n(f) \right| \leqslant S_{\Delta_n}(f) - s_{\Delta_n}(f) \leqslant \frac{(b-a)^2}{n} M(f').$$

5.3. ***Metoda trapezelor.*** **Această metodă constă în aproximarea integralei** $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ **prin suma**

$$T_n(f) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] \cdot (x_i - x_{i-1}) = \frac{b-a}{2n} \left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) \right],$$

când

$$x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n}(b-a), \; (1 \leqslant i \leqslant n).$$

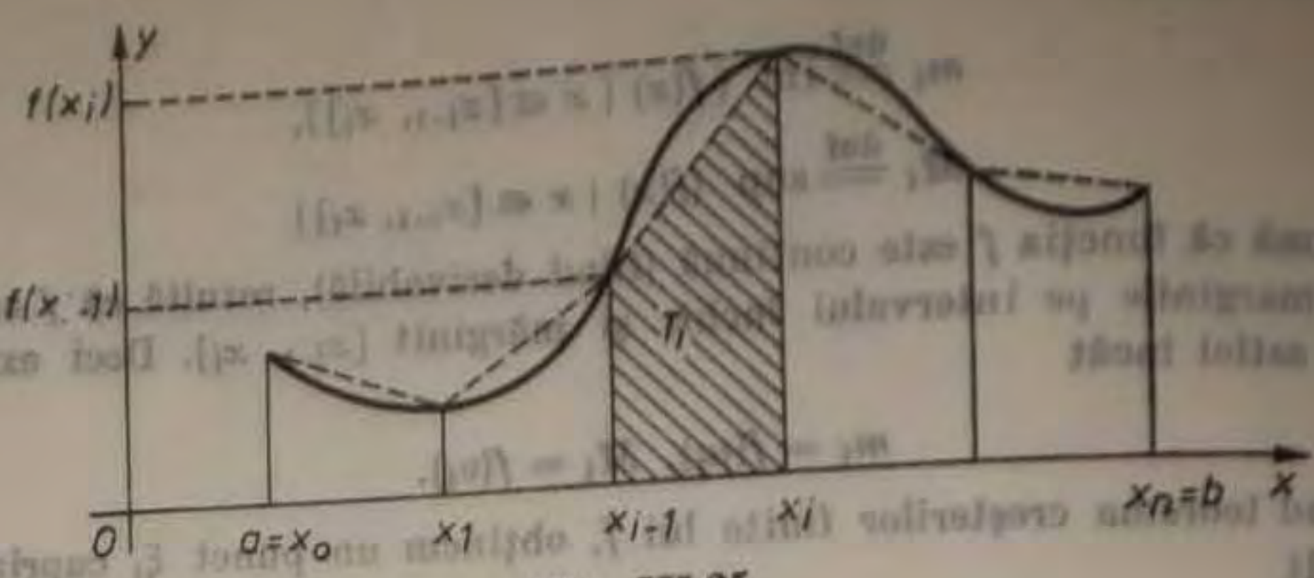


Fig. III.25

Dacă funcţia f este pozitivă ($f(x) \geqslant 0$, $(\forall)\ x \in [a, b]$), atunci această problemă revine la aproximarea ariei mulţimii

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$$

(cuprinse între axa Ox, graficul lui f şi dreptele paralele la Oy, care taie axa Ox în punctele a şi b respectiv) prin suma ariilor trapezelor T_i (fig. III.25)

$$\text{aria } T(_i) = \frac{1}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)]\,(x_i - x_{i-1}) = \frac{b-a}{2n}[f(x_{i-1}) + f(x_i)].$$

Deci, dacă f este pozitivă, atunci

$$T_n(f) = \sum_{i=1}^{n} \text{aria}\,(T_i) = \frac{b-a}{2n}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j)\right].$$

5.4. Estimarea erorii în metoda trapezelor

Dacă $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ este o funcţie de două ori derivabilă, cu derivata a doua f'' continuă, atunci

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - T_n(f)\right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12n^2} M(f''),$$

unde

$$M(f'') \overset{\text{def.}}{=} \sup_{x \in [a,\, b]} |\, f''(x)\, |.$$

Demonstraţie. Pentru orice $\alpha, \beta \in [a, b]$, cu $\alpha < \beta$, definim funcţia $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ prin egalitatea

(1) $$g(t) = \frac{1}{2}(t - \alpha)(t - \beta).$$

Atunci

(2) $$g(\alpha) = g(\beta) = 0,$$

$$g'(t) = \frac{1}{2}[2t - (\alpha + \beta)].$$

(3) $$\begin{cases} g'(\alpha) = \dfrac{1}{2}(\alpha - \beta), \\ g'(\beta) = \dfrac{1}{2}(\beta - \alpha), \end{cases}$$

(4) $$g''(t) = 1.$$

Aplicând de două ori formula de integrare prin părţi şi ţinând seamă de relaţiile (1) – (4), obţinem:

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f(t)g''(t)dt = f(t)g'(t)\Big|_\alpha^\beta - f'(t)g(t)\Big|_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta f''(t)g(t)dt =$$

$$= f(\beta)\frac{1}{2}(\beta-\alpha) - f(\alpha)\frac{1}{2}(\alpha-\beta) + \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f''(t)(t-\alpha)(t-\beta)dt =$$

$$= \frac{1}{2}[f(\alpha)+f(\beta)](\beta-\alpha) + \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f''(t)\,(t-\alpha)\,(t-\beta)dt,$$

de unde

$$\left|\int_\alpha^\beta f(t)\,dt - \frac{1}{2}[f(\alpha)+f(\beta)](\beta-\alpha)\right| = \frac{1}{2}\left|\int_\alpha^\beta f''(t)(t-\alpha)(t-\beta)dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta |f''(t)|\cdot|t-\alpha|\cdot|t-\beta|\,dt \leqslant \frac{M(f'')}{2}\int_\alpha^\beta (t-\alpha)(\beta-t)dt.$$

Însă

$$\int_\alpha^\beta (t-\alpha)\,(\beta-t)dt = \int_\alpha^\beta (t-\alpha)\,[(\beta-\alpha)-(t-\alpha)]dt =$$

$$= (\beta-\alpha)\int_\alpha^\beta (t-\alpha)\,dt - \int_\alpha^\beta (t-\alpha)^2\,dt = (\beta-\alpha)\frac{(t-\alpha)^2}{2}\Big|_\alpha^\beta - \frac{(t-\alpha)^3}{3}\Big|_\alpha^\beta =$$

$$= \frac{(\beta-\alpha)^3}{2} - \frac{(\beta-\alpha)^3}{3} = \frac{(\beta-\alpha)^3}{6},$$

deci

$$\left|\int_\alpha^\beta f(t)dt - \frac{1}{2}[f(\alpha)+f(\beta)](\beta-\alpha)\right| \leqslant \frac{(\beta-\alpha)^3}{12}M\,(f''). \tag{5}$$

Aplicând egalitatea (5) pentru $\alpha = x_{i-1}$ şi $\beta = x_i$, obţinem

$$\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx - \frac{1}{2}[f(x_{i-1})+f(x_i)](x_i-x_{i-1})\right| \leqslant \frac{(x_i-x_{i-1})^3}{12}\cdot M(f'') = \frac{(b-a)^3}{12n^3}\cdot M(f'');$$

de unde, folosind proprietatea de aditivitate a integralei, deducem

$$\left|\int_a^b f(x)dx - T_n(f)\right| = \left|\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx - \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}[f(x_{i-1})+f(x_i)](x_i-x_{i-1})\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^n \left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx - \frac{1}{2}[f(x_{i-1})+f(x_i)](x_i-x_{i-1})\right| \leqslant$$

$$\leqslant n\cdot\frac{(b-a)^3}{12n^3}M\,(f'') = \frac{(b-a)^3}{12n^2}\cdot M(f'').$$

5.5. *Exemple.* α) Pentru funcţia

$$f(x) \overset{\text{def.}}{=} x^2, \qquad x \in [0,\ 2]$$

se cere să se calculeze sumele $D_4(f)$, $T_4(f)$ şi să se determine abaterea dintre aceste sume şi integrala

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{8}{3} \simeq 2{,}66.$$

Am văzut că dacă

$$\Delta_n = (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b) \text{ şi } x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n},$$

atunci

$$D_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i),$$

$$T_n(f) = \frac{b-a}{2n}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_i)\right].$$

În cazul considerat avem

$$\Delta_4 = \left(0 < \frac{1}{2} < 1 < \frac{3}{2} < 2\right) \text{ şi } x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{4} = \frac{1}{2},$$

deci

$$D_4(x^2) = \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) + f\left(\frac{3}{2}\right) + f(2)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4} + 1 + \frac{9}{4} + 4\right] = \frac{15}{4} = 3{,}75$$

şi

$$T_4(x^2) = \frac{1}{4}\left[f(2) + 2\left(f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) + f\left(\frac{3}{2}\right)\right)\right] = \frac{1}{4}\left[4 + 2\left(\frac{1}{4} + 1 + \frac{9}{4}\right)\right] = \frac{11}{4} = 2{,}75.$$

Abaterile sunt

$$D_4(x^2) - \int_0^2 x^2 dx = \frac{15}{4} - \frac{8}{3} = \frac{13}{12},$$

respectiv

$$T_4(x^2) - \int_0^2 x^2 dx = \frac{11}{4} - \frac{8}{3} = \frac{1}{12}.$$

β) Funcţia

$$f(x) = e^{x^2}, \qquad x \in [0, 1]$$

fiind continuă, admite primitive. Totuşi primitivele acestei funcţii nu pot fi exprimate prin funcţii elementare, deci nu putem calcula exact valoarea integralei

$$\int_0^1 e^{x^2} dx.$$

În acest caz, aproximarea numerică a acestei integrale devine o necesitate. Dacă luăm

$$\Delta_3 = \left(0 < \frac{1}{2} < \frac{2}{3} < 1\right),$$

atunci

$$x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{3} = \frac{1}{3}$$

şi

$$T_3(e^x) = \frac{1}{6}\left[e^0 + e^1 + 2\left(e^{\frac{1}{9}} + e^{\frac{4}{9}}\right)\right].$$

Folosind un calculator, obținem valori aproximative ale termenilor din suma de mai sus

$$e = 2{,}7182818; \qquad e^{\frac{1}{9}} = 1{,}1175191; \qquad e^{\frac{4}{9}} = 1{,}5596234;$$

deci

$$T_3(e^{x^2}) = \frac{1}{6}[3{,}7182818 + 5{,}354285] = \frac{9{,}0725668}{6} = 1{,}5120945.$$

Dacă se ia diviziunea

$$\Delta_4 = \left(0 < \frac{1}{4} < \frac{1}{2} < \frac{3}{4} < 1\right), \qquad \frac{b-a}{4} = \frac{1}{4},$$

atunci

$$T_4(e^{x^2}) = \frac{1}{8}\left[1 + e + 2\left(e^{\frac{1}{16}} + e^{\frac{1}{4}} + e^{\frac{9}{16}}\right)\right].$$

Însă

$$e^{\frac{1}{16}} = 1{,}0644945; \qquad e^{\frac{1}{4}} = 1{,}2840254; \qquad e^{\frac{9}{16}} = 1{,}7550547,$$

deci

$$T_4(e^{x^2}) = \frac{1}{8}[3{,}7182818 + 8{,}2071492] = \frac{11{,}925431}{8} = 1{,}4906789.$$

Luând acum diviziunea

$$\Delta_{10} = (0 < 0{,}1 < 0{,}2 < \ldots < 0{,}9 < 1), \quad \frac{b-a}{10} = \frac{1}{10},$$

avem

$$T_{10}(e^{x^2}) = \frac{1}{20}[1 + e + 2(e^{(0,1)^2} + e^{(0,2)^2} + \ldots + e^{(0,9)^2})].$$

Însă

$$1 + e = 3{,}7182818, \qquad e^{(0,5)^2} = 1{,}2840254,$$
$$e^{(0,1)^2} = 1{,}0100502, \qquad e^{(0,6)^2} = 1{,}4333294,$$
$$e^{(0,2)^2} = 1{,}0408108, \qquad e^{(0,7)^2} = 1{,}6323162,$$
$$e^{(0,3)^2} = 1{,}0941743, \qquad e^{(0,8)^2} = 1{,}8964809,$$
$$e^{(0,4)^2} = 1{,}1735109, \qquad e^{(0,9)^2} = 2{,}247908,$$

deci

$$T_{10}(e^{x^2}) = \frac{1}{20}[3{,}71822818 + 25{,}6251676] = \frac{29{,}3434494}{20} = 1{,}46717247$$

β') *Estimarea erorilor.* Funcția pozitivă

$$f''(x) = 2(1 + 2x^2)e^{x^2}, \qquad x \in [0, 1]$$

fiind crescătoare, va avea maximul în punctul 1, deci

$$M(f'') = 6e$$

Se știe (vezi 5.4) că

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - T_n(f)\right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12n^2} M(f'')$$

deci

$$\left|\int_0^1 e^{x^2}\,\mathrm{d}x - T_3(e^{x^2})\right| \leqslant \frac{M(f'')}{12\cdot 3^2} = \frac{6e}{12\cdot 9} = \frac{e}{18} = 0{,}15101,$$

$$\left|\int_0^1 e^{x^2}\,\mathrm{d}x - T_4(e^{x^2})\right| \leqslant \frac{M(f'')}{12\cdot 4^2} = \frac{6e}{12\cdot 16} = \frac{e}{32} = 0{,}08493,$$

$$\left|\int_0^1 e^{x^2}\,\mathrm{d}x - T_{10}(e^{x^2})\right| \leqslant \frac{M(f'')}{12\cdot 10^2} = \frac{6e}{12\cdot 100} = \frac{e}{200} = 0{,}01359.$$

Așadar, avem evaluarea

$$1{,}45358 = T_{10}(e^{x^2}) - 0{,}01359 \leqslant \int_0^1 e^{x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant T_{10}(e^{x^2}) + 0{,}01359 = 1{,}48076.$$

Observație. Calculele numerice de mai sus au fost efectuate cu un calculator de buzunar.

β″) *Determinarea numărului minim, n, de puncte de diviziune, astfel încât:*

$$\left|D_n(e^{x^2}) - \int_0^1 e^{x^2}\,\mathrm{d}x\right| < \frac{1}{1\,000}.$$

Funcția $f'(x) = 2xe^{x^2}$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ fiind strict crescătoare, va avea maximul în punctul 1, deci

$$M(f') = 2e.$$

Se cere, deci, să determinăm $n \geqslant 1$ astfel încât

$$\frac{(b-a)^2}{n} M(f') < \frac{1}{1\,000},$$

adică, în cazul nostru

$$\frac{1}{n}\,2e < \frac{1}{1\,000},$$

sau

$$n > 2\,000\,e \simeq 5436.$$

Așadar, pentru a calcula, prin metoda dreptunghiurilor, integrala

$$\int_0^1 e^{x^2}\,\mathrm{d}x,$$

cu o eroare mai mică decît $\frac{1}{1\,000}$, este nevoie să se ia *cel puțin* 5 437 puncte de diviziune.

β‴) Determinarea numărului minim n de puncte de diviziune astfel încât

$$\left|T_n(f) - \int_0^1 e^{x^2}\mathrm{d}x\right| < \frac{1}{1\,000}.$$

Se cere să determinăm $n \geqslant 1$ astfel încât

$$\frac{(b-a)^3}{12n^2} M(f'') < \frac{1}{1\,000}.$$

În cazul nostru $b - a = 1$, iar $M(f'') = 6e$. Deci

$$\frac{6e}{12n^2} < \frac{1}{1\,000},$$

de unde

$$n > \sqrt{500e} = 10\sqrt{5e} \simeq 36{,}86.$$

Aşadar, pentru a calcula, prin metoda trapezelor, integrala

$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx$$

cu o eroare mai mică decât $\frac{1}{1\,000}$, sînt *suficiente 37 puncte de diviziune.*

În exemplele prezentate mai sus se arată că metoda dreptunghiurilor apare mai puţin „economică" decât metoda trapezelor, în sensul că pentru a obţine o evaluare dată a integralei, numărul de operaţii necesare în prima metodă este mult mai mare decât cel din a doua metodă.

5.6. *Exerciţii.* Să se calculeze suma

$$D_n(f) \overset{\text{def}}{=} \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

respectiv

$$T_n(f) \overset{\text{def}}{=} \frac{b-a}{2n}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j)\right],$$

prin metoda dreptunghiurilor (respectiv metoda trapezelor) de aproximare a integralei

$$\int_a^b f(x)dx$$

şi să se evalueze eroarea pentru funcţiile:

1. $f(x) = x^2 + 3x$, $x \in [0, 4]$; $n = 4$; $n = 8$.
2. $f(x) = x^3 + 1$, $x \in [0, 2]$; $n = 4$; $n = 6$.
3. $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, $x \in [0, 1]$; $n = 3$; $n = 5$.
4. $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in [1, 2]$; $n = 3$; $n = 5$.

§ 6. CENTRE DE GREUTATE

În cele ce urmează vor fi considerate numai plăci plane atât de subţiri încât, din punct de vedere practic, grosimea lor să poată fi neglijată. În aceste condiţii vom identifica plăcile plane cu mulţimi din plan. Deoarece în practică este nevoie adeseori să se calculeze aria plăcilor plane, *vom identifica plăcile plane cu mulţimi din* $\mathbf{R}^2$ *care au arie.*

Nu vom intra în consideraţii fizice privind definiţia masei unui corp, în particular a unei plăci plane. Vom spune totuşi că masa este o măsură a cantităţii de materie dintr-un corp. Cu identificarea de mai sus, masa reprezintă o funcţie $A \to m(A)$, care asociază fiecărei plăci plane (pe care o identificăm cu o mulţime care are arie) A, un număr real pozitiv $m(A)$, numit *masa* lui A. Această funcţie trebuie să satisfacă, în cadrul mecanicii clasice, următoarele condiţii:

(M_1) dacă placa A se descompune în n plăci plane disjuncte $A_1, A_2, \dots A_n$, atunci

$$m(A) = m(A_1) + m(A_2) + \dots + m(A_n),$$

(M_2) masa $m(A)$ a unei plăci plane A rămîne constantă în timpul mişcării.

O placă A se numeşte *omogenă* dacă există o constantă $k > 0$, astfel încât

$$m(B) = k \cdot \text{aria}(B),$$

pentru orice parte B (care are arie) a lui A.

Dacă $D = [a, b] \times [c, d]$ este o placă dreptunghiulară omogenă (fig. III.26), atunci există o constantă $k \geqslant 0$, astfel încât

$$m(D) = k \text{ aria}(D) = k(b - a)(d - c).$$

Pentru o astfel de placă de masă nenulă, centrul de greutate se defineşte ca fiind punctul $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbf{R}^2$ de coordonate

$$\bar{x} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(b + a).$$

$$\bar{y} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(d + c).$$

Să considerăm acum o placă E formată dintr-un număr finit de plăci dreptunghiulare $D_1, D_2, \dots, D_n$ cu laturile paralele cu axele de coordonate şi astfel încât fiecare două plăci D_i, D_j $(i \neq j)$ au în comun cel mult o latură. Aceasta înseamnă că mulţimea din $\mathbf{R}^2$ cu care se identifică E este elementară (vezi cap. III, definiţia 1.1). Pentru comoditate, astfel de plăci vor fi numite *elementare*.

Fie E o placă elementară formată din plăcile dreptunghiulare

$$D_1, D_2, \dots, D_n$$

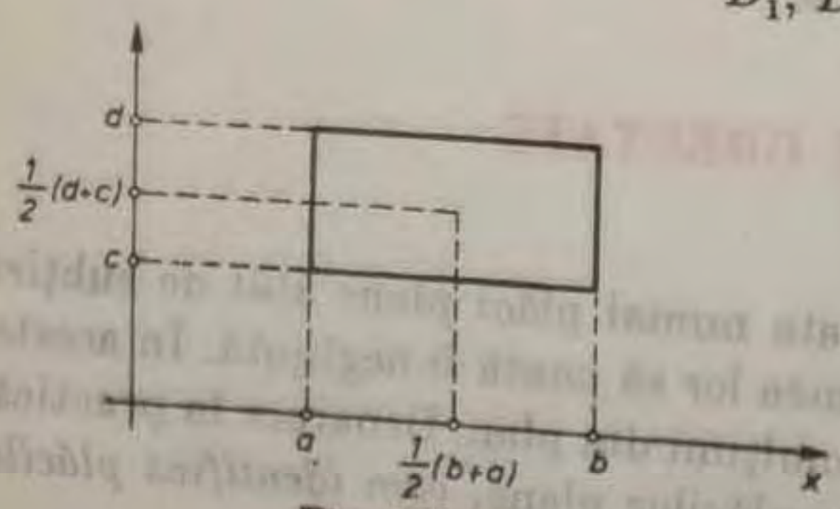


Fig. III.26

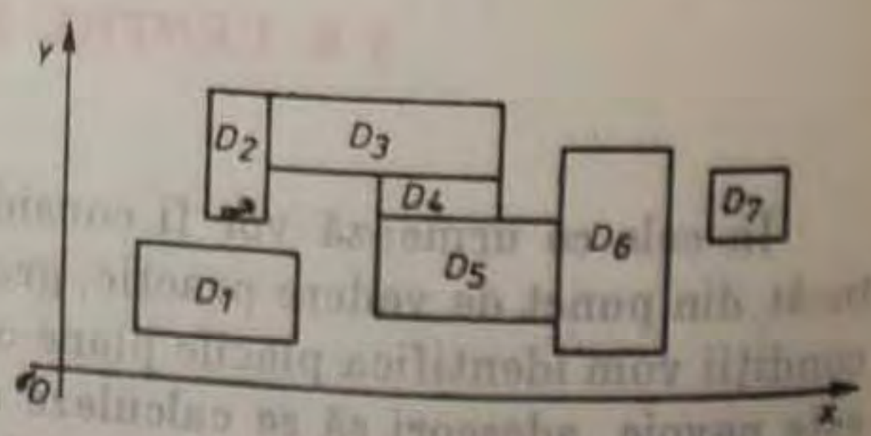


Fig. III.27

de mase

$$m(D_1),\ m(D_2),\ \dots,\ m(D_n)$$

şi ale căror centre de greutate sunt respectiv punctele

$$(\bar{x}_1,\ \bar{y}_1),\ (\bar{x}_2,\ \bar{y}_2),\ \dots,\ (\bar{x}_n,\ \bar{y}_n).$$

Atunci centrul de greutate al lui E va fi, prin definiţie, punctul $(\bar{x}, \bar{y})$ de coordonate

$$\bar{x} \overset{\text{def}}{=} \frac{\sum_{i=1}^{n} m(D_i)\bar{x}_i}{\sum_{i=1}^{n} m(D_i)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m(D_i)\bar{x}_i}{m(E)},$$

$$\bar{y} \overset{\text{def}}{=} \frac{\sum_{i=1}^{n} m(D_i)\bar{y}_i}{\sum_{i=1}^{n} m(D_i)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m(D_i)\bar{y}_i}{m(E)}.$$

Dacă placa E este omogenă, atunci există o constantă $k > 0$, astfel incât

$$m(B) = k \text{ aria}(B),$$

oricare ar fi partea B (care are arie) a lui E; în particular,

$$m(D_i) = k \text{ aria}(D_i), \qquad (\forall)\ i = 1,\ 2,\ \dots,\ n.$$

Deci putem exprima coordonatele centrului de greutate numai în funcţie de ariile şi centrele de greutate ale dreptunghiurilor D_i

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \text{aria } (D_i)\bar{x}_i}{\sum_{i=1}^{n} \text{aria } (D_i)}, \qquad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \text{aria } (D_i)\bar{y}_i}{\sum_{i=1}^{n} \text{aria } (D_i)}.$$

Fie $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ două funcţii continue astfel incât $f(x) \leqslant g(x)$, $(\forall)\ x \in [a, b]$. Să considerăm mulţimea

$$\Gamma_{f,g} \overset{\text{def}}{=} \{(x,\ y) \in \mathbf{R}^2 \mid a \leqslant x \leqslant b;\ \ f(x) \leqslant y \leqslant g(x)\}$$

cuprinsă între graficele funcţiilor f, g şi dreptele paralele la Oy care taie axa Ox în punctele a şi b respectiv.

În cele ce urmează vom defini centrele de greutate ale plăcilor plane care se identifică cu mulţimi din plan de forma $\Gamma_{f,g}$.

Fie deci

$$\Delta = (a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)$$

o diviziune a intervalului $[a, b]$, ξ_i mijlocul intervalului $[x_{i-1}, x_i]$

$$\xi_i = \frac{1}{2}(x_i + x_{i-1}), \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

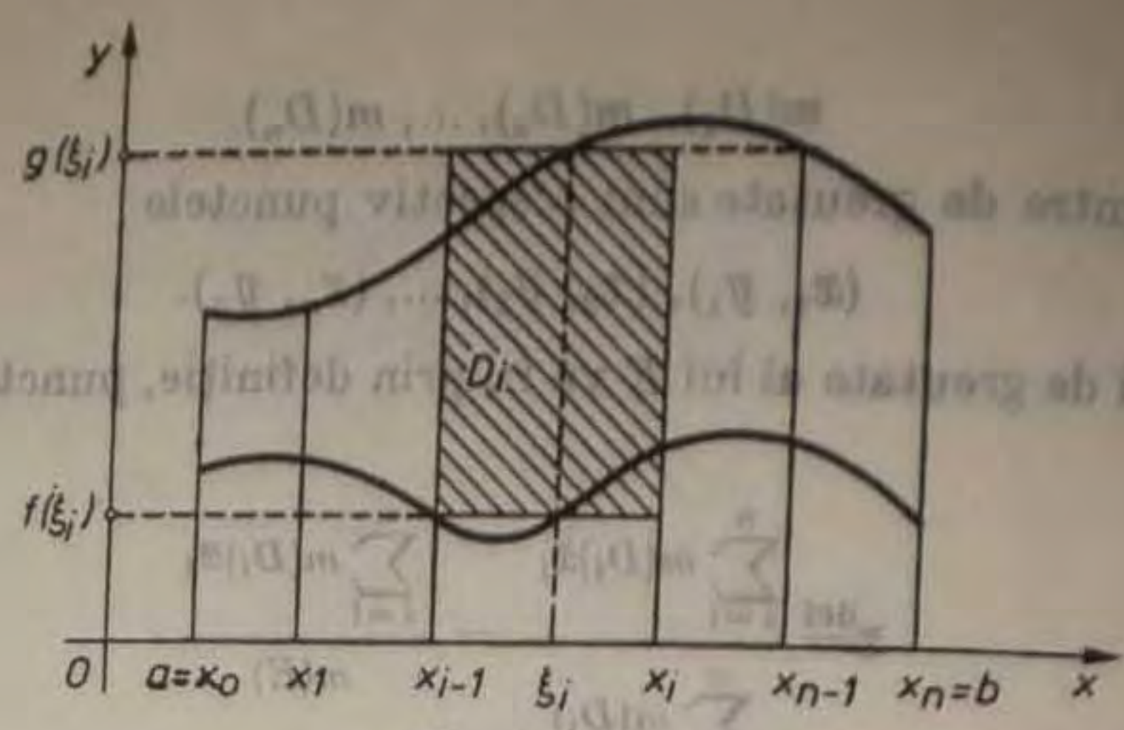


Fig. III.28

și dreptunghiul (fig. III.28)

$$D_i = [x_{i-1},\ x_i] \times [f(\xi_i),\ g(\xi_i)]$$

a cărui arie este

$$\text{aria}(D_i) = (x_i - x_{i-1}) \cdot (g(\xi_i) - f(\xi_i)).$$

Dacă norma diviziunii Δ este suficient de mică, atunci mulțimea

$$\Gamma_i = \{(x,\ y) \in \mathbf{R}^2 \mid x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i;\ f(x) \leqslant y \leqslant g(x)\}$$

(delimitată de graficele lui f, g și de dreptele paralele la Oy care taie axa Ox în punctele x_{i-1} și x_i, respectiv) se aproximează cu dreptunghiul D_i, deci centrul de greutate al lui Γ_i se aproximează cu centrul de greutate al lui D_i; prin urmare centrul de greutate al lui

$$\Gamma_{f,g} = \bigcup_{i=1}^{n} \Gamma_i$$

se aproximează cu centrul de greutate al mulțimii elementare

$$E_\Delta \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{i=1}^{n} D_i.$$

Coordonatele centrului de greutate al lui D_i fiind

$$\bar{x}_i = \xi_i, \quad \bar{y}_i = \frac{1}{2}[g(\xi_i) + f(\xi_i)],$$

rezultă că centrul de greutate al lui E_Δ va avea coordonatele:

$$\bar{x}_\Delta = \frac{\sum_{i=1}^{n} \text{aria } (D_i)\bar{x}_i}{\sum_{i=1}^{n} \text{aria } (D_i)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i[g(\xi_i) - f(\xi_i)] \cdot (x_i - x_{i-1})}{\sum_{i=1}^{n} [g(\xi_i) - f(\xi_i)] \cdot (x_i - x_{i-1})},$$

$$\bar{y}_\Delta = \frac{\sum_{i=1}^{n} \text{aria } (D_i)\bar{y}_i}{\sum_{i=1}^{n} \text{aria } (D_i)} = \frac{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} [g^2(\xi_i) - f^2(\xi_i)] \cdot (x_i - x_{i-1})}{\sum_{i=1}^{n} [g(\xi_i) - f(\xi_i)] \cdot (x_i - x_{i-1})}.$$

Aceste consideraţii conduc la următoarea:

6.1. Definiţie. **Dacă A este o placă plană care se identifică cu o mulţime de forma $\Gamma_{f,g}$, unde $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ sunt funcţii continue, atunci centrul de greutate al lui A este, prin definiţie, punctul $(\bar{x}_A, \bar{y}_A) \in \mathbf{R}^2$ ale cărui coordonate sunt**

$$\bar{x}_A \overset{\text{def}}{=} \frac{\int_a^b x[g(x) - f(x)]\mathrm{d}x}{\int_a^b [g(x) - f(x)]\mathrm{d}x} = \frac{\int_a^b x[g(x) - f(x)]\mathrm{d}x}{\text{aria } (\Gamma_{f,g})}$$

$$\bar{y}_A \overset{\text{def}}{=} \frac{\frac{1}{2}\int_a^b [g^2(x) - f^2(x)]\mathrm{d}x}{\int_a^b [g(x) - f(x)]\mathrm{d}x} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b [g^2(x) - f^2(x)]\mathrm{d}x}{\text{aria } (\Gamma_{f,g})}.$$

Dacă $f(x) = 0$ şi $g(x) \geqslant 0$ $(\forall)$ $x \in [a, b]$, atunci

$$\bar{x}_A = \frac{\int_a^b xg(x)dx}{\text{aria } (\Gamma_g)}, \qquad \bar{y}_A = \frac{1}{2}\,\frac{\int_a^b g^2(x)dx}{\text{aria } (\Gamma_g)}.$$

6.2. *Exemple.* α) Fie $a > 0$ şi o placă plană omogenă de forma

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant a;\ y^2 \leqslant ax\}$$

(porţiunea din plan cuprinsă între parabola de ecuaţie

$$y^2 = ax$$

şi dreapta paralelă la Oy care taie axa Ox în punctul a; fig. III.29).

Pentru a calcula centrul de greutate al lui A considerăm funcţiile $f, g : [0, a] \to \mathbf{R}_+$ definite prin

$$f(x) \overset{\text{def}}{=} -\sqrt{ax}, \quad g(x) \overset{\text{def}}{=} \sqrt{ax}.$$

Atunci coordonatele centrului de greutate al lui A sunt

$$\bar{x}_A = \frac{\int_0^a x[\sqrt{ax} - (-\sqrt{ax})]\mathrm{d}x}{\int_0^a [\sqrt{ax} - (-\sqrt{ax})]\mathrm{d}x} = \frac{2\int_0^a x\sqrt{ax}\,\mathrm{d}x}{2\int_0^a \sqrt{ax}\,\mathrm{d}x} = \frac{\int_0^a x^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x}{\int_0^a x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x} =$$

$$= \frac{\frac{2}{5}\,x^{\frac{5}{2}}\Big|_0^a}{\frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a} = \frac{3a^{\frac{5}{2}}}{5a^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{5}\,a,$$

$$\bar{y}_A = \frac{\frac{1}{2}\int_0^a [(\sqrt{ax})^2 - (-\sqrt{ax})^2]\mathrm{d}x}{2\int_0^a \sqrt{ax}\,\mathrm{d}x} = \frac{0}{\int_0^a \sqrt{ax}\,\mathrm{d}x} = 0.$$

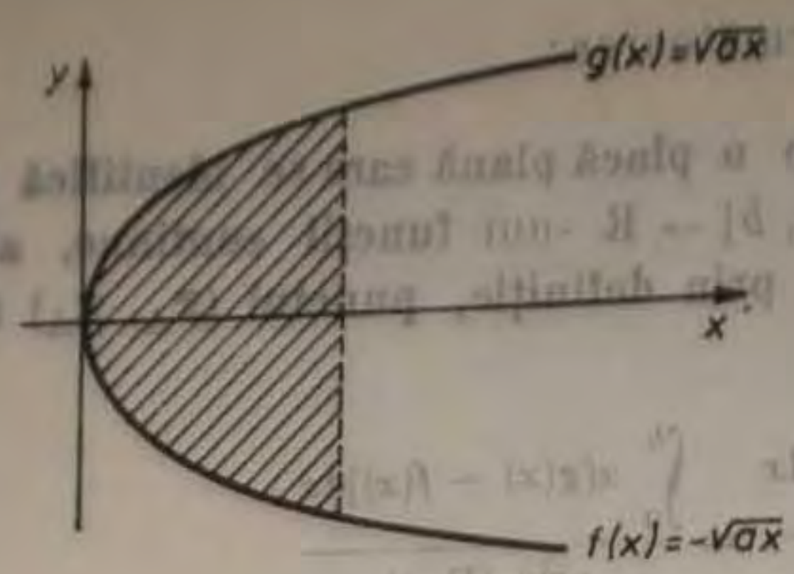


Fig. III.29

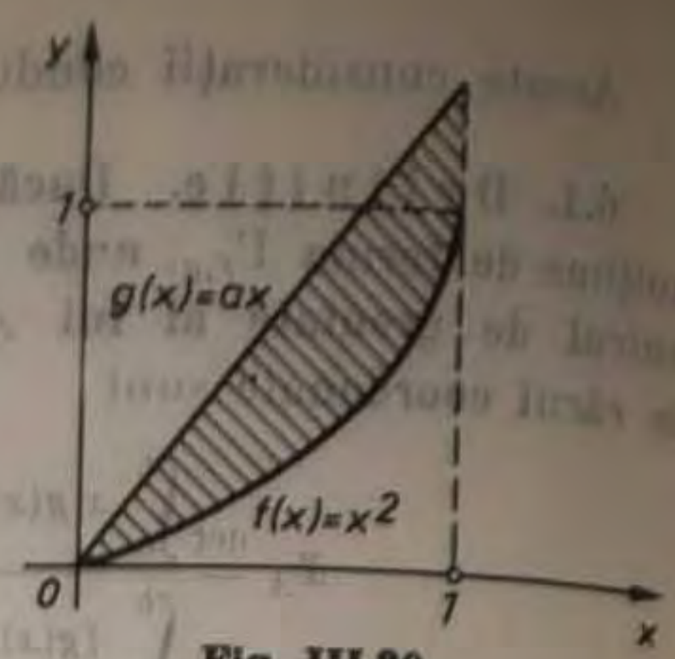


Fig. III.30

Deci centrul de greutate se află pe axa Ox, care este și axă de simetrie a mulțimii A.

β) Să se determine centrul de greutate al unei plăci plane omogene de forma

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 1;\ x^2 \leqslant y \leqslant ax\},$$

unde $a \geqslant 1$ (fig. III.30).

Luând $f, g : [0, 1] \to \mathbf{R}$ definite prin

$$f(x) \overset{\text{def}}{=} x^2, \quad g(x) \overset{\text{def}}{=} ax,$$

rezultă

$$\text{aria } (A) = \int_0^1 [g(x) - f(x)]\mathrm{d}x = \int_0^1 (ax - x^2)\mathrm{d}x = \left(a\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{a}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3a-2}{6},$$

deci

$$\bar{x}_A = \frac{\int_0^1 x(ax - x^2)\mathrm{d}x}{\text{aria } (A)} = \frac{6}{3a-2} \cdot \int_0^1 (ax^2 - x^3)\mathrm{d}x = \frac{6}{3a-2}\left[a\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{6}{3a-2}\left(\frac{a}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{6(4a-3)}{(3a-2)\cdot 12} = \frac{4a-3}{2(3a-2)},$$

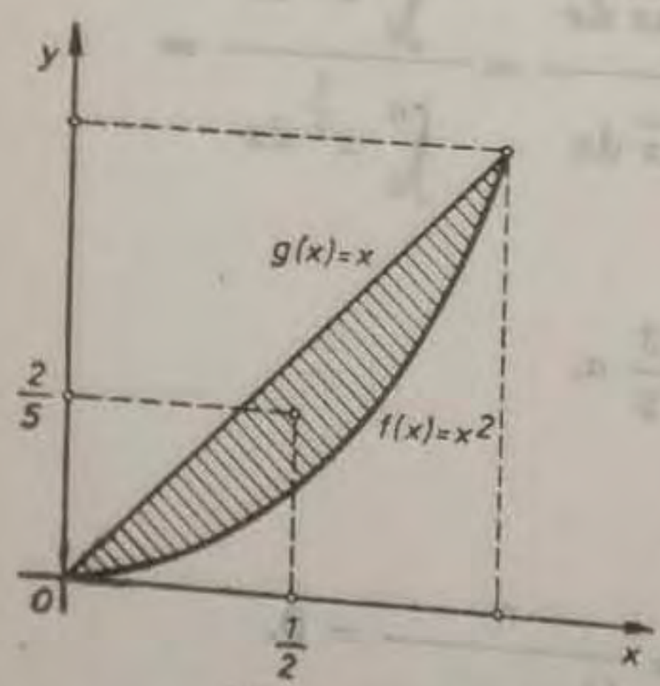


Fig. III.31

$$\bar{y}_A = \frac{\frac{1}{2}\int_0^1 (a^2x^2 - x^4)\mathrm{d}x}{\text{aria } (A)} =$$

$$= \frac{6}{(3a-2)}\,\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{3(5a^2-3)}{15(3a-2)} = \frac{5a^2-3}{5(3a-2)}.$$

În cazul particular când $a = 1$ (fig. III.31), centrul de greutate va fi situat în punctul $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{5}\right)$.

γ) *Să se determine centrul de greutate al unei plăci plane omogene de forma unui triunghi.*

Pentru simplitate vom considera cazul unei plăci triunghiulare în care două din vârfuri B și C sînt situate pe axa Ox, iar al treilea A este situat pe axa Oy (fig. III.32). Așadar, vom avea

$$A(0,a),\ B(b,0),\ C(c,0).$$

Vom presupune, de asemenea $b < 0 < c$. Ecuația dreptei ce trece prin A și B va fi

$$y = -\frac{a}{b}(x-b),$$

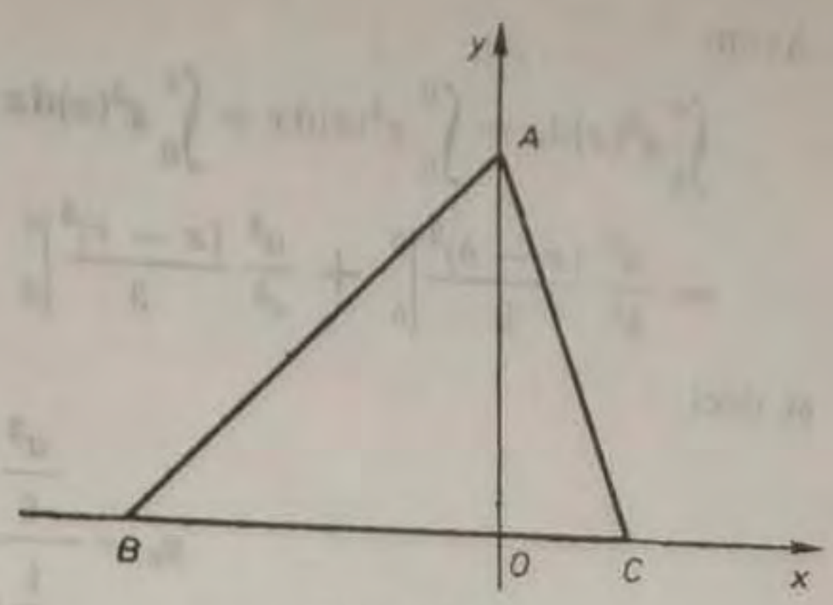


Fig. III.32

iar ecuația dreptei ce trece prin A și C va fi

$$y = -\frac{a}{c}(x-c).$$

Notăm cu $g:[b,c] \to \mathbf{R}$ funcția definită prin

$$g(x) = \begin{cases} -\dfrac{a}{b}(x-b), \text{ dacă } x \in [b,0), \\ -\dfrac{a}{c}(x-c) \text{ dacă } x \in [0,c] \end{cases}$$

și cu $f:[b,c] \to \mathbf{R}$ funcția identic nulă. Mulțimea $\Gamma_{f,g}$ va fi interiorul triunghiului ABC și deci aria sa va fi egală cu

$$\frac{1}{2}a(c-b).$$

Abscisa centrului de greutate al mulțimii $\Gamma_{f,g}$ va fi

$$x_0 = \frac{\int_b^c xg(x)\mathrm{d}x}{\text{aria } (\Gamma_{f,g})}.$$

Avem

$$\int_b^c xg(x)\mathrm{d}x = \int_b^0 xg(x)\mathrm{d}x + \int_0^c xg(x)\mathrm{d}x = -\frac{a}{b}\int_b^0 x(x-b)\mathrm{d}x - \frac{a}{c}\int_0^c x(x-c)\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{a}{b}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{bx^2}{2}\right)\Big|_b^0 - \frac{a}{c}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{cx^2}{2}\right)\Big|_0^c = -\frac{a}{b}\left(\frac{b^3}{2} - \frac{b^3}{3}\right) -$$

$$-\frac{a}{c}\left(\frac{c^3}{3} - \frac{c^3}{2}\right) = -\frac{ab^2}{6} + \frac{ac^2}{6} = \frac{a}{6}(c^2 - b^2)$$

și deci

$$x_0 = \frac{\frac{a}{6}(c^2-b^2)}{\frac{1}{2}a(c-b)} = \frac{1}{3}(b+c).$$

Ordonata centrului de greutate a mulțimii $\Gamma_{f,g}$ va fi

$$y_0 = \frac{\frac{1}{2}\int_b^c g^2(x)\mathrm{d}x}{\text{aria } (\Gamma_{f,g})}.$$

Avem

$$\int_b^c g^2(x)\mathrm{d}x = \int_b^0 g^2(x)\mathrm{d}x + \int_0^c g^2(x)\mathrm{d}x = \frac{a^2}{b^2}\int_b^0 (x-b)^2\mathrm{d}x + \frac{a^2}{c^2}\int_0^c (x-c)^2\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{a^2}{b^2}\frac{(x-b)^3}{3}\Big|_b^0 + \frac{a^2}{c^2}\frac{(x-c)^3}{3}\Big|_0^c = -\frac{1}{3}\frac{a^2}{b^2}b^3 + \frac{1}{3}\frac{a^2}{c^2}c^3 = \frac{1}{3}a^2(c-b)$$

și deci

$$y_0 = \frac{\frac{a^2}{6}(c-b)}{\frac{1}{2}a(c-b)} = \frac{a}{3}.$$

Așadar, centrul de greutate va fi punctul de coordonate

$$\left(\frac{1}{3}(b+c),\quad \frac{a}{3}\right),$$

ceea ce reprezintă punctul de intersecție al medianelor triunghiului ABC.

6.3. *Exerciții.* Să se găsească centrele de greutate ale următoarelor plăci plane omogene:

1. $A = \{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{1-x^2},\ -1 \leqslant x \leqslant 1\}$.
2. $A = \{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{1-x^2},\ 0 \leqslant x \leqslant 1\}$.
3. $A = \{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 2\sqrt{1-x^2},\ -1 \leqslant x \leqslant 1\}$.
4. $A = \{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant \sin x,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi\}$.
5. $A = \{(x, y) \mid -x \leqslant y \leqslant x,\ 0 \leqslant x \leqslant 4\}$.

§ 7. LUCRU MECANIC

Considerăm o particulă P care se mișcă pe un interval $J \subset \mathbf{R}$ sub acțiunea unei forțe $\vec{F}$, de direcție Ox. Forța $\vec{F}$ avînd în fiecare punct $t \in J$ o valoare $F(t)$ care acționează în direcția axei Ox, vom identifica $F(t)$ cu un număr real; acest număr va fi considerat pozitiv dacă forța $F(t)$ acționează *de la stânga la dreapta* și *negativ* dacă acționează *de la dreapta la stânga*. În această situație, forța $\vec{F}$ poate fi considerată ca o funcție $F : J \to \mathbf{R}$.

În cazul când forța F este constantă

$$F(t) = F_0, \qquad (\forall)\, t \in J,$$

lucrul mecanic efectuat de forța F pentru a deplasa particula P din punctul $a \in J$ în punctul $b \in J$, este, prin definiție, numărul real

$$L_{a,b}(F) = F_0 \cdot (b-a).$$

Dacă forța F nu este constantă, atunci un raționament similar cu cel folosit în definiția integralei va conduce la definiția lucrului mecanic în cazul general.

Fie $a, b \in J$, $a < b$ şi $\Delta = (a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)$ o diviziune a intervalului $[a, b]$. Particula P, mişcându-se de la a la b trece prin punctele $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, deci, conform a ceea ce se admite în fizică,

$$L_{a,b}(F) = L_{x_0,x_1}(F) + L_{x_1,x_2}(F) + \dots + L_{x_{n-1},x_n}(F).$$

Dacă $\| \Delta \|$ (norma diviziunii Δ) este suficient de mică, atunci forţa $\vec{F}$ se aproximează, pe fiecare interval $[x_{i-1}, x_i]$, prin forţa (constantă pe $[x_{i-1}, x_i]$)

$$F_i(x) \overset{\text{def}}{=} F(\xi_i), \ (\forall)\, x \in [x_{i-1}, x_i],$$

unde $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ este un punct fixat. Deci, lucrul mecanic efectuat de forţa $\vec{F}$ pentru a deplasa particula P din punctul x_{i-1} în punctul x_i, se aproximează prin

$$F(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Aşadar, lucrul mecanic efectuat de forţa F pentru a deplasa particula P de la a la b se aproximează cu

$$\sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Aceste consideraţii sugerează următoarea

7.1. Definiţie. Fie J un interval $\subset \mathbf{R}$, $F : J \to \mathbf{R}$ o forţă care este considerată ca o funcţie continuă şi P o particulă care se mişcă în intervalul J sub acţiunea forţei F. Atunci lucrul mecanic efectuat de forţa F pentru deplasarea particulei P din punctul $a \in J$ în punctul $b \in J$ este, prin definiţie, numărul real

$$L_{a,b}(F) \overset{\text{def}}{=} \int_a^b F(x)\mathrm{d}x.$$

7.2. *Exemple.* α) Fie P_0, P două particule de mase m_0, respectiv m, situate pe axa Ox în punctele x_0, respectiv x.
Considerăm particula P_0 fixă şi situată la stânga faţă de particula P (fig. III.33). Atunci, conform legii atracţiei universale, forţa care acţionează asupra lui P (de la dreapta spre stînga) este

$$F(x) = -k\frac{mm_0}{(x - x_0)^2},$$

unde k este o constantă. În acest caz, lucrul mecanic efectuat de forţa $\vec{F}$ pentru deplasarea particulei P dintr-un punct $x_1 (> x_0)$ în alt punct $x_2 (> x_1)$ este

$$L_{x_1,x_2}(F) = -kmm_0\int_{x_1}^{x_2}\frac{\mathrm{d}x}{(x - x_0)^2} = kmm_0\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{1}{x - x_0}\right)'\mathrm{d}x =$$

$$= kmm_0\frac{1}{x - x_0}\Big|_{x_1}^{x_2} = kmm_0\left[\frac{1}{x_2 - x_0} - \frac{1}{x_1 - x_0}\right] = \frac{kmm_0(x_1 - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)}.$$

Fig. III.33

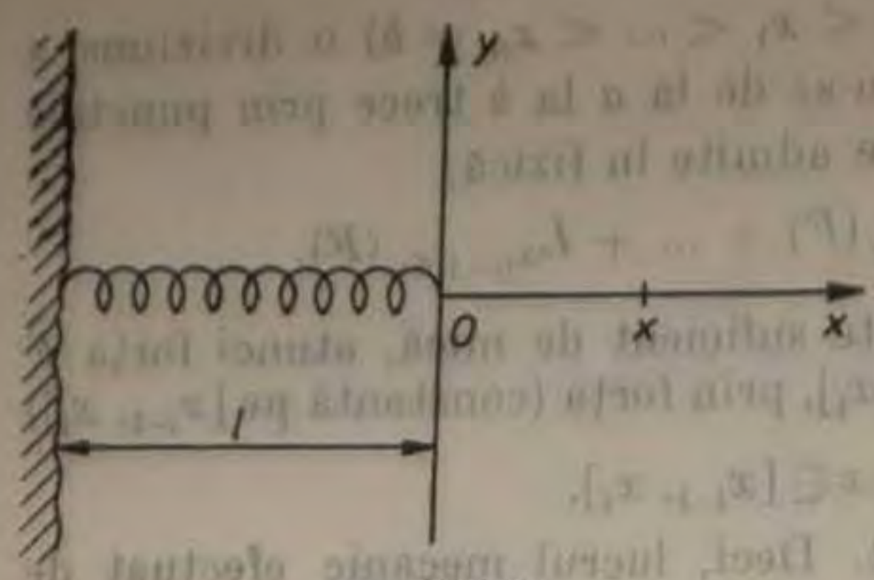


Fig. III.34

β) Se ştie (din consideraţii experimentale) că forţa necesară pentru a întinde un resort de lungime dată l, până la lungimea $l + x$ (fig. III.34) este proporţională cu lungimea x, adică

$$F(x) = kx$$

(constanta $k > 0$ depinde de resort).

Deci, lucrul mecanic necesar pentru a întinde resortul până la lungimea $l + x_0$ ($x_0 > 0$) este

$$L_{x_0} = \int_0^{x_0} kx\mathrm{d}x = k\frac{x^2}{2}\Big|_0^{x_0} = \frac{k}{2}x_0^2.$$

Constanta k poate fi determinată din relaţia $F(x) = k\,x$, dacă se cunosc unele date suplimentare despre resortul considerat. Astfel, dacă se ştie că pentru a întinde resortul cu 1 cm este nevoie de o forţă de 5N, atunci

$$k \cdot \frac{1}{100} = 5,$$

deci

$$k = 500$$

Aşadar, în cazul considerat

$$L_{x_0} = \frac{500}{2}x_0^2 = 250\,x_0^2 \text{ în Jouli.}$$

7.3. *Exerciţii*

1. Să se calculeze lucrul mecanic efectuat pentru întinderea unui resort elastic cu 2 m, ştiind că pentru a-l întinde cu 1 m este necesară o forţă de 100 N.
2. Să se calculeze lucrul mecanic efectuat pentru întinderea unui resort elastic cu 5 cm, ştiind că pentru a-l întinde cu 1 m este necesară o forţă de 10 N.
3. Să se calculeze lucrul mecanic efectuat pentru a ridica un corp cu masa de 5 kg la înălţimea de 100 m.
4. O picătură de apă avînd masa iniţială M cade sub acţiunea greutăţii sale şi se evaporă uniform, pierzând prin aceasta în fiecare secundă o masă m. Să se găsească lucrul mecanic efectuat de forţa de greutate a picăturii, din momentul începerii căderii sale pînă în momentul evaporării totale. Se va neglija rezistenţa aerului.

ANEXA

În această anexă sunt date unele definiţii şi rezultate care sunt folosite în acest manual. Toate acestea şi-ar găsi mai bine locul în manualul de Elemente de analiză matematică de clasa a XI-a, cu atât mai mult cu cât unele noţiuni au fost deja utilizate în clasa a XI-a.

A_1. *Definiţie.* Fie $E \subset \mathbf{R}$, $E \neq \emptyset$. Un număr real α se numeşte *minorant* al mulţimii E dacă

$$(\forall)\, x \in E \Rightarrow \alpha \leqslant x.$$

Un număr real β se numeşte *majorant* al mulţimii E dacă

$$(\forall)\, x \in E \Rightarrow x \leqslant \beta.$$

O mulţime $E \subset \mathbf{R}$, $E \neq \emptyset$ se zice *minorată* (respectiv *majorată*) dacă există minoranţi (respectiv majoranţi) ai lui E. Dacă E este minorată şi majorată, atunci E se numeşte *mărginită*.

A_2. *Observaţie.* Un minorant (respectiv majorant) al unei mulţimi E *nu aparţine neapărat* mulţimii E.

A_3. *Exemple*: (1). Dacă $E = [0, 1)$, atunci:
- orice număr real $\alpha \leqslant 0$ este un minorant al mulţimii E, în particular 0 este minorant al mulţimii E;
- orice număr real $\beta \geqslant 1$ este un majorant al mulţimii E;
- nici un majorant al mulţimii lui E nu aparţine lui E.

(2) Mulţimea $(-\infty, 0]$ nu are minoranţi.

(3) Mulţimea $\mathbf{N}$ a numerelor naturale nu are majoranţi.

A_4. *Definiţie.* Fie $E \subset \mathbf{R}$, $E \neq \emptyset$. Un număr real α se numeşte *cel mai mic element al lui E* dacă

1) α este minorant al lui E,

2) $\alpha \in E$.

Un număr real β se numeşte *cel mai mare element al lui E* dacă

i) β este majorant al lui E

ii) $\beta \in E$.

A_5. *Observaţie.* (a) Dacă α este cel mai mic element al lui E, atunci α este unicul element cu această proprietate.

Într-adevăr, dacă α' este un alt număr cu proprietăţile:

1') α' este minorant al lui E,

2') $\alpha' \in E$,

atunci din 1) şi 2') rezultă

$$\alpha \leqslant \alpha',$$

iar din 1') şi 2) rezultă

$$\alpha' \leqslant \alpha,$$

deci

$$\alpha' = \alpha.$$

(b) În mod analog se arată unicitatea celui mai mare element (dacă există) al unei mulţimi.

(c) În exemplul (1) din (A_3), am văzut că:

– mulţimea minoranţilor lui [0, 1] este intervalul $(-\infty, 0]$,

– mulţimea majoranţilor lui [0, 1) este intervalul $[1, \infty)$,

deci

0 = cel mai mare element al mulţimii $(-\infty, 0]$

şi

1 = cel mai mic element al mulţimii $[1, \infty)$,

cu alte cuvinte

0 = cel mai mare minorant al lui [0, 1)

şi

1 = cel mai mic majorant al lui [0, 1).

Aceste observaţii sugerează următoarea

A_6. *Definiţie.* Fie $E \subset \mathbf{R}$, mulţime nevidă minorată. Un număr real m se numeşte *marginea inferioară* a lui E dacă m este cel mai mare minorant al lui E, adică:

1) m este minorant al lui E

şi

2) m este cel mai mare element al mulţimii minoranţilor lui E.

Fie $E \subset \mathbf{R}$ o mulţime nevidă majorată. Un număr real M se numeşte *marginea superioară* a lui E dacă

M este cel mai mic majorant al lui E, adică

i) M este un majorant al lui E,

ii) M este cel mai mic element al mulţimii majoranţilor lui E.

Marginea inferioară (respectiv superioară) a unei mulţimi E se notează inf E (respectiv sup E).

A_7. *Observaţie.* Marginea inferioară (respectiv superioară), a unei mulţimi, atunci când există, este unică. Aceasta rezultă din definiţia (A_6) şi observaţia (A_5).

Admitem, fără demonstraţie, următorul rezultat:

A_8. *Orice parte nevidă minorată (respectiv majorată) a lui* $\mathbf{R}$ *are margine inferioară (respectiv superioară).*

A_9. *Exemple.* (1) Marginea inferioară (respectiv superioară) a mulţimii [0, 1) este numărul real 0 (respectiv 1).

(2) Marginea inferioară a mulţimii

$$E = \left\{1 + \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{2^2}, \ldots, n + \frac{1}{2^n}, \ldots\right\}$$

este $\frac{3}{2}$.

(3) Marginea inferioară (respectiv superioară) a mulţimii

$$E = \{x^2 e^{x^2} \mid 0 \leqslant x \leqslant a\}$$

este 0 (respectiv $a^2 e^{a^2}$).

A_{10}. *Definiție.* O mulțime A din plan se numește mărginită dacă există un dreptunghi care să o conțină, adică dacă există două puncte

$$(a_1, a_2) \in \mathbf{R}^2 \text{ și } (b_1, b_2) \in \mathbf{R}^2,$$

astfel încât

$$(\forall)\ (x, y) \in A \Rightarrow \left| \begin{array}{c} a_1 \leqslant x \leqslant b_1 \\ \text{și} \\ a_2 \leqslant y \leqslant b_2 \end{array} \right.$$

În mod analog se definesc mulțimile mărginite în spațiu.

A_{11}. *Propoziție. Fie $A \subset \mathbf{R}$, $A \neq \emptyset$ o mulțime minorată (respectiv majorată) și fie*

$$m = \inf A \text{ (respectiv } M = \sup A).$$

Atunci există un șir $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset A$ (respectiv $(b_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset A$) *astfel încât*

$$m = \lim_{n\to\infty} a_n \text{ (respectiv } M = \lim_{n\to\infty} b_n).$$

Demonstrație

Dacă $M = \sup A$, atunci

$$(\forall)\ n \geqslant 1,\ M - \frac{1}{n} < M = \text{cel mai mic majorant al lui } A,$$

deci

$$M - \frac{1}{n} \text{ nu este majorant al lui } A,$$

ceea ce înseamnă că există $b_n \in A$ astfel încât

$$M - \frac{1}{n} < b_n \leqslant M,$$

de unde rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} b_n \text{ există} = M.$$

În mod analog se arată existența unui șir $(a_n) \subset A$ care converge la m.

În propoziția care urmează sînt demonstrate două proprietăți ale funcțiilor continue.

A_{12}. *Propoziție. Fie I un interval $\subset \mathbf{R}$ și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție continuă într-un punct $a \in I$. Atunci*

(α) *pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât*

$$(\forall)\ x \in I \text{ cu } |x - a| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon;$$

(β) *dacă $f(a) > 0$, există un interval deschis $J \ni a$, astfel încât*

$$(\forall)\ x \in J \cap I \Rightarrow f(x) > 0.$$

Demonstrație (α). Presupunem, prin absurd, că (α) nu are loc. Aceasta înseamnă că există $\varepsilon_0 > 0$ astfel încât pentru orice $\delta > 0$ există $x_\delta \in I$ cu proprietățile:

$$|x_\delta - a| < \delta$$

și

$$|f(x_\delta) - f(a)| \geqslant \varepsilon_0.$$

În particular, pentru $\delta = \frac{1}{n}$ există $x_n \in I$ cu proprietățile:

(1) $$|x_n - a| < \frac{1}{n}$$

și

(2) $$|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon_0.$$

Din (1) rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

iar din (2) se vede că șirul $(f(x_n))_{n\in\mathbf{N}}$ *nu* converge la $f(a)$.

Contradicție cu continuitatea lui f în a.

(β). Presupunem că $f(a) > 0$, atunci există ε_1 astfel încât $0 < \varepsilon_1 < f(a)$, deci

(3) $$f(a) - \varepsilon_1 > 0.$$

Funcția f fiind continuă în a, are proprietatea (α), deci pentru $\varepsilon_1 > 0$ de mai sus există $\delta_1 > 0$ astel încât

$$(\forall)\, x \in I \text{ cu } |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon_1.$$

Această proprietate mai poate fi scrisă și astfel

$$(\forall)\, x \in I \cap (a - \delta_1, a + \delta_1) \Rightarrow f(a) - \varepsilon_1 < f(x) < f(a) + \varepsilon_1.$$

Punând $J = (a - \delta_1, a + \delta_1)$ și ținând seamă de (3), avem

$$(\forall)\, x \in I \cap J \Rightarrow f(x) > f(a) - \varepsilon_1 > 0.$$

A_{13}. *Observații.* (i) Orice funcție care are proprietatea (α) este continuă în a. Deci o funcție f este continuă în punctul a dacă și numai dacă are proprietatea (α) din propoziția A_{12}.

(ii) Proprietatea (β) din propoziția A_{12} s-a folosit la demonstrarea consecinței 4.7 din capitolul II, care afirmă că dacă f este o funcție continuă, pozitivă și neidentic nulă, atunci

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0.$$

A_{14}. *Definiție.* Fie $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ un șir de numere reale. Pentru orice șir crescător de numere naturale

$$n_0 < n_1 < n_2 < \ldots < n_k < n_{k+1} < \ldots,$$

șirul de numere reale

$$x_{n_0}, x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, x_{n_{k+1}}, \ldots,$$

notat prin $(x_{n_k})_{k\in\mathbf{N}}$, se numește *subșir* al șirului $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

A_{15}. *Observație.* Dacă $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este un șir convergent de numere reale, atunci orice subșir al său $(x_{n_k})_{k\in\mathbf{N}}$ este convergent și

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

CAPITOLUL I

1. 12. I

1. $\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x + c$; **2.** $\frac{x^2}{2} + \ln x + c$; **3.** $\frac{x^2}{2} + \ln(-x) + c$; **4.** $-a \cos x + b \sin x + c$; **5.** $\frac{1}{2} \arcsin 2x + c$; **6.** $\arcsin \frac{x}{2} + c$; **7.** $-2 \operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} x + c$; **8.** $-2 \operatorname{ctg} 2x + c$; **9.** $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + c$; **10.** $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2x + c$; **11.** $\frac{2^x}{\ln 2} + e^x + c$; **12.** $\frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x} + c$; **13.** $\frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x+1} + c$; **14.** $2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + c$; **15.** $\frac{2}{5} x^2\sqrt{x} + \frac{3}{8} x^2\sqrt[3]{x^3} + c$.

1. 12. II

1. Dacă f ar avea primitive, atunci și funcția

$$f(x) + x = [x]$$

ar avea primitive. Contradicție cu exemplul 1.10 (b).

2. Se observă că $f(\mathbf{R}) = \{-1, 0, 1\}$ adică $f(\mathbf{R})$ nu este interval. Deci (observația 1.4(d)) f nu admite primitive.

3. O primitivă a lui $f \mid (-\infty, 0)$ (respectiv $f \mid (0, \infty)$ este funcția

$$f_1(x) = \frac{x^2}{2} + c_1 \quad \left(\text{resp } f_2(x) = x \sin \frac{1}{x} + c_2\right).$$

Deci o primitivă a lui f, dacă ar exista, ar fi de forma

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + c, & \text{dacă } x \leqslant 0 \\ x \sin \frac{1}{x}, & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$$

Cum funcția

$$\frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{dacă } x \leqslant 0 \\ \sin \frac{1}{x}, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$$

nu are limită în zero, rezultă că F nu este derivabilă în zero. Deci F nu poate fi o primitivă pe $\mathbf{R}$.

4. Considerând funcţia $H(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$, $(\forall)\, x \neq 0$, se observă că $H|_{(-\infty, 0)}$ (resp. $H|_{(0, \infty)}$) este o primitivă a lui $f|_{(-\infty, 0)}$ (resp. $f|_{(0, \infty)}$). Dacă ar exista o primitivă $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ a lui f, atunci

$$F|_{(-\infty, 0)} = H|_{(-\infty, 0)} + c_1$$

şi

$$F|_{(0, \infty)} = H|_{(0, \infty)} + c_2$$

F este continuă (fiind derivabilă) pe $\mathbf{R}$, deci

$$\left.\begin{aligned} F(0) &= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} F(x) = c_1 \\ &= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} F(x) = c_2 \end{aligned}\right\} = c$$

Atunci:

$$F'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{H(x) + c - F(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{H(x)}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 \neq \frac{1}{2} = f(0)$$

deci F nu poate fi primitivă a lui f.

5. Imaginea intervalului $(\sqrt{3}, \sqrt{5})$ prin funcţia f nu este un interval, deoarece

$$f(\sqrt{3}) = 3^{\frac{3}{2}} < 8 < 5^{\frac{3}{2}} = f(\sqrt{5})$$

iar

$$8 \neq f(x) \qquad (\forall)\, x \in (\sqrt{3}, \sqrt{5})$$

Deci (observaţia 1.4(d)) f nu admite primitive.

6. Analog cu 5), imaginea intervalului $(\sqrt{15}, \sqrt{17})$ prin funcţia f nu este un interval, deci f nu admite primitive.

7. Notînd cu G o primitivă a funcţiei continue

$$g(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

şi cu

$$H(x) = \begin{cases} -x^2 \sin \frac{1}{x} + 2G(x), & \text{dacă } x \neq 0, \\ 2G(0) & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

se observă că $H|_{(-\infty, 0)}$ (resp. $H|_{(0, \infty)}$) este o primitivă a lui $f|_{(-\infty, 0)}$ (resp. $f|_{(0, \infty)}$).

Dacă F ar fi o primitivă a lui f, atunci

$$F|_{(-\infty, 0)} = H|_{(-\infty, 0)} + c_1 \text{ şi } F|_{(0, \infty)} = H|_{(0, \infty)} + c_2$$

F fiind derivabilă, este continuă, deci

$$F(0) = \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} F(x) = c_1 + 2\,G(0) \\ = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} F(x) = c_2 + 2\,G_0 \end{array}\right\} = c + 2\,G_0$$

prin urmare F ar fi de forma

$$F(x) = \begin{cases} -x^2 \sin \dfrac{1}{x} + 2G(x) + c, & \text{dacă } x \neq 0, \\ 2G(0) + c, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

și

$$F'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2 \sin \dfrac{1}{x} + 2G(x) + c - 2G(0) - c}{x - 0} =$$

$$= -\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} + 2 \lim_{x\to 0} \frac{G(x) - G(0)}{x - 0} = 2G'(0) = 2g(0) = 0$$

Însă $f(0) = \dfrac{1}{2}$, deci $F'(0) \neq f(0)$, adică F nu este primitivă a lui f.

8. Se raționează ca în exercițiul precedent luând

$$g(x) = \begin{cases} x \cos \dfrac{1}{x} & \text{, dacă } x \neq 0 \\ 0 & \text{, dacă } x = 0 \end{cases}$$

și

$$H(x) = \begin{cases} x^2 \cos \dfrac{1}{x} - 2G(x), & \text{, dacă } x \neq 0 \\ -2G(0) & \text{, dacă } x = 0. \end{cases}$$

9. Cum $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$, rezultă că pentru orice $0 < \varepsilon < 1$ există o vecinătate V_ε a lui zero astfel încât

$$\varepsilon < f(x) < 1 \qquad (\forall) x \in V_\varepsilon \cap (0, \infty)$$

V_ε fiind vecinătate a lui 0, există $a \in \mathbf{R}$ astfel încât $(0, a) \subset V_\varepsilon \cap (0, \infty)$. Atunci

$$f(0) = 0 < \varepsilon < f(a) \quad \text{și} \quad f(x) > \varepsilon \ (\forall) x \in (0, a).$$

Așadar, imaginea intervalului $(0, a)$ prin f nu este un interval.
Deci f nu admite primitive.

10. Se rezolvă un mod analog cu 9), utilizînd faptul că

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1.$$

1. 12. III

1. f este continuă; **2.** f este continuă; **8.** Fie G o primitivă a funcției continue

$$g(x) = \begin{cases} x \cos \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Atunci $F(x) = \begin{cases} x^2 \cos \dfrac{1}{x} - 2G(x), & x \neq 0, \\ -2G(0), & x = 0 \end{cases}$

este o primitivă continuă a funcției date; **4.** Analog cu exercițiul 3; **5., 6., 7.** f este continuă.

1. 12. IV

1. Dacă F (resp. G) este o primitivă a lui $f|_{[a,\,c]}$ (resp. $f|_{[c,\,b]}$) astfel încât $F(c) = G(c)$, atunci funcția

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & \text{dacă } x \in [a, c] \\ G(x), & \text{dacă } x \in [c, b] \end{cases}$$

este o primitivă a lui f pe $[a, b]$.

2. Funcția $g = f_1 - f_2$ are proprietatea lui Darboux și $g(x) = 0$ $(\forall) x \in [a,b] \setminus A$. Deci $g(x) = 0$ $(\forall) x \in [a, b]$, adică $f_1 = f_2$.

3. Notând cu $N_1 = \{x \in \mathbf{R} \mid f(x) = \pm 1\}$, rezultă $A_+ \cup A_- = \mathbf{R}$ și $A_+ \cap A_- = \Phi$. Dacă $A_+ \neq \Phi$ și $A_- \neq \Phi$, atunci f nu ar avea proprietatea lui Darboux, deci f nu ar admite primitive. Așadar,

$$\text{sau } A_+ = \Phi \text{ sau } A_- = \Phi,$$

adică

$$\text{sau } f = -1 \text{ sau } f = +1 .$$

4. Dacă $f(0) = 0$, atunci în baza exercițiului 1.12. III(3) rezultă că f admite primitive. Reciproc, dacă $f(0) \neq 0$, atunci, analog cu exercițiul 1.12. II(8), se arată că în acest caz f nu admite primitive.

5. Se observă că f se poate scrie sub forma $f = g + h$, unde

$$g(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x \in [-1, 0) \cup (0, 1)] \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

și

$$h(x) = \begin{cases} -1, & \text{dacă } x \in [-1, 0) \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \\ 1, & \text{dacă } x \in (0,1] \end{cases}$$

Dacă f ar admite primitive, cum g admite primitive (exercițiul 1.12.III(3)), ar rezulta că funcția h (care nu are proprietatea lui Darboux) ar admite primitive. Contradicție.

6. Dacă ar exista o primitivă F a lui f, atunci aceasta ar fi de forma

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4} x^2 \sin \dfrac{2}{x} + G(x), & \text{dacă } x \in [-1, 1] \setminus \{0\} \\ G(0), & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

unde G este o primitivă a funcției continue

$$g(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{2}{x}, & \text{dacă } x \in [-1, 1] \setminus \{0\} \\ 0, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

Însă

$$F'(0) = \frac{1}{2} \neq f(0),$$

deci f nu admite primitive.

Se observă că funcţia considerată, f, este pătratul funcţiei din exerciţiul 1.12.III(4).

7. Fie $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funcţia definită prin

$$g(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

şi G o primitivă a sa (există conform exerciţiului 1.12.III(3)). Se observă că funcţia $h : [a, b] \to \mathbf{R}$, definită prin

$$h(x) = (x - a)(x - b)$$

se anulează, iar a şi b, este derivabilă pe $[a, b]$ şi derivata sa este diferită în punctele a şi b. Funcţia $G \cdot h$ este derivabilă, iar derivata sa

$$(G \cdot h)'(x) = g(h(x))h'(x) = \begin{cases} (2x - a - b) \sin \dfrac{1}{(x - a)(x - b)} & \text{dacă } x \in (a, b) \\ 0 & \text{dacă } x = a \quad \text{sau } x = b \end{cases}$$

satisface condiţiile din enunţ.

8. Se consideră funcţia G din exemplul precedent şi funcţia $h : [a, b] \to \mathbf{R}$ definită prin

$$h(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n).$$

Atunci funcţia $(G \cdot h)'$ satisface condiţiile din enunţ.

9. Funcţia

$$g_\xi(x) = F(x) - f(\xi)x$$

este derivabilă, iar derivata sa

$$g'_\xi = F' - f(\xi) = f - f(\xi)$$

este strict negativă (respectiv strict pozitivă) la stânga (respectiv la dreapta lui ξ) Prin urmare, funcţia g_ξ este strict descrescătoare la stânga lui ξ şi strict crescătoare la dreapta, deci g_ξ nu este injectivă pe $[a, b]$, adică există $x_1 \in [a, \xi)$ şi $x_2 \in (\xi, b]$ astfel încât

$$g_\xi(x_1) = g_\xi(x_2)$$

de unde rezultă că

$$\frac{F(x_1) - F(x_2)}{x_1 - x_2} = f(\xi).$$

2. 3.

1. $x(\ln x - 1) + c$; 2. $\frac{x^2}{4}(2 \ln x - 1) + c$; 3. $x(\ln^2 x - 2 \ln x + 2) + c$;
4. $\frac{x^3}{9}(3\ln x - 1) + c$; 5. $\frac{\ln^2 x}{2} + c$; 6. $\frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha + 1)^2}[(\alpha + 1) \ln x - 1] + c$, $\alpha \neq -1$;
$\frac{\ln x}{2} + c$, $\alpha = -1$; 7. $x[\ln^n x - n\ln^{n-1} x + \dots + (-1)^{n-1} n(n - 1) \dots 2\ln x + (-1)^n n!] + c$;

8. $\frac{x^4}{32}(8\ln^2 x - 4\ln x + 1) + C$; 9. $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\left[\ln^n x - \frac{n}{\alpha+1}\ln^{n-1}x + \ldots\right.$

$\left. + (-1)^{n-1}\frac{n(n-1)\ldots 2}{(\alpha+1)^{n-1}}\ln x + (-1)^n\frac{n!}{(\alpha+1)^n}\right] + C$, $\alpha \neq -1$; $\frac{\ln^{n+1}x}{n+1} + C$, $\alpha = -1$;

10. $e^x(x-1) + C$; 11. $e^x(x^2 - 4x + 3) + C$; 12. $e^x(x^3 - 3x^2 + 5x - 4) + C$;

13. $\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\left[x^n - \frac{n}{\alpha}x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{\alpha^2}x^{n-2} \ldots + (-1)^{n-1}\frac{n(n-1)\ldots 2}{\alpha^{n-1}}x + (-1)^n\frac{n!}{\alpha^n}\right] + C$;

14. $-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$; 15. $(-x^2 + x + 1)\cos x + (2x - 1)\sin x + C$;

16. $I_n = -\frac{1}{\alpha}x^n\cos\alpha x + \frac{n}{\alpha^2}x^{n-1}\sin x - \frac{n(n-2)}{\alpha^2}I_{n-2}$; 17. $\frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C$;

18. $\frac{e^x}{5}(\sin 2x - 2\cos 2x) + C$; 19. $\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\sin\beta x - \beta\cos\beta x) + C$; 20. $\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}\cdot$

$\cdot(\alpha\cos\beta x + \beta\sin\beta x) + C$; 21. $\frac{xe^x}{2}(\sin x - \cos x) + \frac{e^x}{2}\cos x + C$;

22. $-e^x\cos x + C$; 23. $\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C$; 24. $-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + 2\sin x -$

$-\frac{2}{3}\sin^3 x + C$; 25. $\frac{15}{8}x + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{5}{32}\sin 4x + C$; 26. $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-4} -$

$-2\ln(x + \sqrt{x^2-4}) + C$; 27. $\frac{x}{2}\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C$;

28. $\frac{1}{4}x^3\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{8}x\sqrt{x^2+1} - \frac{1}{8}\ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C$; 29. $\frac{1}{5}(1+x^2)^{\frac{5}{2}} -$

$\frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + C$; 30. $\frac{1}{6}\sqrt{x^2-4}(x^5 - x^3 - 6x) - 4\ln(x + \sqrt{x^2-4}) + C$;

31. $\frac{16}{3}(x^2-4)^{\frac{3}{2}} + \frac{8}{5}(x^2-4)^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{7}(x^2-4)^{\frac{7}{2}} + C$;

32. $\frac{x}{2}\sqrt{9-x^2} + \frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3} + C$; 33. $\frac{x^3}{4}\sqrt{9-x^2} - \frac{9}{8}x\sqrt{9-x^2} + \frac{81}{8}\arcsin\frac{x}{3} + C$.

3. 6. I

1. $2\ln(x^2 + x + 3) + C$; 2. $\ln(2x^4 + 3x^2 + 5) + C$; 3. $-\operatorname{arctg}(\cos x) + C$;

4. $-\ln(\cos x) + C$; 5. $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right) + C$; 6. $\ln(\operatorname{tg} x) + C$; 7. $-e^{\cos(x^2+1)} + C$;

8. $\frac{e^{x^3}}{3} + C$; 9. $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + C$; 10. $-\frac{\cos^3 x}{3} + C$; 11. $\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C$; 12. $-\cos x +$

$+\frac{\cos^3 x}{3} + C$; 13. $\ln\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + C$; 14. $\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C$; 15. $-\ln(\cos x) + \frac{\cos^2 x}{2} +$

$+ C$; 16. $\ln(1 + \operatorname{tg} x) + C$; 17. $\frac{2}{3}\arcsin x\sqrt{x} + C$; 18. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2 + C$;

19. $\frac{1}{3}\operatorname{arctg} x^3 + C$; 20. $\frac{1}{2}\arcsin x^2 + C$; 21. $\arcsin e^x + C$; 22. $\ln(1 + \ln x) + C$;

23. $-\frac{\cos^2(\sin x)}{2} + C$; 24. $-\arcsin(\cos^2 x) + C$; 25. $\operatorname{arctg}(\ln x) + C$; 26. $\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} +$

$+\frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C$; **27.** $\frac{(2x-3)\sqrt{x^2-3x+2}}{4}-\frac{1}{8}\ln\left(\frac{2x-3}{2}+\right.$ $\left.+\sqrt{x^2-3x+2}\right)+C$; **28.** $\frac{(2x+1)\sqrt{x^2+x+1}}{4}+\frac{3}{8}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\right.$ $\left.+\sqrt{x^2+x+1}\right)+C$; **29.** $\frac{2x-3}{4}\sqrt{-x^2+3x-2}+\frac{1}{4}\arcsin\sqrt{x-1}+C$;

30. $\frac{x}{2}\sqrt{9-4x^2}+\frac{9}{4}\arcsin\frac{2x}{3}+C$; **31.** $-\frac{5}{12}(x+1)(x^2+2x+2)^{\frac{3}{2}}+$ $+\frac{3}{8}(x+1)\sqrt{x^2+2x+2}+\frac{3}{8}\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2})+C$;

32. $2(x-1)^{\frac{5}{2}}\left(\frac{x-1}{7}+\frac{1}{5}\right)+C$; **33.** $\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-1})+C$;

34. $-\frac{\arcsin x}{x}+\ln\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}+C$;

35. $\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{x^4+x^2+1}+x^2-1}{\sqrt{x^4+x^2+1}+x^2+1}+C$.

4. 6.

1. $\ln(e^x+\sqrt{e^{2x}-1})+\arcsin e^{-x}+C$;

2. $\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{x}\sin 2\sqrt{x}}{2}+\frac{\cos 2\sqrt{x}}{4}+C$;

3. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+\sin^2 x}}{\sqrt{2}-\sqrt{1+\sin^2 x}}+C$; **4.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{x^4+2x^2}+C$;

5. $\sqrt{x}+\frac{x}{2}-\frac{x\sqrt{x+1}}{2}-\frac{\ln(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})}{2}+C$;

6. $-\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\frac{\sqrt{2(x^2+1)}-x}{\sqrt{2(x^2+1)}+x}+C$; **7.** $\operatorname{arctg} x\left(\frac{x^3}{3}-x+\frac{\operatorname{arctg} x}{2}\right)-\frac{x^2}{6}+$ $+\frac{4}{3}\ln\sqrt{1+x^2}+C$; **8.** $\ln\frac{\sqrt{x^2+x+1}+x-1}{\sqrt{x^2+x+1}+x+1}+C$.

5. 9.

1. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C$; **2.** $x+2\ln(1-x)+C$; **3.** $-2\ln(1-x)+\frac{3}{x-1}-$ $-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(x-1)^2}+\ln(x^2-x+1)+\frac{28}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\frac{2}{3}\cdot\frac{x-2}{x^2-x+1}+C$;

4. $5\ln\frac{x+2}{-x-1}-\frac{5}{x+1}+\frac{2}{(x+1)^2}-\frac{2}{3}\frac{1}{(x+1)^3}+C$; **5.** $\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+C$;

6. $\frac{1}{3}\cdot\frac{x-2}{x^2-x+1}+\frac{8}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$; **7.** $\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+6x-3\ln x+\frac{1}{x}+$

$+ 13\ln(1-x) - \frac{3}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + C$; **8.** $\frac{1}{2}\ln x - \ln(x+1) + \frac{1}{2}\ln(x+2) + C$;

9. $\frac{1}{6}\ln x - \frac{1}{2}\ln(x+1) + \frac{1}{2}\ln(x+2) - \frac{1}{6}\ln(x+3) + C$;

10. $x + \frac{\sqrt{2}-1}{2}\ln(x^2 - \sqrt{2}x + 1) + (\sqrt{2}-1)\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x - 1) + C$;

11. $\frac{1}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{6}\ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$;

12. $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2 - \sqrt{2}x + 1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left[\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x + 1) + \operatorname{arctg}(\sqrt{2}x - 1)\right] + C$;

13. $x - 2\ln(x^2 + 4x + 5) + C$; **14.** $-\frac{1}{4}\ln(x+1) + \frac{1}{8}\ln(x^2+3) +$

$+ \frac{\sqrt{3}}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}} + C$; **15.** $\ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+x^2} + C$;

5.10.1.

1. $\ln(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}) + \frac{2}{x + 2 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}} + C$;

2. $-2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1 + x - x^2} - x - 1}{x} + C$; **3.** $2\ln(\sqrt{x^2 + 2x + 4} - x) -$

$-\frac{3}{2}\ln(\sqrt{x^2 + 2x + 4} - x - 1) - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 4} - x - 1} + C$;

4. $2\ln(x + \sqrt{x^2 - x + 1}) - \frac{3}{2}\ln(2x - 1 + 2\sqrt{x^2 - x + 1}) -$

$-\frac{3}{2}\,\frac{1}{2(\sqrt{x^2 - x + 1} + x) - 1} + C$; **5.** $\frac{2}{9}\left(5\sqrt{\frac{x-2}{5-x}} - 2\sqrt{\frac{5-x}{x-2}}\right) + C$;

6. $\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1 - 2x - x^2} + x - 1}{\sqrt{1 - 2x - x^2} - 1} + \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1 - 2x - x^2} - 1}{x} + C$;

7. $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{2 + \sqrt{2(1-x^2)}}{2 - \sqrt{2(1-x^2)}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2(1-x^2)}}{-2x} + C$;

8. $x - 2\ln(1 + x + \sqrt{1 + x + x^2}) + \frac{3}{2}\,\frac{1}{1 + 2x + 2\sqrt{1 + x + x^2}} +$

$+ \frac{3}{2}\ln(1 + 2x + 2\sqrt{1 + x + x^2}) + C$; **9.** $-\frac{3x + 20}{12}(-x^2 + 4x + 5)^{\frac{3}{2}} +$

$+ \frac{25}{8}(x - 2)\sqrt{-x^2 + 4x + 5} + \frac{225}{8}\arcsin\frac{x-2}{3} + C$; **10.** $-\sqrt{-x^2 + 4x + 5} -$

$- 6\arcsin\sqrt{\frac{5-x}{6}} + C$.

5.10.11.

1. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{2}}+c$; 2. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2}\operatorname{tg}x)+c$; 3. $\operatorname{arc\,tg}\frac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{2}+c$;

4. $\frac{1}{3}\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\ln\left(1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)-\frac{5}{3}\left(3-\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+c$; 5. $x+\frac{2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}+c$;

6. $-\frac{1}{4}\cos x(\cos x+\sin x)+\frac{1}{4}\ln(\sin x+\cos x)+c$; 7. $\ln(\operatorname{tg}^2x+2)+$
$+\frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}+c$. 8. $-\frac{1}{\operatorname{tg}x}+2\operatorname{tg}x+\frac{\operatorname{tg}^3x}{3}+c$;

9. $\frac{5}{2\sqrt{2}}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$;

10. $2\operatorname{arc\,tg}\frac{(1+a^2)\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2a}{1-a^2}+c$.

CAPITOLUL II

1.4.

$\|\Delta_1\|=\frac{1}{3}$; $\|\Delta_2\|=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$; $\|\Delta_3\|=e^{10}(e-1)$; $\|\Delta_4\|=\frac{1}{2}$

1.11.

(1) $\Delta'\cup\Delta''=\left(1,\frac{1}{2^4},\frac{1}{2^3},\frac{1}{3},\frac{1}{2},1\right)$

(2) $\Delta'\cup\Delta''=(0,1,2,e,3,4,5,6,7,e^2,8,9,10)$

b) 1) dacă $\Delta'\subset\Delta''$, atunci p divide q, 2) dacă p divide q, atunci $\Delta'\subset\Delta''$.

Conform primului punct $\left.\begin{cases}p \text{ divide } pq\Rightarrow\Delta'\subset\Delta\\ q \text{ divide } pq\Rightarrow\Delta''\subset\Delta\end{cases}\right\}\Rightarrow\Delta'\cup\Delta''\subset\Delta$.

2.23.I.

1. $\sigma_\Delta(f,\xi)=\frac{7}{24}$; 2. $\sigma_\Delta(f,\xi)=\frac{\pi}{12}\left(3+\sin\frac{\pi}{5}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

3. $\sigma_\Delta(f,\xi)=\frac{9}{4}$; 4. $\sigma_\Delta(f,\xi)=\frac{153}{8}$; 5. $\sigma_\Delta(f,\xi)=\frac{1889}{2880}$.

1. f fiind integrabilă, pentru orice şir de diviziuni cu $\| \Delta_n \| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ şi orice alegere a punctelor intermediare ξ_i^n, şirul sumelor Riemann converge. Alegem în particular punctele intermediare ξ_i^n astfel încât $f(\xi_i^n) = \alpha$. Atunci

$$\sigma_{\Delta_n}(f, \xi_i^n) = \sum_{i=1}^{k_n} \alpha(x_i^n - x_{i-1}^n) = \alpha \sum_{i=1}^{k_n} (x_i^n - x_{i-1}^n) = \alpha\,(b - a),$$

deci:

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}(f, \xi_i^n) = \alpha(b - a) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

2. Calculăm $\sigma_{\Delta_n}(f, \xi_i^n)$: $\lim \sigma_{\Delta_n}(f, \xi_i^n) = \frac{1}{2}$, oricare ar fi (Δ_n) încât $\| \Delta_n \| \to 0$ şi oricare ar fi $\xi_i^n \in [x_{i-1}^n, x_i^n]$. f nu posedă primitivă, deoarece f nu are proprietatea Darboux. $f([0, 1]) = \{0, 1\}$ nu este interval. 3. Dacă f integrabilă atunci pentru $(\forall)$ şir de diviziuni $(\Delta_n)_{n\in N}$ astfel încât $\| \Delta_n \| \to 0$ şi orice $\xi_i^n \in [x_{i-1}^n, x_i^n]$, $\lim \sigma_{\Delta_n}(f, \xi_i^n)$ există $=$

$= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. Se aleg punctele ξ_i^n astfel încât $f(\xi_i^n) = 2\ \xi_i^n$. $\sigma_\Delta\,(f, \xi_i) = 2 \sum_{i=0}^{k_n} (x_i^n - x_{i-1}^n)\xi_i$.

Funcţia $g : [a, b] \to \mathbf{R}$, $g(x) = 2x$ este integrabilă.

$\sigma_{\Delta_n}(g, \xi_i^n) = 2 \sum_{i=1}^{k_n} (x_i - x_{i-1})\,\xi_i^n$, $\lim \sigma_{\Delta_n}(g, \xi_i^n) = \lim \sigma_{\Delta_n}(f, \xi_i^n) = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x =$

$= b^2 - a^2 \Rightarrow \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = b^2 - a^2$;

4. Se aleg punctele intermediare ξ_i^n astfel încât $f(\xi_i^n) = \frac{1}{1 + \xi_i^n}$ $\sigma_{\Delta_n}(f, \xi_i^n) =$

$= \sum_{i=1}^{k_n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \frac{1}{1 + \xi_i^n}$, $\lim \sum_{i=1}^{k_n} (x_i - x_{i-1}) \left(\frac{1}{1 + \xi_i^n}\right) = \int_1^2 \frac{1}{1 + x}\,\mathrm{d}x = \ln 2.$

5. Dacă f ar fi integrabilă, atunci pentru orice alegere a şirului de diviziuni (Δ_n) cu $\| \Delta_n \| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ şi orice alegere a punctelor ξ_i^n, şirul sumelor Riemann are limită $=$

$= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. Alegem în particular $\xi_i'^{,n}$ astfel încât $f(\xi_i'^{,n}) = \xi_i'^{,n}$ şi $\xi_i''^{,n}$, astfel încât $f(\xi_i''^{,n}) = 2\xi_i''^{,n}$. Avem

$\sigma_{\Delta_n}(f, \xi_i'^{,n}) = \sum_{i=1}^{kn} (x_i - x_{i-1})\,\xi_i'^{,n}$ şi $\sigma_{\Delta_n}(f, \xi_i''^{,n}) = \sum_{i=1}^{kn} (x_i - x_{i-1})2\xi_i''^{,n}$,

deci $\lim_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}(f, \xi_i'^{,n}) = \int_1^2 x\mathrm{d}x = \frac{3}{2}$ şi $\lim \sigma_{\Delta_n}(f, \xi_i''^{,n}) = \int_1^2 2x\,\mathrm{d}x = 3$

Aşadar f nu este integrabilă;

6. Fie $f_i : [x_{i-1}, x_i] \to \mathbf{R}$, $f_i(x) = f(x)$ $(\forall)x \in (x_{i-1}, x_i)$, $g_i : [x_{i-1}, x_i] \to \mathbf{R}$, $g_i(x) = \alpha_i (\forall)x \in [x_{i-1}, x_i]$. g_i sunt integrabile (ca funcţii constante), deci f_i sînt integrabile (diferă de g_i în punctele x_{i-1} şi x_i). Dar f_i este restricţia lui f la $[x_{i-1}, x_i]$. Din propoziţia 2.21 rezultă că f este integrabilă şi

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{x_1} f_1(x)\mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} f_2(x)\mathrm{d}x + \ldots + \int_{x_{n-1}}^b f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x_i - x_{i-1}).$$

7. $f_1(x) = -\sin x\ (\forall)x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$; $f_2(x) = \sin x (\forall)x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. f_1, f_2 sînt integra-

bile; ele sunt restricţii ale funcţiei f la intervalele $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, respectiv $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Conform propoziţiei 2.21. f este integrabilă şi $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{0} -\sin x\mathrm{d}x +$

$+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x = 2$. **8.** Funcţiile $f_1(x) = x$ pentru $x \in [0, 1]$, $g(x) = x^2 + 1$ pentru $x \in [1, 2]$, sunt integrabile pe $[0, 1]$, respectiv pe $[1, 2]$. $f_2(x) = x^2 + 1$ pentru $x \in (1, 2]$ şi $f_2(1) = 1$ este integrabilă pe $[1, 2]$ (deoarece diferă de g în punctul $x = 1$), prin urmare f este integrabilă şi $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{23}{6}$; **9.** Explicităm funcţia $f(x) = [2^5x] = [32\,x]$ astfel

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left[0, \frac{1}{32}\right) \\ 1, & x \in \left[\frac{1}{32}, \frac{2}{32}\right) \\ 2, & x \in \left[\frac{3}{32}, \frac{3}{32}\right) \\ \vdots & \\ k-1, & x \in \left[\frac{k-1}{32}, \frac{k}{32}\right) \\ 31 & x \in \left[\frac{31}{32}, 1\right]. \end{cases}$$

Deci există o diviziune $\Delta = \left(0, \frac{1}{32}, \frac{2}{32}, \frac{3}{32}, \dots \frac{k}{32}, \dots, \frac{32}{32}\right)$ a intervalului $[0, 1]$ astfel încât f este constantă pe fiecare interval deschis (x_{i-1}, x_i), $(1 \leqslant i \leqslant 32)$. Conform exerciţiului 6, f este integrabilă şi $\int_0^{32} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{32} (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i) = \sum_{i=1}^{32} (x_i - x_{i-1})\,\alpha_i =$

$= \frac{1}{32}(1 + 2 + \dots + 32) = \frac{31}{2}$; **10.** Se scrie explicit funcţia

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1] \\ x - 1, & x \in [1, 2) \\ x - 2, & x \in [2, 3) \\ x - 3, & x \in [3, 2\sqrt{3}]. \end{cases}$$

Conform propoziţiei 2.21, f este integrabilă şi $\int_0^{2\sqrt{3}} f(x)\mathrm{d}x = 12 - 6\sqrt{3}$.

3.13.I.

1. $s_1(f) = \frac{5}{27}$, $S_1(f) = \frac{14}{27}$, $s_2(f) = \frac{143}{576}$, $S_2(f) = \frac{7}{16}$; **3.** $s_2(f) = \frac{439}{780}$, $S_2(f) = \frac{243}{390}$;

4. $s_1(f) = \frac{7}{3}$, $S_1(f) = \frac{34}{3}$; $s_2(f) = 2$, $S_2(f) = 13$; **5.** $s_1(f) = \frac{1}{2}\left(e^{-1} + e^{-\frac{1}{2}} +\right.$

$+ 1 + e^{\frac{1}{2}}$), $S_1(f) = \frac{1}{2}\left(e^{-\frac{1}{2}} + e^{\frac{1}{2}} + e + 1\right)$, $S_2(f) = 1 + e$, $s_2(f) = e^{-1} + 1$.

3.13.II.

1. $\sqrt{3} - \frac{\ln(2+\sqrt{3})}{2}$; **2.** $\frac{4\sqrt{2}}{3}$; **3.** $\frac{a^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.

3.15.

1. 2; **2.** $\frac{2(2\sqrt{2}-1)}{3}$; **3.** 2; **4.** 1; **5.** $\frac{1}{2}$.

4.18.I.

1. În baza teoremei de medie există $c \in [a, b]$ cu $f(c) \cdot (b - a) = \int_a^b f(x)dx$. Dacă ar exista şi un $c' \neq c$ cu aceeaşi proprietate, atunci ar rezulta $f(c') = f(c)$. Aceasta nu poate avea loc, deoarece f, fiind strict crescătoare, este injectivă;

2. $c = \sqrt{\frac{13}{3}}$;

3. Dacă, prin absurd, f nu îşi schimbă semnul pe nici un interval $[x', x''] \subset [a, b]$, atunci $f \geqslant 0$ sau $-f \geqslant 0$ pe $[a, b]$. Aplicând propoziţia 4.7 lui f sau $-f$, se obţine $\int_a^b f(x)dx > 0$ sau $-\int_a^b f(x)dx > 0$. Contradicţie;

4. Dacă ar exista $c \in [a, b]$ cu $f(c) \neq 0$, să admitem $f(c) > 0$; atunci ($A_{12}(\beta)$) ar exista $r >$ astfel încât $f(x) > 0$, $\forall x \in (c - r, c + r)$, prin urmare (propoziţia 4.7) $\int_{c-r}^{c+r} f(x)dx > 0$. Contradicţie.

4.18.III.

1. $\frac{\pi}{2}$; **2.** $\frac{1}{4}\left(\operatorname{arctg}\frac{5}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)$; **3.** $\frac{\pi \ln 2}{8}$; **4.** $\frac{\pi}{4}$; **5.** $\ln\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}$; **6.** $\frac{4-\pi}{2}$;
7. $\frac{2}{15}$; **8.** $-\frac{\pi}{4}$; **9.** $\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2} - 1 + \ln 2\right)$; **10.** $\frac{1}{13}[e^2(2\sin 3 - 3\cos 3) + 3]$;
11. $2(e^2 + 3)$; **12.** $\frac{3}{2}\ln 3$; **13.** $\frac{1}{4}\ln 2$; **14.** $2(\sqrt{5} - \sqrt{2}) - \ln(\sqrt{2} + 1) + \ln(2 + \sqrt{5})$;
15. $2\sqrt{2} - 2 + \frac{\pi}{4}$.

1.9.

1. $\frac{32}{3}$; 2. $\frac{1}{12}$; 3. $\frac{10}{3}$; 4. $\frac{\pi r^2}{8}$; 5. $\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)-$ $-\frac{1}{12\sqrt{2}}(\sqrt{5}-1)^{\frac{3}{2}}$; 6. $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}$; 7. $\frac{9}{2}$; 8. $e+\frac{1}{e}-2$; 9. 1; 10. $\frac{a^2}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)$; 11. $4a^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}\right)$.

1.9.II

1. $A=\frac{1}{3}$; 2. $A=a^2\ln 2$; 3. $A_1=\frac{4}{3}(\sqrt{3}+4\pi)$. $A_2=\frac{4}{3}(8\pi-\sqrt{3})$;

4. $A_1=A_2=\pi-2\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln 3$, $A_3=2\pi-2A_1$;

5. $A=\frac{32\sqrt{6}}{3}$; 6. $A_1=2\left(\pi+\frac{2}{3}\right)$. $A_2=6\pi-\frac{4}{3}$; 7. $A=$ $=\frac{a^2}{2}\ln\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}$; 8. $A=\frac{9}{16}$. 9. $A=\frac{8}{3}$.

2.8.

1. $\frac{b^2}{a^{\frac{4}{3}}}(b^{\frac{7}{3}}-a^{\frac{7}{3}})\cdot\frac{3}{7}$; 2. $\frac{16\pi}{15}$; 3. $\frac{\pi^2}{2}$; 4. $\frac{\pi}{2}(1-e^{-4})$; 5. $\pi\left(\frac{\pi^2}{72}+\frac{\sqrt{3}\pi}{6}-1\right)$;

6. $\frac{5e^3-2}{27}\pi$; 7. $\frac{a^3}{8}(e^2+4-e^{-2})$; 8. $\frac{\pi}{4}(e^2-1)$; 9. $\frac{\pi a^3}{4}$; 10. $\frac{\pi a^2}{6}$; 11. $\frac{\pi a^3}{20}$;

12. $\frac{2\pi}{5}$; 13. $\pi\left[2a-2b+(a+b)\ln\frac{b}{a}\right]$; 14. $\pi\left[\frac{15}{2}-8\ln 2\right]$.

3.9.

1. $1+\ln\sqrt{\frac{3}{2}}$; 2. $-\frac{1}{2}+\ln 3$; 3. $\frac{e-e^{-1}}{2}$; 4. $\frac{1}{2}(3\sqrt{2}-\sqrt{5})-$ $-\frac{1}{8}\ln\frac{(3-2\sqrt{2})(\sqrt{5}+2)}{(3+2\sqrt{2})(\sqrt{5}-2)}$;

5. $\frac{1}{4}(e^2+1)$; 6. $\ln(\sqrt{2}+1)$; 7. $\ln 5-\frac{2}{3}$;

8. $\sqrt{1+e^2}-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{(\sqrt{1+e^2}-1)^2}{e^2(\sqrt{2}-1)^2}$.

4.10.

1. $(2\sqrt{2}-1)\frac{\pi}{9}$; 2. $\frac{\pi}{4}(e^2-e^{-2}+4)$; 3. $\pi[\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)]$;

4. $\pi\left(e\sqrt{1+e^2}-\sqrt{2}+\ln\frac{e+\sqrt{1+e^2}}{1+\sqrt{2}}\right)$; 5. $2\pi a\left(\frac{b\pi}{3}+a\right)$;

6. $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\left[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})\right]$; 7. $\frac{\pi}{8}\left(\frac{5\sqrt{17}-3}{8}+\ln\frac{5-\sqrt{17}}{2}\right)$; 8. $3\pi a^2$.

5.6.

1. $D_4(f)=60$, $T_4(f)=46$. $D_8(f)=52{,}5$, $T_8(f)=45{,}5$,
$E_{D_4}(f)=14{,}6667$, $E_{T_4}(f)=0{,}6667$, $E_{D_8}(f)=7{,}1667$, $E_{T_8}(f)=0{,}1667$;

2. $D_4(f)=6{,}25$, $T_4(f)=6{,}25$, $D_6(f)=7{,}444$, $T_6(f)=6{,}111$,
$E_{D_4}(f)=\frac{1}{8}$, $E_{T_4}(f)=0{,}25$, $E_{D_6}(f)=0{,}4444$, $E_{T_6}(f)=0{,}111$;

3. $D_3(f)=0{,}6973$, $T_3(f)=0{,}7807$, $D_5(f)=0{,}7377$, $T_5(f)=0{,}7867$,
$E_{D_3}(f)=0{,}088$, $E_{T_3}(f)=0{,}0046$, $E_{D_5}(f)=0{,}0486$, $E_{T_5}(f)=0{,}0014$;

4. $D_3(f)=0{,}6166$, $T_3(f)=0{,}7054$, $D_5(f)=0{,}6455$, $T_5(f)=0{,}6956$;
$E_{D_3}(f)=0{,}0765$; $E_{T_3}(f)=0{,}0065$, $E_{D_5}(f)=0{,}0475$, $E_{T_5}(f)=0{,}0025$.

6.3.

1. $x=0$, $y=\frac{4}{3\pi}$; 2. $x=y=\frac{4}{3\pi}$; 3. $x=0$, $y=\frac{8}{3\pi}$; 4. $x=\frac{\pi}{2}$, $y=\frac{\pi}{8}$;

5. $x=\frac{8}{3}$, $y=0$.

7.3.

1. $L=20\,J$; 2. $L=0{,}125\,J$; 3. $L=4900\,J$; 4. $L=\frac{1}{6}g^2\frac{M^3}{m^2}$.

CUPRINS

I. Primitive

§ 1. Primitive 3
§ 2. Integrarea prin părţi 3
§ 3. Prima metodă de schimbare de variabilă 15
§ 4. A doua metodă de schimbare de variabilă 20
§ 5. Integrarea funcţiilor raţionale 32
..... 40

II. Funcţii integrabile

§ 1. Diviziuni 51
§ 2. Funcţii integrabile 51
§ 3. Integrabilitatea funcţiilor monotone şi a funcţiilor continue 55
§ 4. Integrarea funcţiilor continue 73
..... 81

III. Aplicaţii ale integralei definite şi metode de calcul 94

§ 1. Interpretarea geometrică a integralei definite a unei funcţii pozitive 94
§ 2. Volumul corpurilor de rotaţie 101
§ 3. Lungimea graficului unei funcţii derivabile cu derivata continuă 108
§ 4. Aria suprafeţelor de rotaţie 114
§ 5. Calculul aproximativ al integralelor definite 123
§ 6. Centre de greutate 131
§ 7. Lucru mecanic 138

ANEXĂ 141

INDICAŢII ŞI RĂSPUNSURI 145

Coli de tipar: 10
Nr. plan: 42 233/1996
Bun de tipar: 29.01.1996

Pregătirea formei şi tiparul executate
sub comanda nr. 60 043

Regia Autonomă a Imprimeriilor
Imprimeria „CORESI" Bucureşti
ROMÂNIA

Acest manual este proprietatea Ministerului Învăţământului *

Inspectoratul şcolar al judeţului/municipiului .....

.....

Şcoala/Liceul .....

Manualul nr. .....

Anul	Numele elevului care a primit manualul	Anul în care s-a folosit	Starea manualului	
			la primire	la returnare
1				
2				
3				
4				
5				

- **Profesorii trebuie să controleze dacă numele elevului este corect scris.**

- **Elevii cărora le este destinat manualul nu trebuie să facă nici un fel de notaţii pe pagini. Rugăm ca manualele să fie păstrate cât mai îngrijit.**

- **Starea manualului (la primire şi la returnare) se va înscrie folosind termenii: nouă, bună, îngrijită, nesatisfăcătoare, proastă.**

***) Se completează numai pentru exemplarele distribuite gratuit.**

ISBN 973-30-4236-6

Lei 1800